PETRE SIMA VIRGIL OLARIU MARIUS MACOVEI

MECANICA TEHNICĂ

Aplicații

Statica

Editura Tehnică

Scanned with OKEN Scanner

PETRE SIMA VIRGIL OLARIU MARIUS MACOVEI

MECANICĂ TEHNICĂ

APLICAȚII

STATICA

EDITURA TEHNICĂ
București — 1990

ISBN 973-31-0202-4

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea este adresată studenților din facultățile tehnice care studiază disciplina Mecanică precum și inginerilor, specialiștilor din institutele de proiectări, din întreprinderile economice, din institutele de cercetări care, în procesul de proiectare a unor utilaje, efectuează calcule privind eforturile statice la care sînt supuse diferite componente.

La fiecare capitol, la început se prezintă considerații teoretice, definiții, formule după care se rezolvă o serie de aplicații practice tipice care pot ghida soluționarea altor probleme propuse de autori.

Lucrarea conține și tabele cu valori ale coeficienților de frecare, ale pozițiilor centrelor de greutate ale unor configurații mai frecvent utilizate în practică precum și ale altor mărimi fizice necesare în calcule.

Redactori: IULIU FEJES, IOAN DASCĂLU
Tehnoredactor: MARIA TRĂSNEA
Coperta: SIMONA DUMITRESCU

Bun de tipar: 29.XI.1990
Coli de tipar: 28,5
C.Z. 531.2

Tiparul executat la:
ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ CLUJ,
Municipiul Cluj, B-dul 22 Decembrie Nr. 146
România
Comanda nr. 498

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Prezenta lucrare a fost alcătuită cu scopul de a pune la dispoziția inginerilor și întregului personal tehnic, din întreprinderi și institute de cercetare, precum și studenților de la facultățile cu profil tehnic, un material util în vederea însușirii temeinice a noțiunilor, teoremelor și metodelor folosite pentru studiul sistemelor mecanice în condiții de echilibru.

Un accent deosebit se pune pe metodologia de rezolvare și pe aparatul matematic folosit, utilizîndu-se, în mod frecvent, cunoștințe de geometrie, trigonometrie, analiză matematică, calcul vectorial și matricial, care, în mare parte, sînt cunoscute la absolvirea liceelor.

Fără a intra în amănunte nesemnificative, majoritatea aplicațiilor sînt legate de cazuri concrete întîlnite în practică, în procesul de producție, legate de funcționarea mașinilor, utilajelor, dispozitivelor, sau elementelor componente ale automatelor de lucru și de control al calității produselor.

Această lucrare utilizează atît abundenta literatură de specialitate românească, cît și lucrările unor autori străini; de asemenea, lucrarea prezintă rezultatele personale și experiența acumulată de autori în predarea cursului de mecanică la Universitatea din Brașov, pe o perioadă îndelungată.

22 martie 1989

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Capitolul 1. Sisteme de forțe 5

A. Considerații teoretice 5
B. Probleme rezolvate 7
C. Probleme propuse spre rezolvare 29

Capitolul 2. Centre de greutate 44

A. Definiții și formule 44
B. Probleme rezolvate 48
C. Probleme propuse spre rezolvare 76

Capitolul 3. Echilibrul punctului material și al rigidului 101

A. Definiții și formule 101
B. Probleme rezolvate 112
C. Probleme propuse spre rezolvare 148

Capitolul 4. Echilibrul sistemelor de puncte materiale și solide rigide 168

A. Definiții și formule 168
B. Probleme rezolvate 170
C. Probleme propuse spre rezolvare 256

Capitolul 5. Grinzi cu zăbrele 284

A. Considerații teoretice 284
B. Probleme rezolvate 286
C. Probleme propuse spre rezolvare 316

Capitolul 6. Statica firelor (cablurilor) 345

A. Considerații teoretice 345
B. Probleme rezolvate 351
C. Probleme propuse spre rezolvare 371

Capitolul 7. Principiul deplasărilor virtuale 385

A. Considerații teoretice 385
B. Probleme rezolvate 388
C. Probleme propuse spre rezolvare 404

Capitolul 8. Probleme recapitulative 414

A. Probleme rezolvate 414
B. Probleme propuse spre rezolvare 449

Bibliografie 455

Scanned with OKEN Scanner

1
Sisteme de forțe

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

Torsorul unei forțe reprezentate printr-un vector alunecător. Să considerăm o forță reprezentată printr-un vector alunecător $\mathbf{F}_i \in \{\mathbf{F}\}$ și să notăm cu $\mathbf{M}_i$ momentul acestei forțe în raport cu un pol O. Ansamblul format din vectorul $\mathbf{F}_i$ și vectorul legat $\mathbf{M}_i$, localizat în O, este numit torsor în pol O al vectorului alunecător $\mathbf{F}_i$ și este notat prin

$$\tau_o(\mathbf{F}_i) = \tau(\mathbf{F}_i) = \{\mathbf{F}_i,\ \mathbf{M}_i\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}. \tag{1.1}$$

Momentul polar $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$, are sensul dat de regula șurubului drept (fig. 1.a), iar modulul are expresia

$$M_i = r_i F_i \sin \alpha_i = d_i F_i \tag{1.2}$$

în care d_i este brațul forței $\mathbf{F}_i$.

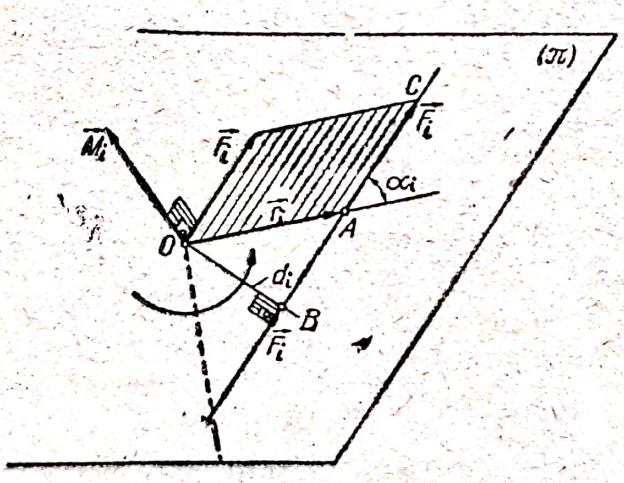


Fig. 1 a

Vectorul legat $\mathbf{M}_i$ se scrie sub forma

$$\mathbf{M}_i = M_{ix}\mathbf{i} + M_{iy}\mathbf{j} + M_{iz}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Torsorul rezultant al unui sistem de vectori alunecători. În virtutea operației de adunare a torsorilor se obține suma torsorilor sistemului $\{\mathbf{F}\}$, care este un nou torsor, numit torsor rezultant în polul O al sistemului de vectori alunecători și care se notează astfel (fig. 1.b)

$$\tau_O\{\mathbf{F}\} = \tau\{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{R}, \mathbf{M}\} = \begin{Bmatrix}\mathbf{R}\\ \mathbf{M}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\Sigma\mathbf{F}_i\\ \Sigma\mathbf{M}_i\end{Bmatrix}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.4}$$

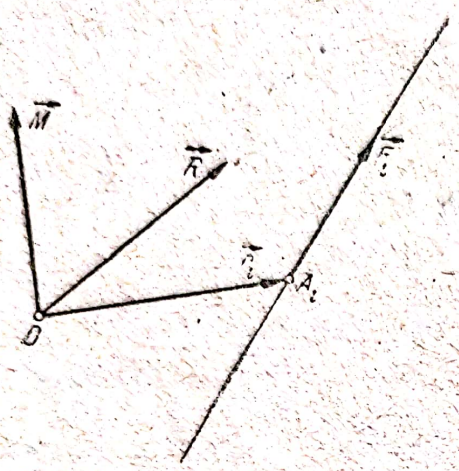


Fig. 1 b

Componentele torsorului sistemului de forțe sînt: forța rezultantă

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \tag{1.5}$$

și momentul rezultant

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \tag{1.9}$$

unde $\mathbf{r}_i$ sînt vectorii de poziție ai vectorilor alunecători $\mathbf{F}_i$.

Forța rezultantă $\mathbf{R}$ este definită de (1.5) ca vector liber, iar momentul rezultant $\mathbf{M}$ este definit de (1.6) ca vector legat; aceste două elemente formează torsorul rezultant în polul O al sistemului de vectori alunecători.

Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători. Suportul rezultantei $\mathbf{R}$ al unui sistem de vectori alunecători $\{\mathbf{F}\}$ se numește axă centrală.

Ecuația vectorială a axei centrale este

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}}{R^2}, \tag{1.7}$$

unde $\mathbf{d} = \mathbf{OQ}$ este vectorul care exprimă distanța de la polul O la axa centrală (Δ) (fig. 1.c). Ecuațiile carteziene ale axei centrale sînt

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z} = \lambda, \tag{1.8}$$

în care X, Y și Z sînt componentele scalare ale forței rezultante $\mathbf{R}$ după axele reperului cartezian, M_x, M_y, și M_z componentele scalare ale momentului rezultant $\mathbf{M}$ după axele reperului cartezian, iar x, y și z coordonatele curente ale unui punct al axei centrale.

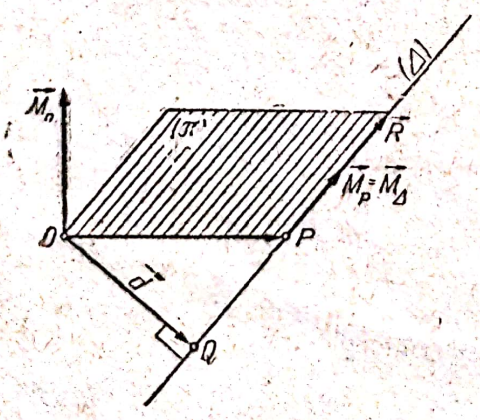


Fig. 1 c

În cazul unui sistem de forțe coplanare, ecuația axei centrale este

$$xY - yX = M_z. \tag{1.9}$$

Cupluri de vectori. Sistemul format din doi vectori (respectiv două forțe) egali în modul, avînd sensuri opuse și suporturi paralele, se numește cuplu de vectori (respectiv cuplu de forțe).

Să considerăm sistemul forțelor $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ (fig. 1.d), care formează un cuplu conținut în planul (π). Proprietățile cuplului de forțe sînt următoarele:

— rezultanta unui cuplu este nulă;
— momentul cuplului este un vector perpendicular pe planul cuplului;
— sensul momentului unui cuplu este dat de regula șurubului drept;

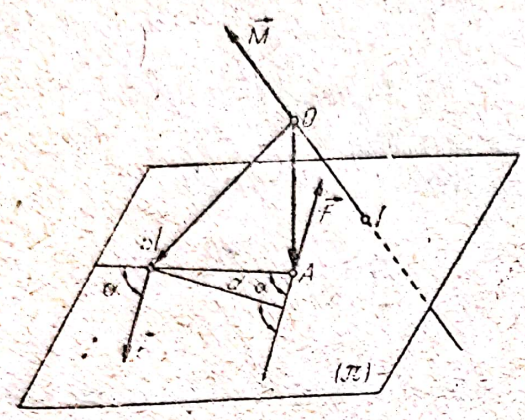


Fig. 1 d

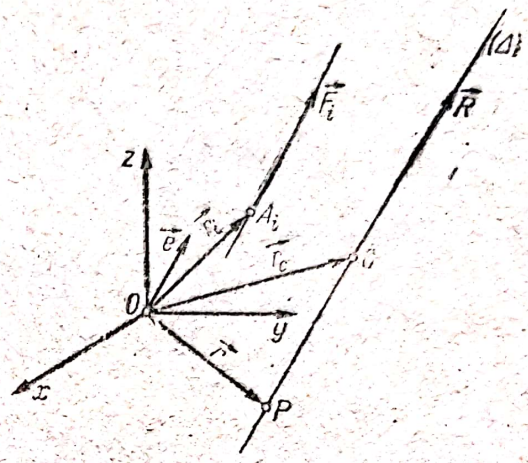


Fig. 1 e

— modulul momentului unui cuplu este egal cu produsul dintre brațul cuplului și modulul uneia dintre forțele cuplului, adică

$$M = dF, \tag{1.10}$$

unde distanța d dintre suporturile paralele ale celor două forțe se numește brațul cuplului.

Vectori paraleli (forțe paralele). Să considerăm un sistem $\{\mathbf{F}\}$ de forțe paralele cu versorul $\mathbf{e}$, avînd vectorul reprezentativ $\mathbf{F}_i$ (fig. 1.e).

Vectorul de poziție al punctului de aplicație C al rezultantei $\mathbf{R}$ a forțelor paralele are expresia

$$\mathbf{r}_C = \frac{\Sigma \mathbf{r}_i F_i}{\Sigma F_i}. \tag{1.11}$$

Punctul C, poartă numele de centru al forțelor paralele. Coordonatele centrului forțelor paralele în raport cu reperul cartezian $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sînt

$$x_C = \frac{\Sigma x_i F_i}{F_i}, \quad y_C = \frac{\Sigma y_i F_i}{F_i}, \quad z_C = \frac{\Sigma z_i F_i}{F_i}. \tag{1.12}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

1.1. În procesul tehnologic de strunjire a barelor de secțiune transversală circulară, cuțitul de strung este solicitat de un sistem de forțe concurente, cum se poate vedea în figura 1.1. Cunoscînd valorile forțelor: $P_1 = 3$ N, $P_2 = 4$ N și $P_3 = 16$ N, se cere să se determine torsorul de reducere al forțelor în punctul O_1 situat pe axa barei, cunoscînd diametrul barei, $d = 5$ cm.

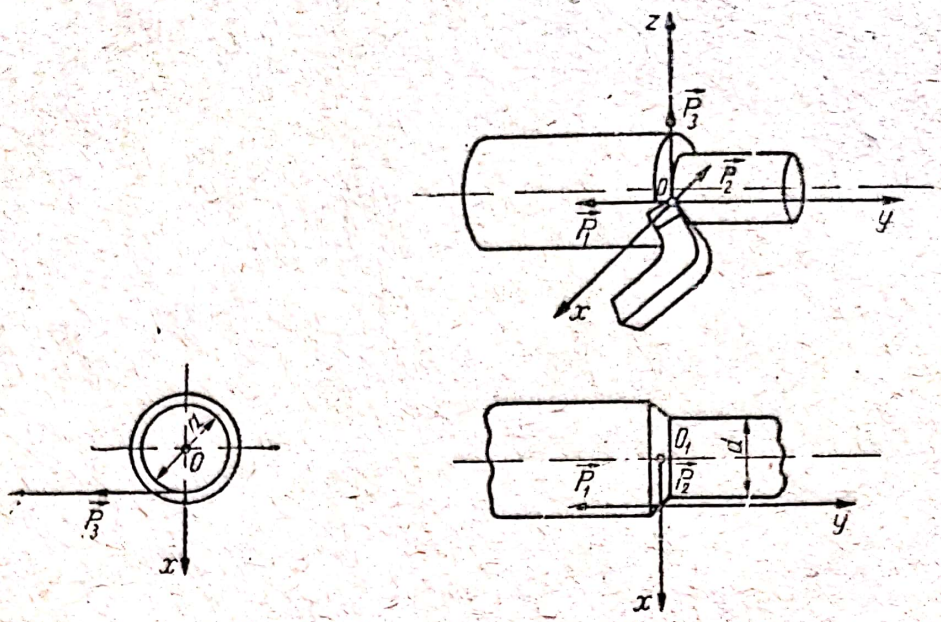


Fig. 1.1

Rezolvare. Expresiile analitice ale forțelor, în raport cu sistemul de referință trirectangular $Oxyz$, sînt respectiv

$$\mathbf{P}_1 = -3\mathbf{j},\ P_2 = -4\mathbf{i},\ P_3 = 16\mathbf{k}.$$

Rezultanta sistemului celor trei forțe

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 16\mathbf{k}.$$

Modulul forței rezultante

$$|\mathbf{R}| = R = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 16^2} = 16{,}85 \text{ N}.$$

Torsorul de reducere al sistemului de forțe în punctul O_1

$$\tau_{O_1}\{\mathbf{P}_i\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 16\mathbf{k} \\ \mathbf{M}_{(O_1)} = \mathbf{O_1O} \times \mathbf{R} \end{Bmatrix}.$$

Momentul sistemului de forțe în raport cu punctul O_1

$$\mathbf{M}_{(O_1)} = \mathbf{O_1O} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0{,}025 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 16 \end{vmatrix} = -0{,}4\mathbf{j} - 0{,}075\mathbf{k}.$$

Valoarea absolută a momentului celor trei forțe în raport cu punctul O_1 va fi deci:

$$|\mathbf{M}_{(O_1)}| = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}075^2} = 0{,}406 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Avem, prin urmare:

$$R = 16{,}85 \text{ N și } M_{(O_1)} = 0{,}406 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

1.2. Asupra unei plăci în consolă acționează forțele: $F_1 = F_2 = 10$ N, $F_4 = F_6 = 8$ N, $F_3 = 6$ N și $F_5 = 18$ N, orientate ca în figura 1.2. Se cere să se determine forța rezultantă și momentul rezultant al sistemului de forțe.

Scanned with OKEN Scanner

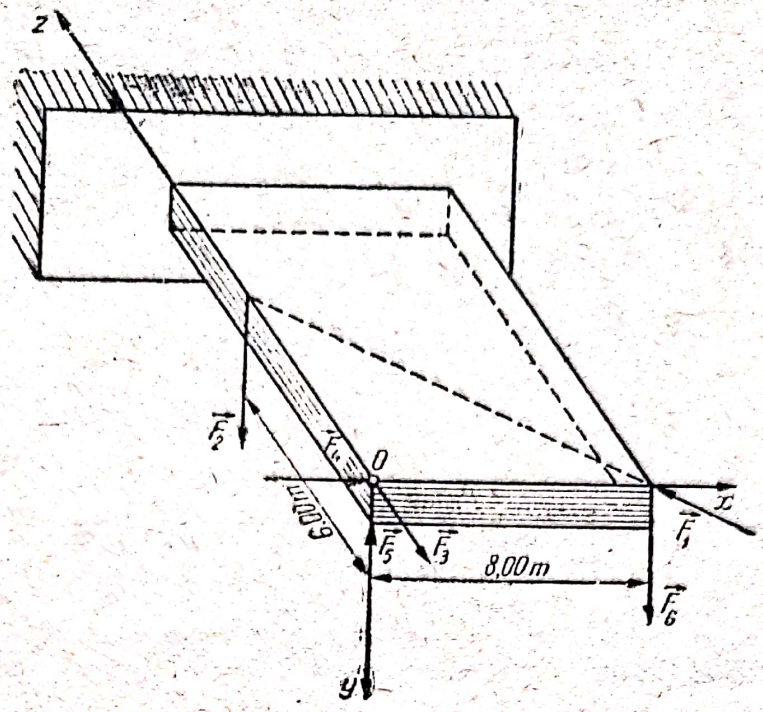


Fig. 1.2

Rezolvare. Expresiile analitice ale forţelor sînt

$$\mathbf{F}_1 = F_1\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{-8\mathbf{i} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{1}{10}(-8\mathbf{i} + 6\mathbf{k}), \quad \mathbf{F}_1 = -8\mathbf{i} + 6\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{F}_2 = 10\mathbf{j}, \ \mathbf{F}_3 = -6\mathbf{k}, \ \mathbf{F}_4 = 8\mathbf{i}, \ \mathbf{F}_5 = -18\mathbf{j}, \ \mathbf{F}_6 = 8\mathbf{j}.$$

Rezultanta celor şase forţe

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{F}_i = 0.$$

Analog, momentul rezultant

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{M}_i.$$

Se observă, însă, că

$$\mathbf{M}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -48\mathbf{j}, \quad \mathbf{M}_2 = -60\mathbf{i}, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_4 = \mathbf{M}_5 = 0, \quad \mathbf{M}_6 = 64\mathbf{k}.$$

Rezultă expresia analitică a momentului

$$\mathbf{M} = -60\mathbf{i} - 48\mathbf{j} + 64\mathbf{k},$$

respectiv

$$|\mathbf{M}| = 4\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 100 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

1.3. Să se determine efortul transmis prin guseul unei grinzi cu zăbrele (fig. 1.3,a), cunoscînd forţele care acţionează pe direcţiile OA, OB şi OC.

$$P_1 = 2000 \text{ daN}, \quad P_2 = 3000 \text{ daN}, \quad P_3 = 2500 \text{ daN}.$$

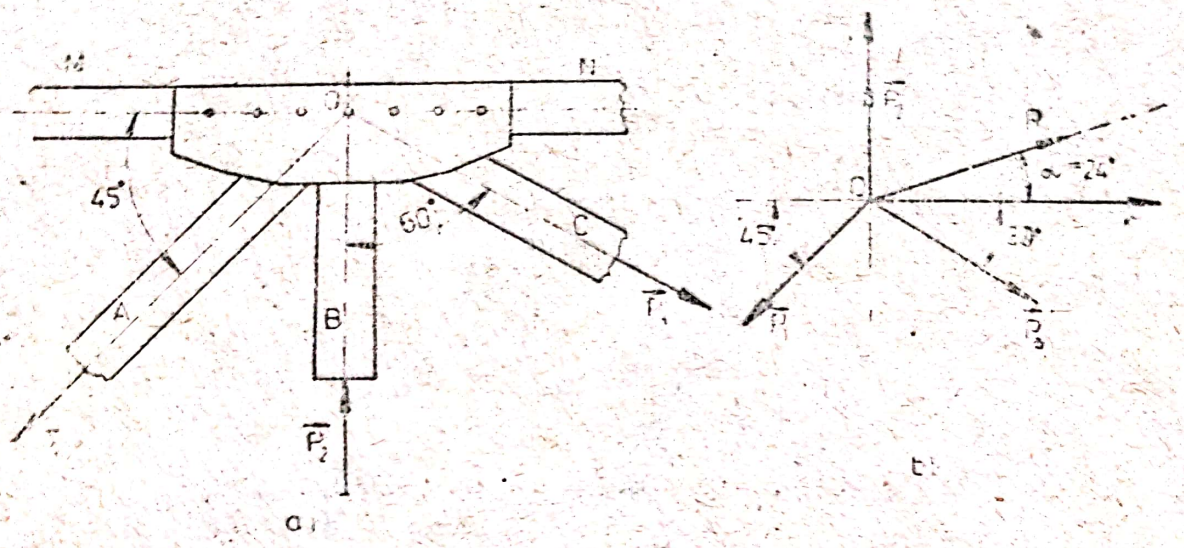


Fig. 1.3

Rezolvare. Alegînd un sistem de referinţă ca în fig. 1.3,b, expresiile analitice ale forţelor sînt respectiv

$$\mathbf{P}_1 = -1000\sqrt{2}\mathbf{i} - 1000\sqrt{2}\mathbf{j},\ \mathbf{P}_2 = 3000\mathbf{j},\ \mathbf{P}_3 = 1250\sqrt{3}\mathbf{i} - 1250\mathbf{j}.$$

Componentele rezultantei pe axele sistemului de coordonate vor fi deci

$$X = -1414 + 2165 = 751 \text{ daN},\ Y = -1414 + 3000 - 1250 = 336 \text{ daN}.$$

Efortul transmis prin guseu

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{751^2 + 336^2} = 882 \text{ daN}.$$

Unghiul pe care forţa $\mathbf{R}$ îl face cu axa Ox.

$$\cos\alpha = \frac{X}{R} = \frac{751}{882} = 0{,}914 \text{ şi deci } \alpha = \arccos 0{,}914 = 24°.$$

1.4. În procesul tehnologic de frezare, asupra unei freze de diametru d, fixată excentric în mandrina de diametru D, acţionează forţele: $\mathbf{P}$ — forţa de tăiere şi $\mathbf{P}_0$ — reacţiunea ce ia naştere în timpul frezării (fig. 1.4). Se cere să se reducă sistemul de forţe în raport cu punctul O_1 de pe axa frezei şi în raport cu punctul O de pe axa mandrinei şi să se deducă ecuaţia axei centrale în sistemul de referinţă xOy.

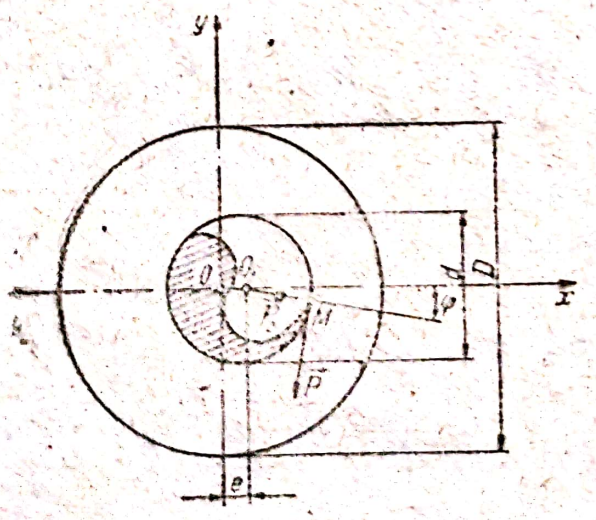


Fig. 1.4

Rezolvare. Expresiile analitice ale forţelor în raport cu sistemul de referinţă ales sînt respectiv

$$\mathbf{P} = -P\mathbf{i}\sin\varphi - P\mathbf{j}\cos\varphi$$

$$\mathbf{P}_0 = -P_0\mathbf{i}\cos\varphi + P_0\mathbf{j}\sin\varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forța rezultantă are următoarea expresie analitică

$$\mathbf{R} = -(P\sin\varphi + P_0\cos\varphi)\mathbf{i} - (P\cos\varphi - P_0\sin\varphi)\mathbf{j}.$$

Momentul rezultant al sistemului celor două forțe în raport cu punctul O_1

$$\mathbf{M}_{(O_1)} = \mathbf{O_1M} \times \mathbf{P} + \mathbf{O_1M} \times \mathbf{P}_0;$$

însă, deoarece $\mathbf{O_1M} \parallel \mathbf{P}_0$, rezultă că produsul vectorial $\mathbf{O_1M} \times \mathbf{P}_0 = 0$. Ținînd seama că

$$\mathbf{O_1M} = \frac{d}{2}\mathbf{i}\cos\varphi - \frac{d}{2}\mathbf{j}\sin\varphi,$$

vom avea

$$\mathbf{M}_{(O_1)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{d}{2}\cos\varphi & -\frac{d}{2}\sin\varphi & 0 \\ -P\sin\varphi & -P\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\frac{Pd}{2}\mathbf{k}.$$

Torsorul de reducere al forțelor în punctul O_1 este

$$\tau_{O_1} = \begin{cases} \mathbf{R} = -(P\sin\varphi + P_0\cos\varphi)\mathbf{i} - (P\cos\varphi - P_0\sin\varphi)\mathbf{j} \\ \mathbf{M}_{(O_1)} = -\frac{Pd}{2}\mathbf{k}. \end{cases}$$

Momentul celor două forțe în raport cu punctul O

$$\mathbf{M}_{(O)} = \mathbf{M}_{(O_1)} + \mathbf{O_1O} \times \mathbf{R}$$

unde

$$\mathbf{O_1O} = e\mathbf{i}.$$

Rezultă

$$\mathbf{M}_{(O)} = -\frac{Pd}{2}\mathbf{k}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e & 0 & 0 \\ -(P\sin\varphi + P_0\cos\varphi) & -(P\cos\varphi - P_0\sin\varphi) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(\frac{Pd}{2} + Pe\cos\varphi - P_0e\sin\varphi\right)\mathbf{k}.$$

Torsorul de reducere al forțelor în punctul O este deci

$$\tau_O = \begin{cases} \mathbf{R} = -(P\sin\varphi + P_0\cos\varphi)\mathbf{i} - (P\cos\varphi - P_0\sin\varphi)\mathbf{j} \\ \mathbf{M}_{(O)} = -\left(\frac{Pd}{2} + Pe\cos\varphi - P_0e\sin\varphi\right)\mathbf{k}. \end{cases}$$

Ecuația axei centrale pentru un sistem de forțe coplanare fiind

$$xY - yX = M_z,$$

rezultă

$$(P\cos\varphi - P_0\sin\varphi)x - (P\sin\varphi + P_0\cos\varphi)y =$$

$$= \frac{Pd}{2} + Pe\cos\varphi - P_0e\sin\varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Intersecțiile axei centrale cu axele sistemului de referință (tăieturile) sînt respectiv

$$x = 0, \quad y = \frac{P_0 e \sin\varphi - \frac{Pd}{2} - Pe\cos\varphi}{P\sin\varphi + P_0\cos\varphi};$$

$$y = 0, \quad x = \frac{P\frac{d}{2} + Pe\cos\varphi - P_0 e\sin\varphi}{P\sin\varphi + P_0\cos\varphi}.$$

1.5. Un volant este acționat prin intermediul unei curele de o forță **F** care face unghiul α cu direcția orizontală (fig. 1.5). Să se calculeze momentul sistemului format de greutatea volantului **G** și forța **F** în raport cu axele Ax, Ay și Az. Se cunosc: $G = 5000$ N, $F = 300$ N, $\alpha = 30°$, $l = 2$ m și $d = 1$ m.

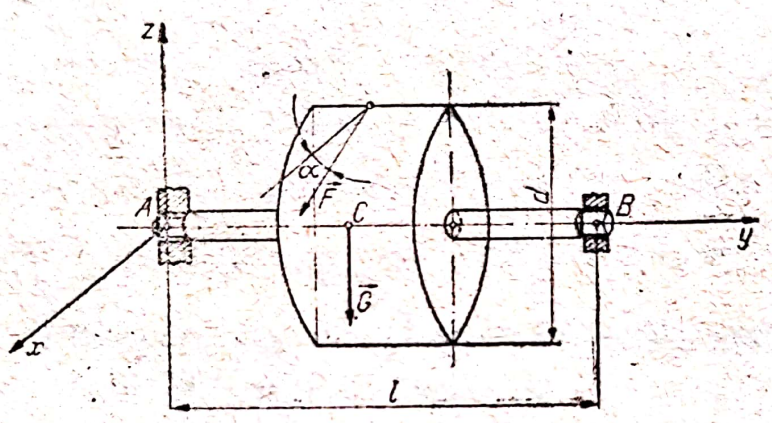


Fig. 1.5

Rezolvare. Expresiile analitice ale forțelor sînt:

$$\mathbf{G} = -G\mathbf{k} = -5000\mathbf{k}, \quad \mathbf{F} = (F\cos\alpha)\mathbf{i} + (-F\sin\alpha)\mathbf{k} = 1500(\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{k}).$$

Calculăm momentul forței **G** în raport cu punctul A

$$\mathbf{M}_A(G) = \mathbf{AC} \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5000 \end{vmatrix} = -5000\mathbf{i}.$$

Momentele greutății **G** în raport cu axele de coordonate sînt respectiv

$$M_x(\mathbf{G}) = \mathbf{M}_A(\mathbf{G})\mathbf{i} = -5000 \text{ N} \cdot \text{m}; \quad M_y(\mathbf{G}) = M_z(\mathbf{G}) = 0.$$

Momentul forței **F** în raport cu punctul A

$$\mathbf{M}_A(\mathbf{F}) = \mathbf{AD} \times \mathbf{F} = 1500 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1500\left(-\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\right),$$

iar momentele forței în raport cu axele de coordonate

$$M_x(\mathbf{F}) = -1500 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad M_y(\mathbf{F}) = 750\sqrt{3} \text{ N} \cdot \text{m}, \quad M_z(\mathbf{F}) = -1500\sqrt{3} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentele față de axele sistemului de referință, ale sistemului $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$ sînt

$$M_x = -5000 - 1500 = -6500 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad M_y = 750\sqrt{3} = 1300 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$M_z = -1500\sqrt{3} = -2600 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

1.6. Un lingou de formă cilindrică are raza secțiunii transversale r și greutatea P și este legat de un plan orizontal fix, prin cablul $ACBD$ (fig. 1.6), în care se produce tensiunea N. Se cere să se determine mărimea reacțiunii N_E din punctul E, dacă distanța $AE = EB = a$.

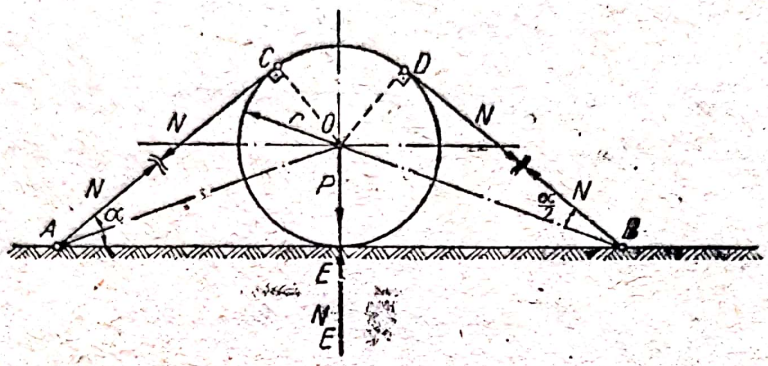


Fig. 1.6

Rezolvare. Secționăm cablul și reprezentăm pe direcțiile AC și BD, tensiunile $\mathbf{N}$ și $-\mathbf{N}$.

Ecuația de proiecții pe verticală, se scrie

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 0: \quad N_E - P - 2N \sin \alpha = 0.$$

Rezultă

$$N_E = P + 2N \sin \alpha.$$

Din triunghiul AOE deducem, însă

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{a}.$$

Ținînd seama că

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

în urma înlocuirilor se obține

$$\sin \alpha = \frac{2a \cdot r}{a^2 + r^2}.$$

Cu aceasta, reacțiunea N_E devine

$$N_E = P + \frac{4a \cdot r}{a^2 + r^2} N.$$

1.7. Un cilindru din oțel, avînd greutatea P și raza R (fig. 1.7), se găsește în fața unui prag cu înălțime h. Care este forța orizontală

care trebuie aplicată în axa cilindrului, pentru ca el să se poată ridica deasupra pragului?

Rezolvare. Cilindrul se va roti în jurul generatoarei punctului C. Forța orizontală minimă se determină din condiția ca forța orizontală $\mathbf{F}$ să creeze, în raport cu punctul C, un moment mai mare decît momentul forței $\mathbf{P}$, față de același punct. Rezultă că se poate scrie

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad \overline{CE} \cdot F - \overline{OE} \cdot P = 0.$$

Rezultă forța căutată F

$$F = \frac{\overline{OE}}{\overline{EC}} P.$$

$$\overline{OE} = \sqrt{R^2 - (R-h)^2}$$

și

$$\overline{CE} = R - h;$$

deci, forța orizontală care trebuie aplicată în axul cilindrului este

$$F \geqslant \frac{P}{R-h} \sqrt{R^2 - (R-h)^2}.$$

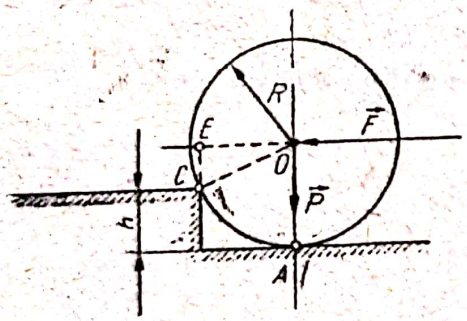


Fig. 1.7

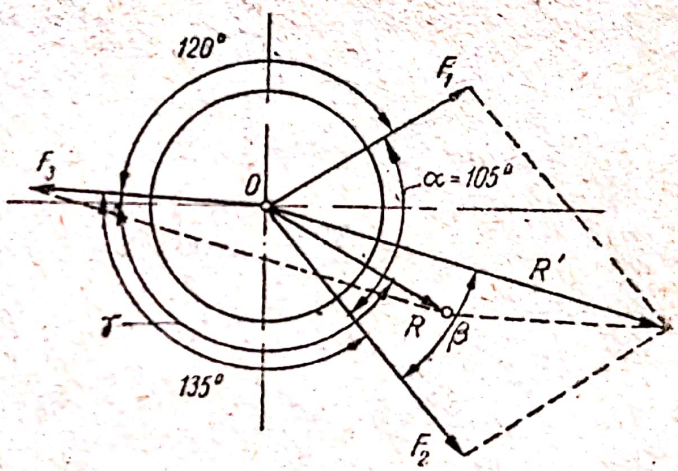


Fig. 1.8

1.8. Trunchiul unui arbore este ancorat cu trei cabluri, care acționează asupra acestuia cu forțele $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ și $\mathbf{F}_3$, situate în același plan și formînd între ele unghiuri de 105°, 135° și 120° (fig. 1.8). Se cere să se determine, în valoare și direcție rezultanta acestor forțe, dacă

$$F_1 = 1{,}8 \text{ kN}, \; F_2 = 2{,}4 \text{ kN}, \text{ și } F_3 = 3 \text{ kN}.$$

Rezolvare. Din figură se poate observa că s-a dat o soluție vectorială a problemei. Pentru a calcula valoarea numerică a forței rezultante $\mathbf{R}$ și unghiul pe care aceasta îl face cu una din forțele date, se compun mai întîi forțele $\mathbf{F}_1$ și $\mathbf{F}_2$ și apoi rezultanta acestora $\mathbf{R}'$ cu cea de a treia forță $\mathbf{F}_3$. Rezultanta $\mathbf{R}'$ va fi

$$|\mathbf{R}'| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} =$$

$$= \sqrt{1{,}8^2 + 2{,}4^2 - 2 \cdot 1{,}8 \cdot 2{,}4 \cdot 0{,}2588} = 2{,}6 \text{ kN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Compunînd apoi forțele $\mathbf{R}'$ și $\mathbf{F}_3$ se obține forța $|\mathbf{R}|$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{R'^2 + F_3^2 + 2R' \cdot F_3 \cos \alpha}$$

unde s-a notat $\alpha' = 135° + \beta$; pentru determinarea unghiului β, utilizăm formula

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Ținînd seama că $a = 18$, $b = 24$ și $c = 26$, rezultă

$$p = 34 \text{ și } \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(34-24)(34-26)}{34(34-18)}} = 0{,}3834,$$

la care corespunde $\frac{\beta}{2} = 21°$, $\beta = 42°$ și $\alpha' = 135° + 42° = 177°$.

Avem, de asemenea $\cos \alpha' = \cos 177° = -\cos 3° = -0{,}99863$. Se obține forța rezultantă

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{2{,}6^2 + 3{,}0^2 - 2 \cdot 2{,}6 \cdot 3 \cdot 0{,}99863} = 0{,}426 \text{ kN}$$

și

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(30{,}13-30)\,(30{,}13-4{,}26)}{30{,}13(30{,}13-26)}} = 0{,}1634;$$

rezultă

$$\frac{\gamma}{2} = 9°20'$$

și, prin urmare,

$$\gamma = 18°40'.$$

1.9. Se cere să se determine forța rezultantă și momentul rezultant în raport cu punctul O al forțelor aplicate pe structura mecanică din fig. 1.9, cunoscînd că: $F_1 = 250$ daN, $F_2 = 200$ daN, $F_3 = 800$ daN și $F_4 = 400$ daN.

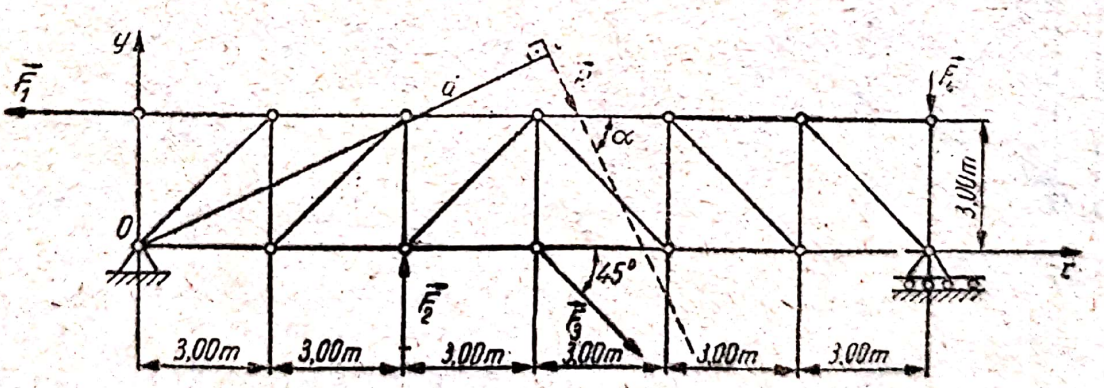


Fig. 1.9

Rezolvare. Proiecțiile forței rezultante pe axele de coordonate sînt respectiv

$$X = \sum_{i=1}^{4} X_i = -F_1 + F_3 \cos 45° = -250 + 800 \frac{\sqrt{2}}{2} = 316 \text{ daN}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{4} Y_i = F_2 - F_3 \sin 45° - F_4 = 200 - 800 \frac{\sqrt{2}}{2} - 400 = -766 \text{ daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Modulul forței rezultante

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{314^2 + 764^2} = 826 \text{ daN}.$$

Forța rezultantă face cu direcția axei Ox unghiul α, definit prin:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{764}{314} \right) = -2{,}4$$

valoare pentru care corespunde unghiul

$$\alpha = -67°31'.$$

Momentul sistemului de forțe, calculat în raport cu punctul O este

$$M_{(O)} = 3F_1 + 6F_2 - 9F_3 \sin 45° - 18F_4 = \\ = -10341 \text{ daN} \cdot \text{m}.$$

Poziția forței rezultante este dată de dreapta OC, reprezentînd distanța de la punctul O la suportul forței rezultante

$$d = \frac{|\mathbf{M}_{(O)}|}{R} = \frac{10341}{826} = 12{,}52 \text{ m}.$$

1.10. Se consideră un zid de sprijin acționat de forța greutății proprii $G = 150$ kN și forța $F = 70$ kN, ce reprezintă împingerea pămîntului. Se cere să se verifice dacă zidul se poate răsturna în jurul muchiei A (fig. 1.10).

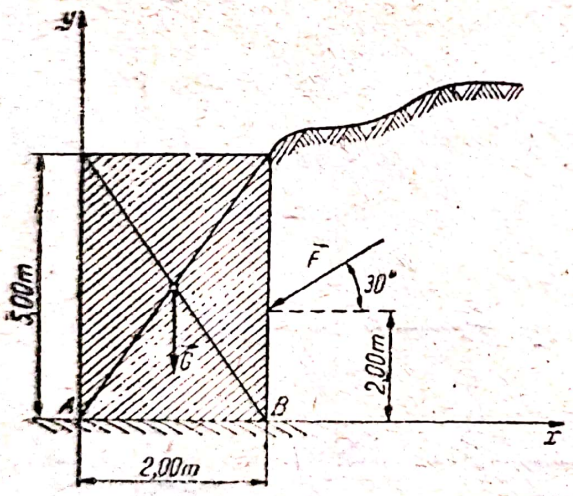


Fig. 1.10

Rezolvare. Raportînd zidul la un sistem de referință ca în figură, rezultanta forțelor **G** și **F** are următoarea expresie analitică

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$$

în care

$$X = -F \cos 30° = -70 \frac{\sqrt{3}}{2} = -60{,}6$$

$$Y = -G - F \sin 30° = \\ = -150 - 70 \frac{1}{2} = -185$$

Momentul sistemului celor două forțe calculat în raport cu axa Az este

$$\mathbf{M}_z = -1 \cdot G\mathbf{k} - 2F \sin 30°\mathbf{k} + 2F \cos 30°\mathbf{k}.$$

Ecuația suportului rezultantei

$$xY - yX = M_z.$$

În cazul nostru avem

$$-18{,}50x + 6{,}06y = -9{,}9$$

Condiția ca zidul să nu se răstoarne este ca suportul forței rezultante să intersecteze axa x într-un punct cuprins între punctele A și B.

Scanned with OKEN Scanner

Intersecțiile suportului rezultantei cu axele de coordonate se determină înlocuind în ecuația suportului $x = 0$, reszpctiv $y = 0$. Rezultă

$$x = \frac{9,9}{18,50} = 0,536 \text{ m și } y = -\frac{9,9}{6,06} = -1,635 \text{ m.}$$

Prin urmare, zidul nu se răstoarnă, deoarece

$$0,536 < 2.$$

1.11. Forțele care acționează porțiunea de culee a unui pod armat a cărei secțiune este redată în fig. 1.11, sînt: $\mathbf{F}_1$ — împingerea pămîntului, $\mathbf{F}_2$ — greutatea ce se transmite prin stîlpi, $\mathbf{F}_3$ — forța ce se transmite prin boltă și $\mathbf{G}$ — greutatea culeei de deasupra planului OA. Toate aceste forțe acționează în același plan, iar punctele lor de aplicație sînt respectiv: $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2)$, $A_3(a_3, b_3)$ și $A_4(a_4, b_4)$, coordonatele fiind socotite în raport cu axele xOy din figură.

Se cere să se reducă sistemul de forțe date în raport cu punctul A.

Rezolvare. Proiecțiile pe axele de coordonate a rezultantei celor patru forțe, sînt respective

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = F_1 \cos \alpha_1 - F_3 \cos \alpha_3$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = -F_1 \sin \alpha_1 - F_2 - G - F_3 \sin \alpha_3$$

Suma momentelor celor patru forțe, calculate în raport cu punctul A, este

$$\sum_{i=1}^{4} M_{(A)} = -b_1 F_1 \cos \alpha_1 + (a - a_1) F_1 \sin \alpha_1 + (a - a_2) F_2 + (a - a_4) G + b_3 F_3 \cos \alpha_3 + (a - a_3) F_3 \sin \alpha_3.$$

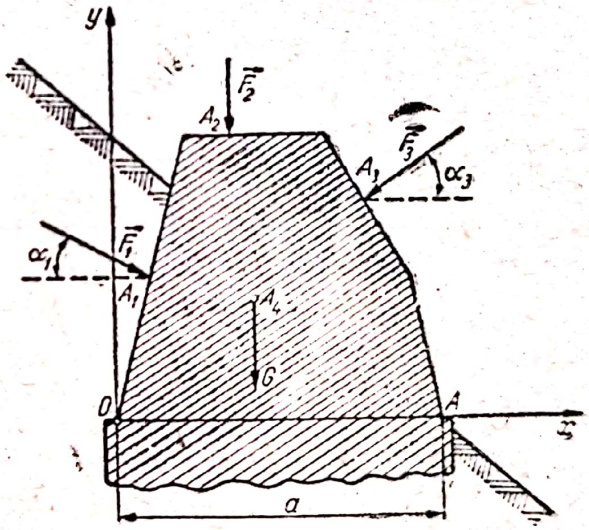


Fig. 1.11

1.12. Un jgheab de secțiune transversală semicirculară și rază $r = 2$ m este umplut cu apă (fig. 1.12). Se cere să se determine forța rezultantă $\mathbf{Q}$ ce se exercită pe peretele semicircular al jghiabului, precum și punctul ei de aplicație.

Rezolvare. În virtutea expresiei (1.5) modulul forței rezultante este

$$Q = p_C A$$

unde A este aria peretelui, p_C presiunea în centrul forțelor elementare paralele

$$p_C = \gamma y_C = \gamma \frac{4r}{3\pi}.$$

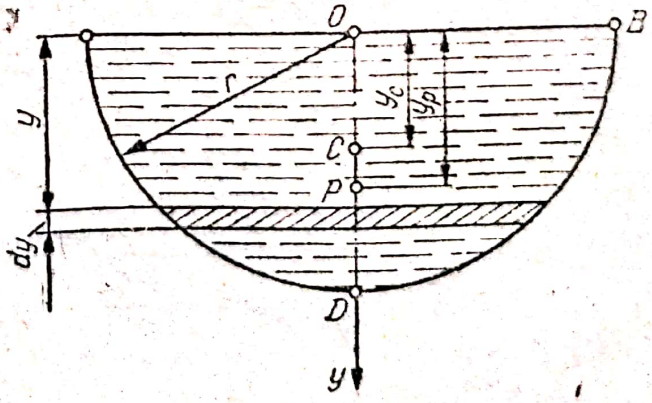


Fig. 1.12

Rezultă forța Q

$$Q = \gamma \frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2\gamma r^3}{3} 1000 \cdot 9{,}81 \frac{16}{3} = 52300 \text{ N}.$$

În virtutea relațiilor (1.12) forța Q acționează în punctul P de ordonată

$$y_P = \frac{\int_0^r y^2 dA}{y_C A} = \frac{2\int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2}\, dy}{\frac{2r^3}{3}} = \frac{3}{r^3} \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2}\, dy.$$

Efectuînd substituția $y = r \sin \theta$, rezultă

$$dy = r \cos \theta d\theta$$

Se obține

$$y_P = \frac{3}{r^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 \theta \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta}\, r \cos \theta\, d\theta = \frac{3}{r^3} r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta\, d\theta =$$

$$= \frac{3r}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta = \frac{3r}{8} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3r}{8} \frac{\sin 4\theta}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{8} = 1{,}18 \text{ m}.$$

1.13. În figură sînt reprezentate forțele care acționează pe cuțit în timpul tăierii unui metal, forțe care apar din interacțiunea metal-cuțit. Se cere să se determine torsorul de reducere a sistemului de forțe în punctul O, considerat practic vîrf al cuțitului.

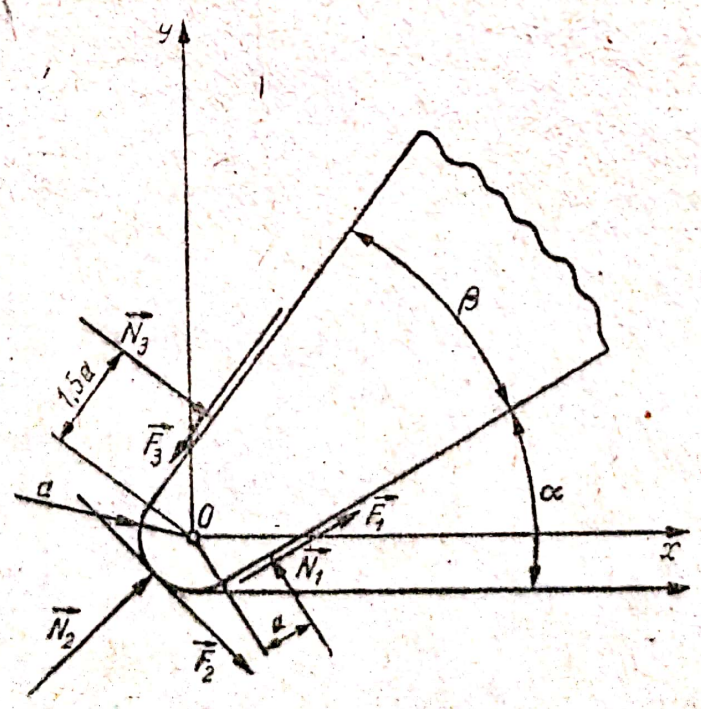


Fig. 1.13

Rezolvare. Față de sistemul de referință ales, forțele au următoarele expresii

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + F_1 \sin\alpha \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{N}_1 = -N_1 \sin\alpha \cdot \mathbf{i} + N_1 \cos\alpha \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_2 = F_2 \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\mathbf{i} - F_2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{N}_2 = N_2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\mathbf{i} + N_2 \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_3 = F_3 \cos(\alpha + \beta)\mathbf{i} + F_3 \sin(\alpha + \beta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{N}_3 = N_3 \sin(\alpha + \beta)\mathbf{i} - N_3 \cos(\alpha + \beta)\mathbf{j}.$$

Forța rezultantă este

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{3}\mathbf{N}_i = \left[F_1 \cos\alpha + F_2 \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + F_3 \cos(\alpha + \beta) - N_1 \sin\alpha + N_2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + N_3 \sin(\alpha + \beta)\right]\mathbf{i} +$$

$$+ \left[F_1 \sin\alpha - F_2 \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + F_3 \sin(\alpha + \beta) + N_1 \cos\alpha + N_2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - N_3 \cos(\alpha + \beta)\right]\mathbf{j}.$$

Calculăm momentul rezultant

$$\mathbf{M}_{(o)} = \sum_{i=1}^{6}\mathbf{M}_{(o)i} = (F_1 + F_2 - F_3 + N_1 - 1{,}5N_3)\, a\mathbf{k}.$$

1.14. Forțele elementare care apar pe muchiile tăietorare ale burghiului în timpul găuririi se pot înlocui cu forțele medii corespunzătoare, ca în fig. 1.14; $\mathbf{F}$ este forța de așchiere, $\mathbf{F}_1$ — forța axială, iar $\mathbf{F}_2$ și $\mathbf{F}_3$

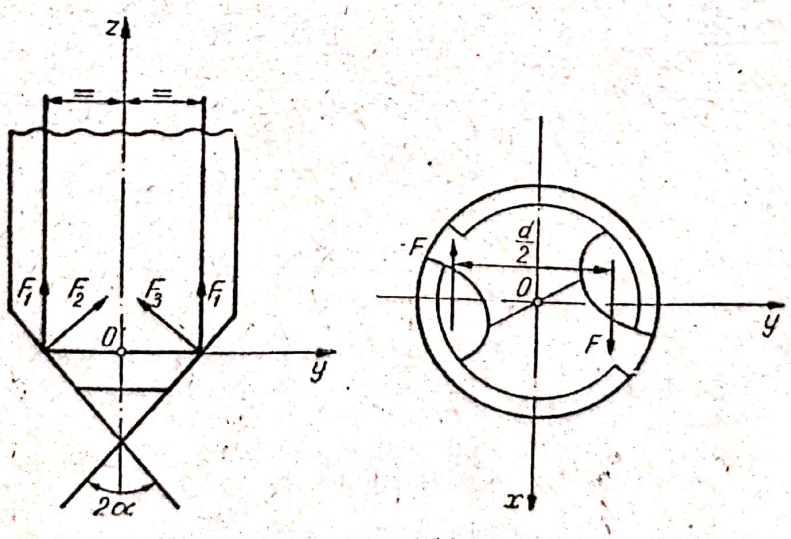


Fig. 1.14

reprezintă forţele de respingere ($F_2 = F_3$). Se cere să se exprime efectul forţelor în punctul O, situat pe axa burghiului.

Rezolvare. Forţele au, în raport cu sistemul de referinţă ales, următoarele expresii analitice

$$\mathbf{F} = F\mathbf{i}, \mathbf{F}_1 = F_1 \cdot \mathbf{k}, \mathbf{F}_2 = F_2 \cos\alpha \cdot \mathbf{j} + F_2 \sin\alpha \cdot \mathbf{k}, \mathbf{F}_3 = -F_2 \cos\alpha \cdot \mathbf{j} + F_2 \sin\alpha \cdot \mathbf{k}.$$

Forţa rezultantă este

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}_i = \mathbf{F} - \mathbf{F} + 2\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (2F_1 + 2F_2 \sin\alpha)\,\mathbf{k}$$

având modulul

$$|\mathbf{R}| = 2F_1 + 2F_2 \sin\alpha.$$

Momentul rezultant calculat faţă de punctul O

$$\mathbf{M}_{(o)} = -F\frac{d}{2}\mathbf{k}$$

de modul

$$|\mathbf{M}_{(o)}| = \frac{d}{2}F.$$

1.15. O ramă de geam AB, reprezentată în secţiune, cu greutatea $G = 100$ daN se deschide prin rotire în jurul axei orizontale ce trece prin punctul A. Deschiderea se efectuează prin întinderea unui fir BCD, trecut peste scripeţii C şi D, de dimensiuni neglijabile. Scripetele C şi punctul A sînt situaţi pe aceeaşi verticală. Neglijînd frecările, se cere să se determine variaţia tensiunii $\mathbf{T}$ a firului, în funcţie de unghiul format de direcţia ramei AB cu orizontala AH, presupunînd că $AB = AC = R$ (fig. 1.15).

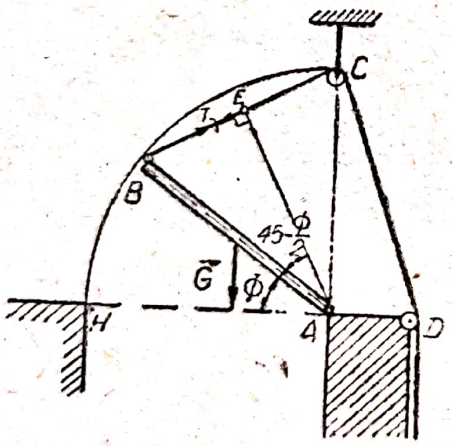


Fig. 1.15

Rezolvare. Ecuaţia de momente calculate faţă de axa de rotaţie a punctului A se scrie

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \; -\overline{AE}\,T + \frac{R}{2}G\cos\Phi = 0$$

ştiind că $\overline{AE} = R\cos\left(45° - \frac{\Phi}{2}\right)$ şi înlocuind $\cos\Phi = \sin(90° - \Phi) = 2\sin\left(45° - \frac{\Phi}{2}\right)\cos\left(45° - \frac{\Phi}{2}\right)$,

se obţine $T = G\sin\left(45° - \frac{\Phi}{2}\right) = 100\sin\left(45° - \frac{\Phi}{2}\right)$.

1.16. Un stîlp de susţinere este solicitat cu o forţă de 600 N sub un unghi de 40° (fig. 1.16, a). Să se calculeze momentul forţei faţă de punctul O, utilizînd diferite metode.

Rezolvare. 1°. Se utilizează relaţia $M_o = dF$, în care d este braţul forţei, de expresie (fig. 1.16, b)

$$d = 4\cos 40° + 2\sin 40° = 4{,}35 \text{ m};$$

Scanned with OKEN Scanner

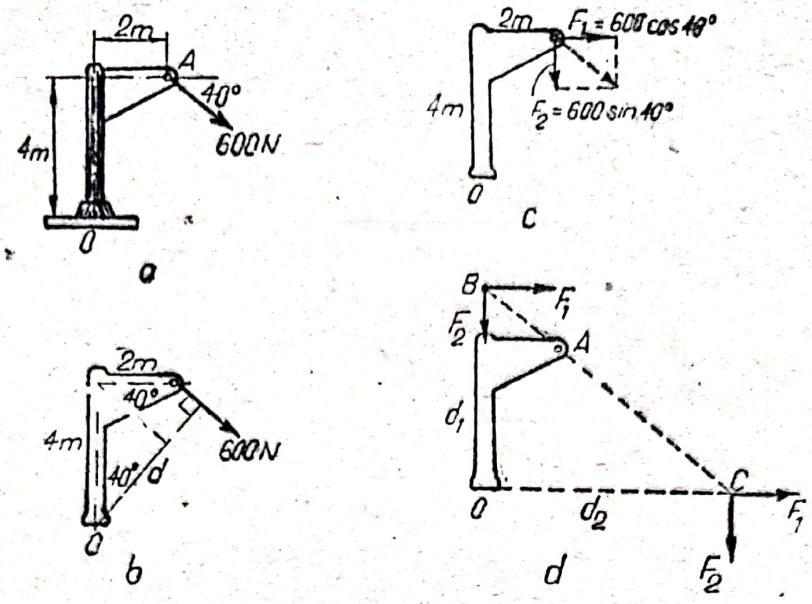


Fig. 1.16

prin urmare

$$M_0 = 600 \cdot 4{,}35 = 2610 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

2° Se descompune forța în componentele rectangulare F_1 și F_2 (fig. 1.16, c):

$$F_1 = 600\cos 40° = 460 \text{ N}, \quad F_2 = 600 \sin 40° = 386 \text{ N}$$

și în virtutea teoremei lui Varignon se obține:

$$M_0 = 460 \cdot 4 + 386 \cdot 2 = 2610 \text{ Nm}.$$

3°. În baza principiului transmisibilității deplasăm forța de-a lungul liniei de acțiune în B (fig. 1.16, d) eliminînd astfel momentul componentei F_2, momentul M_0 fiind egal cu momentul componentei F_1:

$$M_0 = d_1 \cdot F_1 = (4 + 2 \operatorname{tg} 40°)460 = 5{,}68 \cdot 460 = 2610 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

4° Deplasăm forța în C (fig. 1.16,d) eliminînd astfel momentul componentei F_1 și avem:

$$M_0 = d_2 \cdot F_2 = (2 + 4 \operatorname{ctg} 40°)386 = 6{,}77 \cdot 386 = 2610 \text{ N} \cdot \text{m}$$

1.17. Asupra unei grinzi cotite, ca în figura 1.17, a acționează forțele: $F_1 = 40$ N și $F_2 = F_3 = 50$ N. Cunoscînd dimensiunile grinzii: $a = 3$ m, $b = 2$ m și $c = 4$ m, se cere:

a) Să se reducă sistemul de forțe în punctul O și după axa centrală.

b) Să se determine ecuația vectorială și analitică a axei centrale.

Rezolvare. a) Expresiile analitice ale forțelor sînt

$$\mathbf{F}_1 = 40\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_2 = F_2\mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_2 = 30\mathbf{i} - 40\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_3 = 40\mathbf{j}.$$

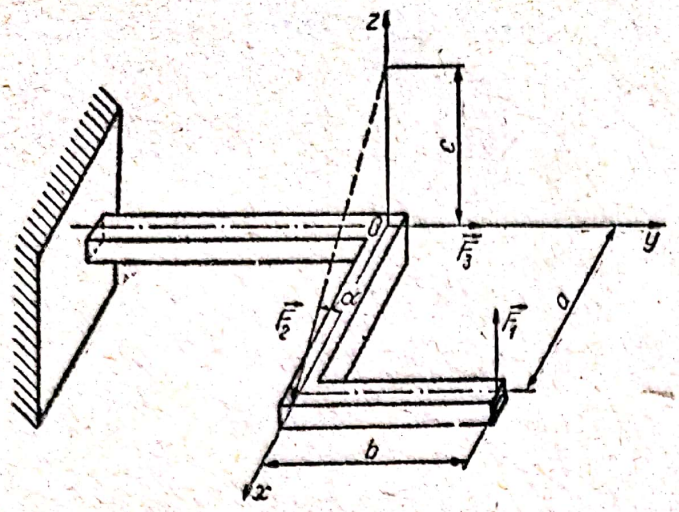


Fig. 1.17. a

Rezultanta sistemului de forțe este

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{F}_i = 30\mathbf{i} + 40\mathbf{j},$$

$$R = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ N}.$$

iar momentul rezultant

$$\mathbf{M}_o = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 30 & 0 & -40 \end{vmatrix} =$$

$$= 80\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 120\mathbf{j} = 80\mathbf{i}.$$

Calculăm momentul minim:

$$\mathbf{M}_\Delta = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_o}{R^2}\mathbf{R} = \frac{2400}{2500}(30\mathbf{i} + 40\mathbf{j}) = 28{,}8\mathbf{i} + 38{,}4\mathbf{j}.$$

b) Ecuația vectorială a axei centrale este

$$\mathbf{r} = \mathbf{d} + \lambda\mathbf{R},$$

unde

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}}{R^2} = \frac{1}{2500}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 30 & 40 & 0 \\ 80 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3200}{2500}\mathbf{k} = -1{,}28\mathbf{k},$$

iar

$$d = 1{,}28 \text{ m}.$$

Se obține ecuația vectorială a axei centrale

$$\mathbf{r} = \lambda(30\mathbf{i} + 40\mathbf{j}) - 1{,}28\mathbf{k}.$$

Ecuațiile cartezicne ale axei centrale fiind:

$$\frac{Mz - yZ + zY}{X} = \frac{My - zX + xZ}{Y} = \frac{Mz - xY + yX}{Z} = \lambda.$$

se obține:

$$\frac{80 + 40z}{30} = \frac{-30z}{40} = \frac{30y - 40x}{0}.$$

Din prima egalitate, rezultă:

$$3200 + 1600z = -900z; \quad z = -\frac{3200}{2500} = -1{,}28 \text{ m}$$

și reprezintă ecuația unui plan, paralel cu planul xOy.

Scanned with OKEN Scanner

Din ultima egalitate, se deduce

$$4x - 3y = 0,$$

ceea ce reprezintă ecuația unui plan perpendicular pe planul yOz, trecînd prin axa OZ și avînd direcția $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, aceeași cu a vectorului $\mathbf{R}$.

Axa centrală a sistemului de forțe se găsește la intersecția planelor (fig. 1.17, b):

$$x + 1{,}28 = 0, \quad 4x - 3y = 0.$$

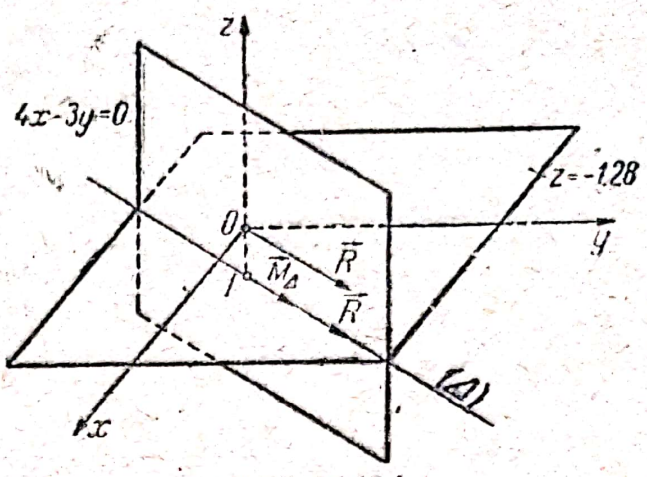


Fig. 1.17. b

1.18. Să se determine forța rezultantă Q ce provine din presiunea apei asupra capacului dreptunghiular (fig. 1.18) al unei ecluze, precum și punctul ei de aplicație.

Rezolvare. În virtutea relației (1.5) forța rezultantă este:

$$Q = p_C A$$

unde A — aria capacului; p_C — presiunea în centrul forțelor elementare paralele:

$$p_C = \gamma y_C = \gamma \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Prin urmare

$$Q = \gamma \frac{b(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{2} = \frac{\gamma b}{2}(y_2^2 - y_1^2).$$

În virtutea relațiilor (1.12) se obține ordonata punctului de aplicație a rezultantei Q:

$$y_P = \frac{\int_{y_1}^{y_2} y^2 dA}{\int_{y_1}^{y_2} y\, dA} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} y^2 dy}{\int_{y_1}^{y_2} y\, dy} = \frac{2}{3}\frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2^2 - y_1^2}.$$

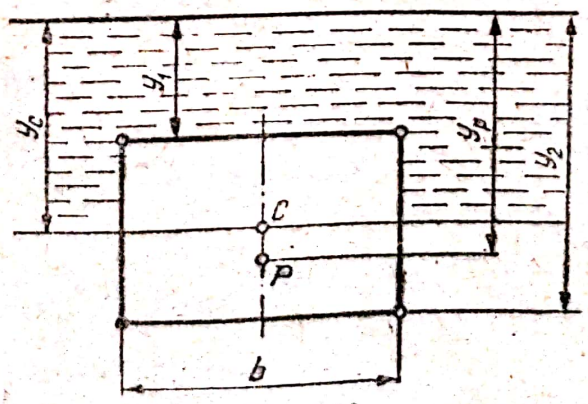


Fig. 1.18

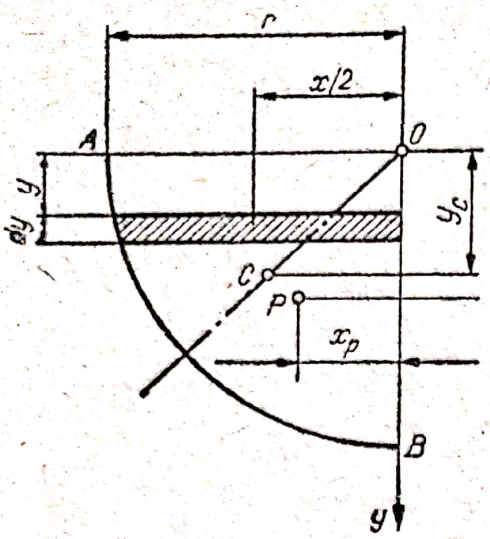


Fig. 1.19

1.19. Un rezervor orizontal avînd secţiunea un sfert dintr-un cerc (fig. 1.19) este umplut cu apă. Să se determine forţa rezultantă Q ce acţionează asupra peretelui OAB al rezervorului, precum şi punctul ei de aplicaţie (centrul de presiune P).

Rezolvare. Ca şi în problema precedentă, modulul forţei rezultante Q se determină cu relaţia

$$Q = p_C \cdot A = \gamma y_C A = \gamma \frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\gamma r^3}{3}$$

iar coordonatele centrului de presiune se obţin, în virtutea relaţiilor (1.12)

$$x_P = \frac{\frac{1}{2}\int xy\, dA}{y_C \cdot A}, \quad y_P = \frac{\int y^2\, dA}{y_C \cdot A}$$

în care

$$\frac{1}{2}\int xy\, dA = \frac{1}{2}\int x^2 y\, dy = \frac{1}{2}\int_0^r (r^2 - y^2)\, y\, dy = \frac{r^4}{8}$$

$$\int y^2\, dA = \int y^2 x\, dy = \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2}\, dy = \frac{\pi r^4}{16}.$$

Prin urmare

$$x_P = \frac{r^4}{8}\frac{3}{r^3} = \frac{3}{8} r = 0{,}375\, r; \quad y_P = \frac{\pi r^4}{16}\frac{3}{r^3} = \frac{3\pi}{16} r = 0{,}589\, r.$$

1.20. Să se determine forţa rezultantă R exercitată pe suprafaţa cilindrică a digului (fig. 1.20) de către apă, precum şi punctul său de aplicaţie. Se cunoaşte raza $r = 4$ m şi lungimea digului $b = 30$ m.

Rezolvare. La adîncimea $h = r \sin \theta$ se exercită pe o suprafaţă elementară $dA = b(r\, d\theta)$ o presiune $p = \rho g h = \rho g r \sin \theta$.

Ca urmare, componentele forţei aplicate pe suprafaţa elementară sînt

$$dX = p\, dA \cos \theta, \quad dY = p\, dA \sin \theta$$

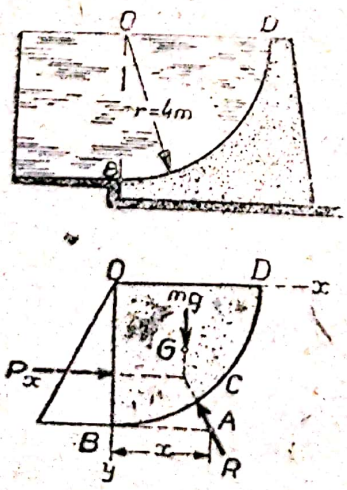


Fig. 1.20

de unde obţinem pentru componentele reacţiunii

$$X = \int_0^{\pi/2} \rho g r^2 b \sin \theta \cos \theta\, d\theta =$$

$$= -\rho g r^2 b \left| \frac{\cos 2\theta}{4} \right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \rho g r^2 b;$$

$$Y = \int_0^{\pi/2} \rho g r^2 b \sin^2 \theta\, d\theta =$$

$$= \rho g r^2 b \left| \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \pi \rho g r^2 b;$$

Scanned with OKEN Scanner

iar reacţiunea $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{1}{2}\rho g r^2 b\sqrt{1 + \pi^2/4}$. Substituind valorile numerice obţinem

$$R = \frac{1}{2}(1{,}00 \cdot 9{,}81 \cdot 4^2 \cdot 30)\sqrt{1 + \pi^2/4} = 4380 \text{ kN}.$$

Avînd în vedere că forţa elementară ce se exercită la adîncimea h este orientată după direcţia presiunii p, deci după rază, momentul rezultant al tuturor forţelor elementare, în raport cu O este nul, iar ecuaţia axei centrale (1.9) se reduce la forma

$$x_1 Y - y_1 X = 0,$$

unde (x_1, y_1) sînt coordonatele punctului A_1 de pe axa centrală. Prin urmare

$$x_1/y_1 = X/Y = \left(\frac{1}{2}\rho g r^2 b\right)\Big/\left(\frac{1}{4}\pi\rho g r^2 b\right) = 2/\pi.$$

Din asemănarea triunghiurilor (fig. 1.20) rezultă:

$$x/r = x_1/y_1 = 2/\pi, \text{ respectiv } x = 2r/\pi = 2 \cdot 4/\pi = 2{,}55 \text{ m}.$$

1.21. Să se determine torsorul de reducere, în punctul A, pentru solicitările aplicate batiului din fig. 1.21.

Rezolvare. Rezultanta forţelor are componentele

$$X = \Sigma X_i = 500 \sin 40° + 700 \sin 60° = 928 \text{ N}$$

$$Y = \Sigma Y_i = 600 + 500 \cos 40° \cos 45° = 871 \text{ N}$$

$$Z = \Sigma Z_i = 700 \cos 60° + 500 \cos 40° \sin 45° = 621 \text{ N},$$

prin urmare

$$\mathbf{R} = 928\mathbf{i} + 871\mathbf{j} + 621\mathbf{k};$$

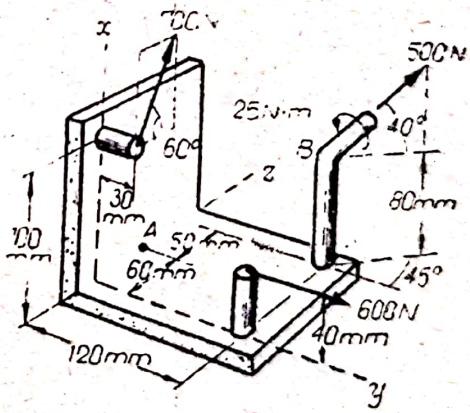
$$R = \sqrt{928^2 + 871^2 + 621^2} = 1416 \text{ N}.$$

Momentele forţelor 500 N, 600 N şi 700 N sînt respectiv

$$\mathbf{M}_{500} = (0{,}08\mathbf{i} + 0{,}12\mathbf{j} + 0{,}05\mathbf{k}) \cdot$$
$$\cdot 500(\mathbf{i} \sin 40° + \mathbf{j} \cos 40° \cos 45° +$$
$$+ \mathbf{k} \cos 40° \sin 45°) =$$
$$= 18{,}95\mathbf{i} - 5{,}59\mathbf{j} - 16{,}90\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_{600} = (0{,}04\mathbf{i} + 0{,}12\mathbf{j} - 0{,}06\mathbf{k}) \cdot 600\mathbf{j} =$$
$$= 0{,}06 \cdot 600\mathbf{i} + 0{,}04 \cdot 600\mathbf{k} =$$
$$= 36\mathbf{i} + 24\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_{700} = (0{,}1\mathbf{i} + 0{,}03\mathbf{j} - 0{,}06\mathbf{k}) \cdot$$
$$\cdot 700(\mathbf{i} \sin 60° + \mathbf{k} \cos 60°) =$$
$$= 10{,}5\mathbf{i} - 71{,}4\mathbf{j} - 18{,}18\mathbf{k}.$$



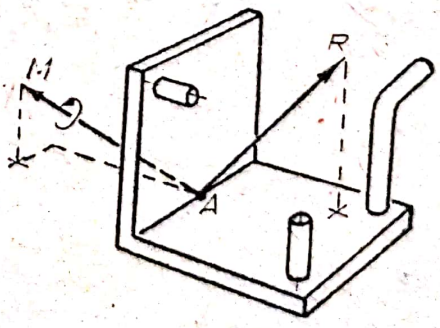


Fig. 1.21

Momentul cuplului aplicat în B are expresia

$$\mathbf{M}' = 25(-\mathbf{i}\sin 40^\circ - \mathbf{j}\cos 40^\circ \cos 45^\circ - \mathbf{k}\cos 40^\circ \sin 45^\circ) =$$
$$= -16{,}07\mathbf{i} - 13{,}54\mathbf{j} - 13{,}54\mathbf{k}$$

Momentul rezultant în punctul A este

$$\mathbf{M} = 49{,}4\mathbf{i} - 90{,}5\mathbf{j} - 24{,}6\mathbf{k}$$

având modulul

$$M = \sqrt{49{,}4^2 + 90{,}5^2 + 24{,}6^2} = 106 \text{ N}\cdot\text{m}$$

1.22. Asupra bielei mecanismului bielă manivelă (fig. 1.22, a) acționează forțele: $F_1 = 2000$ N, $F_2 = 5000$ N, $F_3 = 4000$ N, aplicate în punctele C,D și E. Cunoscînd că: $AB = 200$ mm, $BC = 800$ mm, $BD = 400$ mm, $DE = 100$ mm, să se determine grafic:

a) forța rezultantă a sistemului de forțe;

b) componentele forței rezultante după direcția BC și o direcție perpendiculară la BC;

c) momentul rezultant în B.

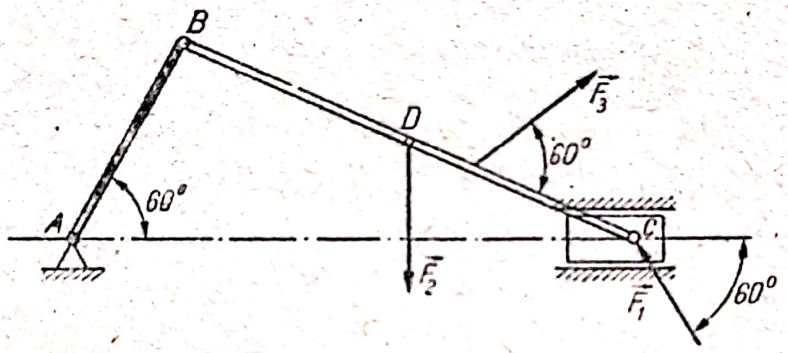


Fig. 1.22 a

Rezolvare. Construcția grafică este redată în figura 1.22, b, unde s-a folosit scara lungimilor, 1 mm = 10 mm și scara forțelor, 1 mm = 100 N.

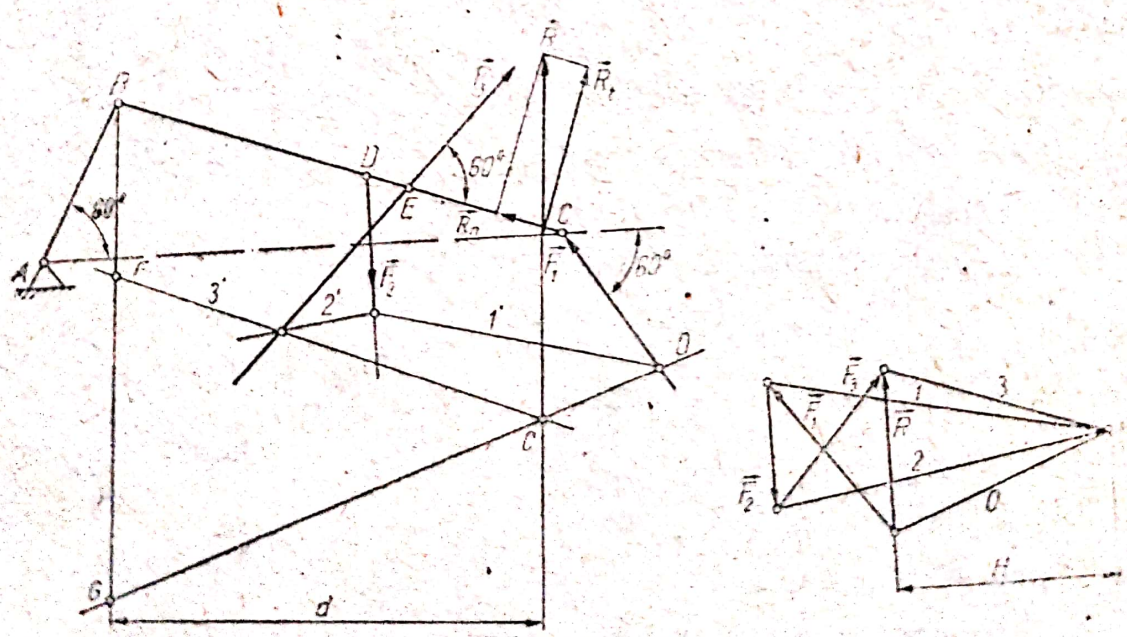


Fig. 1.22 b

Scanned with OKEN Scanner

Se obține grafic:

a) $R = 44{,}5 \cdot 100 = 4450$ N;

b) $R_n = 800$ N, $R_t = 4400$ N;

c) $M_B = (\overline{FG} \cdot 10)(H \cdot 100) = 2 \cdot 660\,000$ N · mm $= 2660$ N · m

1.23. Pe placa superioară a unei ștanțe sînt montate poansoanele de perforare A, B, C, D (fig. 1.23), prin care se transmit respectiv forțele F_1, F_2, F_3 și F_4. Se cere să se determine poziția cepului de prindere; acesta se montează în centrul forțelor paralele, care se determină grafic construind poligonul forțelor și poligonul funicular pentru două direcții ale forțelor rotite cu 90°. Se determină suportul forței rezultante pentru fiecare caz în parte, iar la intersecția acestora se găsește centrul C al forțelor paralele.

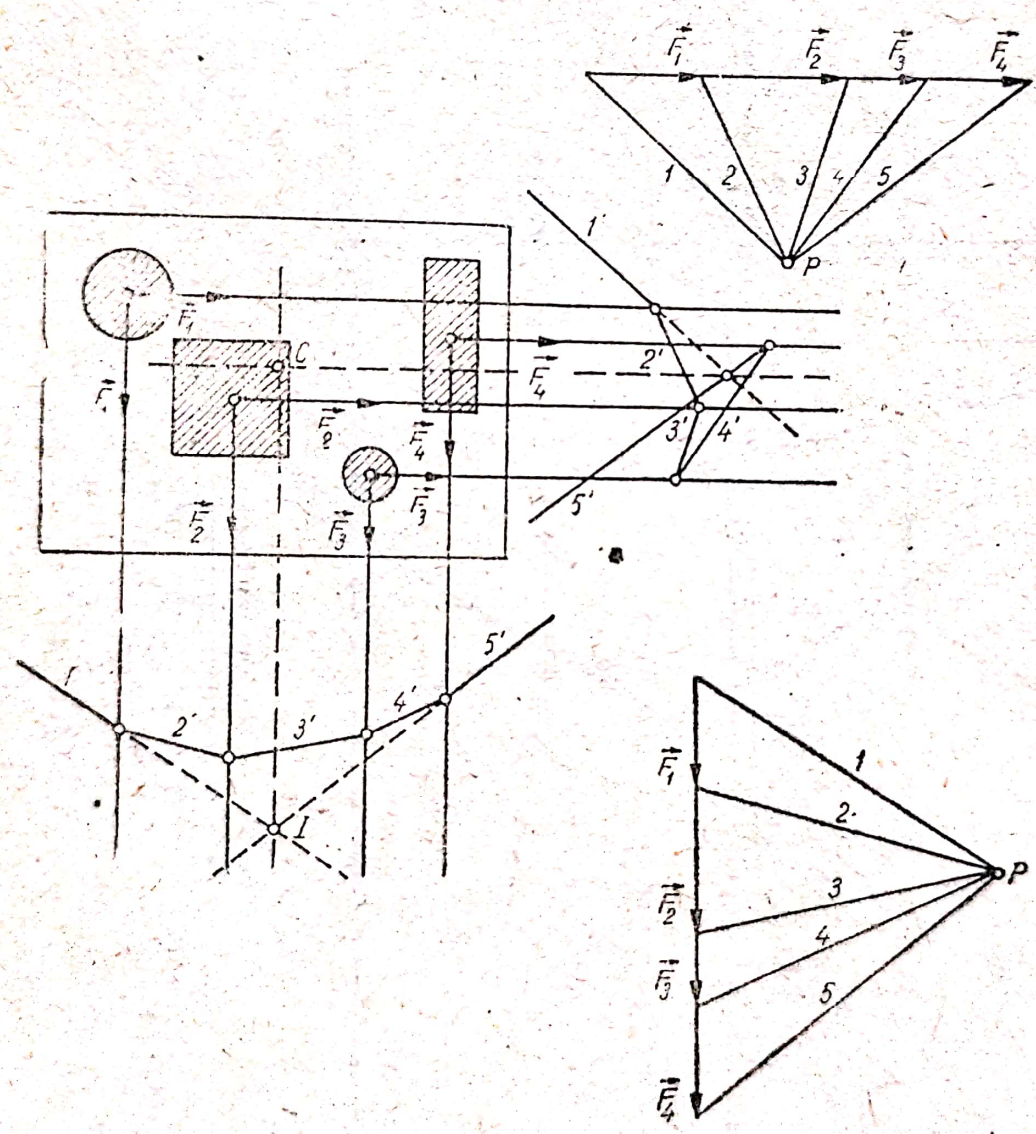


Fig. 1.23

1.24. Asupra grinzii din figura 1.24, acționează forțele $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ și $\mathbf{F_3}$. Cunoscînd $F_1 = 1500$ N, $F_2 = 3000$ N, $\mathbf{F_3} = 1000$ N, $l_1 = 1$ m, $l_2 = 2$ m, $l_3 = 3$ m și deschiderea grinzii $AB = 4$ m, se cere:

a) poziția axei centrale ;

b) să se descompună forța rezultantă după direcțiile paralele ce trec prin punctele A și B ;

c) momentul sistemului de forțe în raport cu punctul B.

Rezolvare. Conform graficului din fig. 1.24 se obține

a) Distanța pînă la axa centrală $d = 1{,}75$ m ;

b) Momentul $M_B = 20000$ N·m, ținînd seama și de scara forțelor, și de cea a lungimilor.

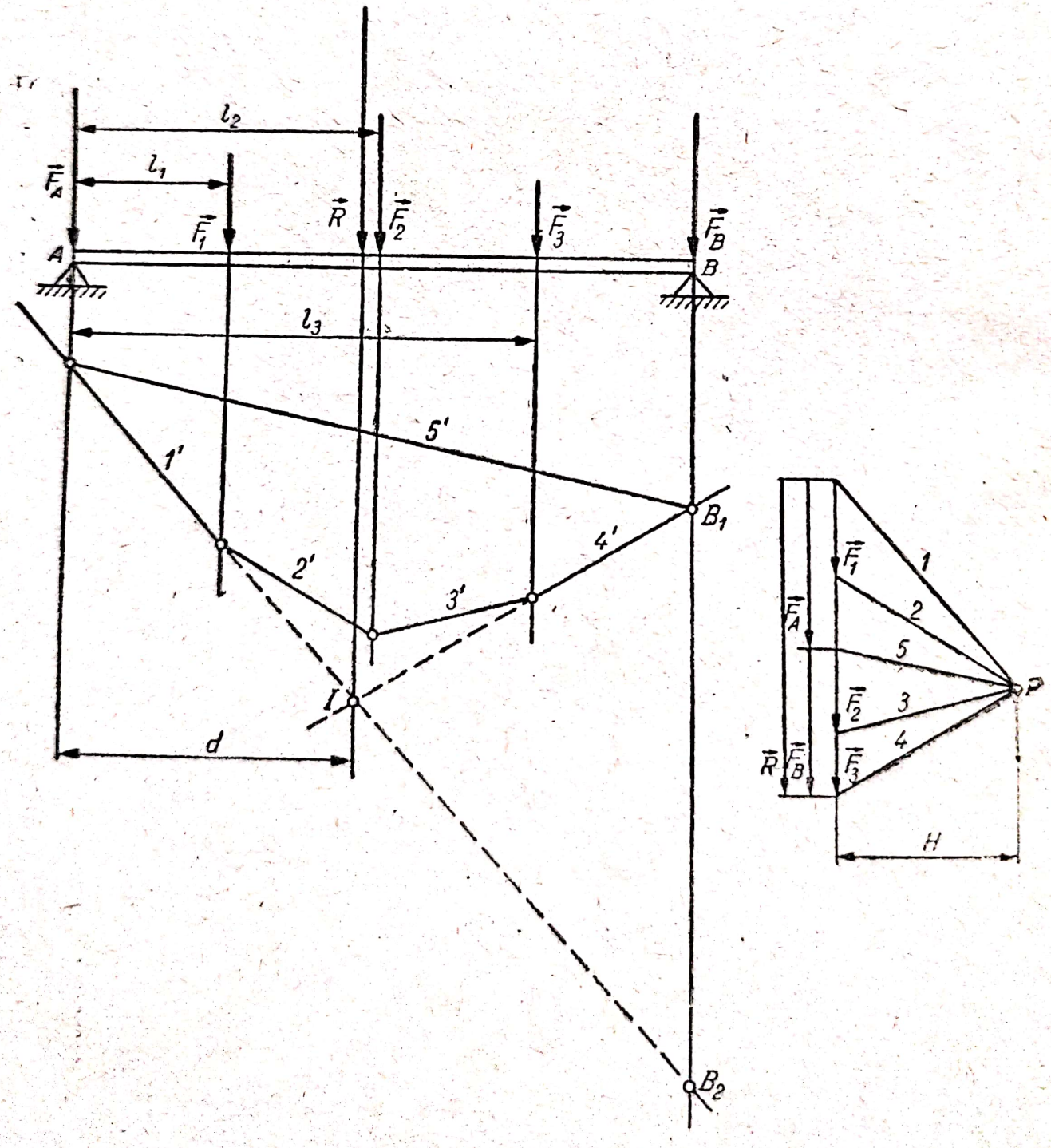


Fig. 1.24

Scanned with OKEN Scanner

C. PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1.25. Asupra unui zid acționează forțele: $F_1 = 4{,}5$ kN, $F_2 = 1$ kN, $F_3 = 20$ kN și $F_4 = 8$ kN ,ca în figura 1.25. Se cere să se determine ecuația axei centrale.

R. $2{,}428y - 25x + 15{,}544 = 0$.

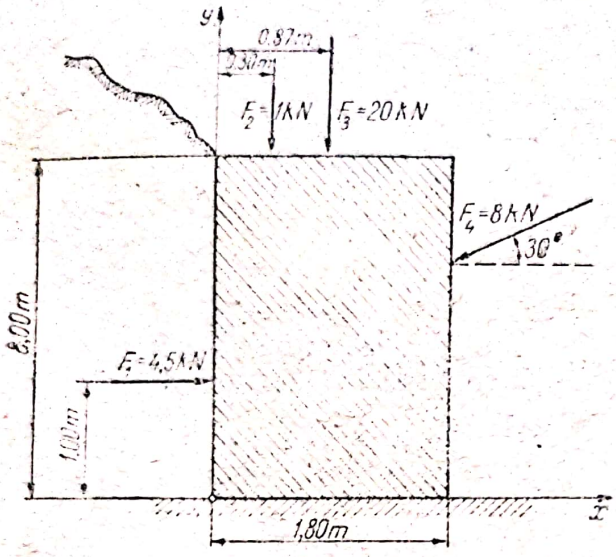


Fig. 1.25

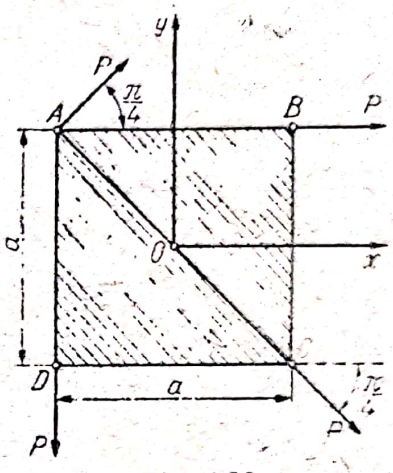


Fig. 1.26

1.26. Asupra unei plăci metalice în formă de pătrat de latură a, acționează patru forțe concurente, conținute în planul plăcii (fig. 1.26). Să se determine elementele torsorului de reducere în raport cu punctul O.

R. Expresia analitică a forței rezultante este:

$$\mathbf{R} = (1 + \sqrt{2})P\mathbf{i} - P\mathbf{j}$$

iar cea a momentului rezultant,

$$\mathbf{M}_{(o)} = -\frac{a\sqrt{2}}{2}P\mathbf{k}.$$

1.27. O sferă de greutate **P** este prinsă cu barele AB, CD și EF, situate în același plan vertical cu centrul sferei și articulate la ambele capete. Să se determine solicitările în bare (fig. 1.27).

R.

$$P_1 = P_2 = \frac{P\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha};$$

$$P_3 = \frac{P}{\sin\alpha + \cos\alpha}.$$

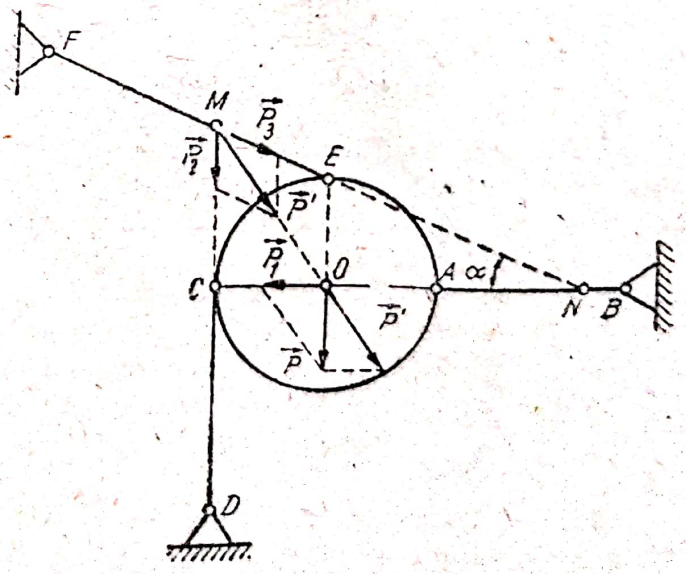


Fig. 1.27

1.28. Să se arate ce cuplu se aplică pe axa roții O_2 a unei

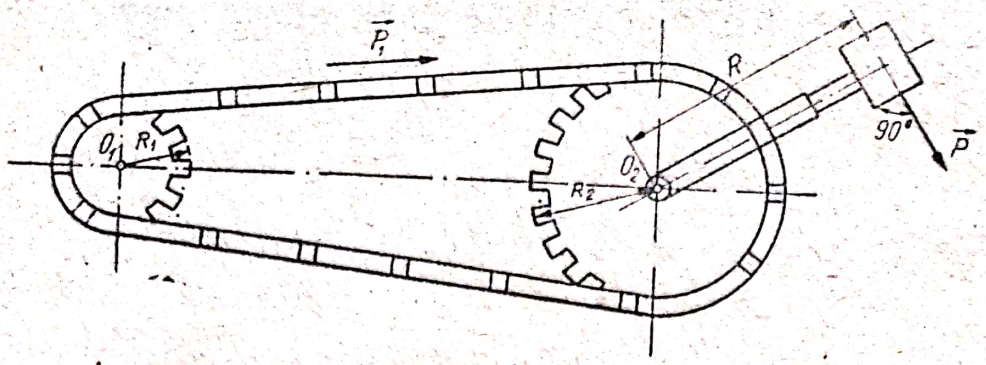


Fig. 1.28

biciclete, dacă se apasă pe pedală cu forța **P**. Transmisia se efectuează cu ajutorul unui lanț sistem Gall (fig. 1.28).

R: $M_2 = R\dfrac{R_2}{R_1}P$.

1.29. Asupra grinzii cotite din fig. 1.29, acționează forțele: $F_1 = 1200$ N, $F_2 = 1000$ N și $F_3 = 1700$ N, concurente în punctul C. Să se afle forța Q ce trebuie aplicată în punctul D (6, 15, 8) astfel încît sistemul $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ și $\mathbf{Q}$ să se reducă la un cuplu.

R. $\mathbf{Q} = 600\mathbf{i} + 1500\mathbf{j}$.

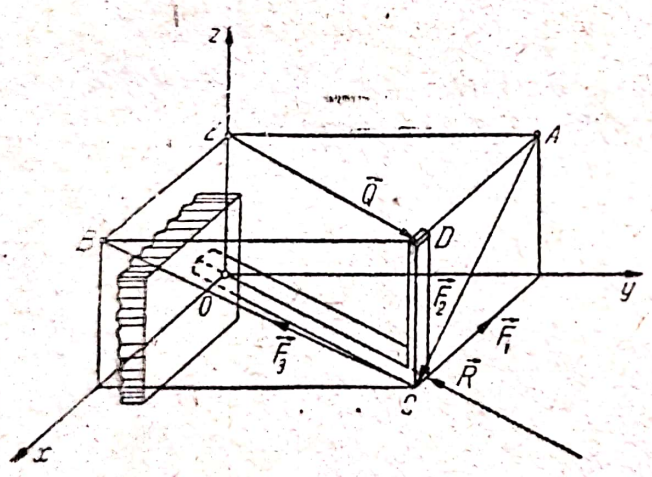


Fig. 1.29

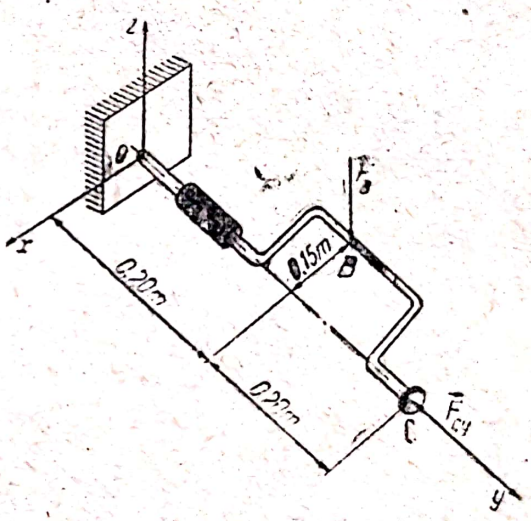


Fig. 1.30

1.30. Cotul unui dispozitiv de găurit (coarbă), situat în planul orizontal xOy este acționat de forța verticală $F_B = 300$ N în punctul B și de forța axială $F_{Cy} = 100$ N, în punctul C. Să se determine:

a) Componentele forței totale aplicată în punctul C, astfel ca dispozitivul să nu se încline față de axele Ox și Oz.

b) Să se reducă forța F_B și forța totală din punctul C, în raport cu punctul O (fig. 1.30).

R. a) $F_{Cx} = 0$; $F_{Cy} = 100$ N; $F_{Cz} = 150$ N.

b) $\mathbf{R} = -100\mathbf{j} - 150\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_{(o)} = -45\mathbf{j}$.

1.31. La strunjirea unei piese cilindrice, asupra cuțitului se exercită trei forțe (fig. 1.31); o forță orizontală $\mathbf{F}_1$ în lungul cuțitului, numită forță de respingere (radială), o forță orizontală $\mathbf{F}_2$ în sens opus avansului

Scanned with OKEN Scanner

cuțitului denumită forță de avans (axială) și o forță verticală de sus în jos, denumită forță principală de așchiere, $\mathbf{F}_3$.

Se cere forța totală de așchiere care se exercită asupra cuțitului, cunoscînd modulele forțelor : $|\mathbf{F}_1| = 350$ daN ; $|\mathbf{F}_2| = 200$ daN ; $|\mathbf{F}_3| = 500$ daN.

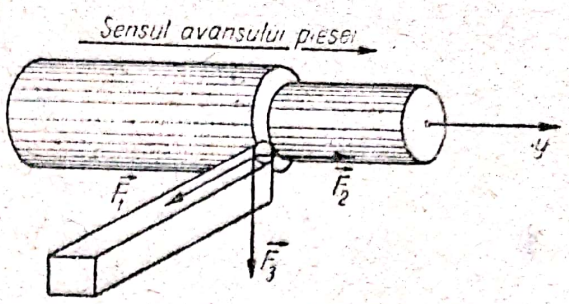


Fig. 1.31

R. $|\mathbf{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \cong 642$ daN

$$\cos \alpha_1 = \frac{F_1}{|\mathbf{R}|} \approx 0{,}545\,; \quad \alpha_1 = 57°$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{F_2}{|\mathbf{R}|} \approx 0{,}312\,; \quad \alpha_2 = 71°50'$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{F_3}{|\mathbf{R}|} \approx 0{,}778\,; \quad \alpha_3 = 38°50'$$

1.32. În figura 1.32 este reprezentată asamblarea unui guseu cu trei profile laminate, care sînt solicitate de către forțele axiale $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, concurente în punctul O. Se cere mărimea și poziția rezultantei acestor forțe, cunoscînd : $F_1 = 2000$ daN, $F_2 = 3000$ daN și $F_3 = 2500$ daN.

R. $R = 822$ daN ; $\alpha \approx 24°$.

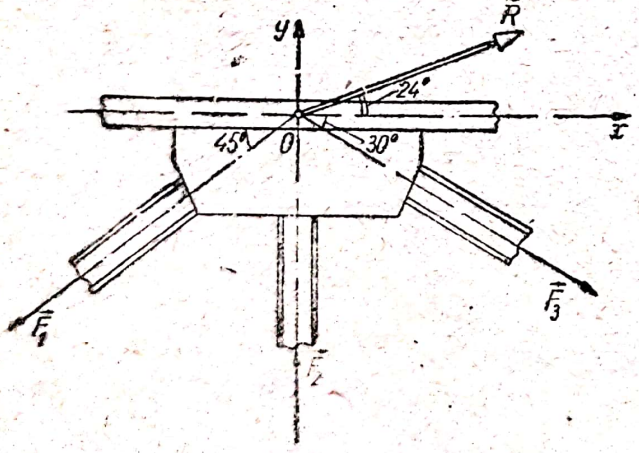


Fig. 1.32

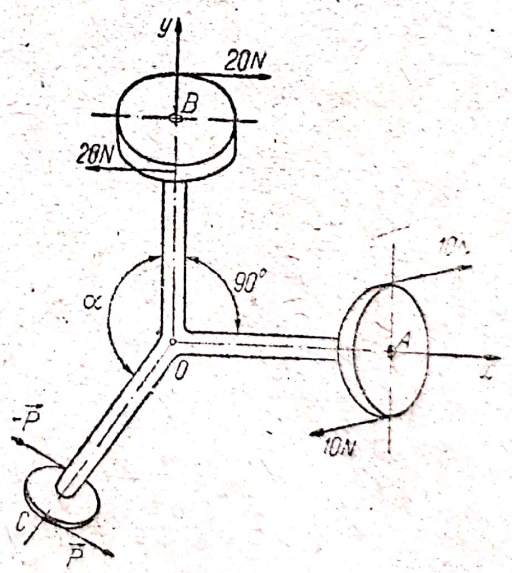


Fig. 1.33

1.33. Trei roți A, B și C, de raze $r_A = 15$ cm, $r_B = 10$ cm, $r_C = 5$ cm, sînt montate pe trei brațe rigide conținute în același plan (fig. 1.33). Dacă asupra roților A și B acționează cuplurile reprezentate în figură, să se determine intensitatea P a forțelor cuplului ce trebuie aplicate roții C, precum și unghiul α, astfel ca momentul rezultant al celor trei cupluri să fie nul.

R. $P = 50$ N ; $\alpha = 143°08'$

1.34. Un panou omogen avînd dimensiunile din figură este deplasat (în timpul montajului) de patru muncitori, care aplică în punctele A,

Scanned with OKEN Scanner

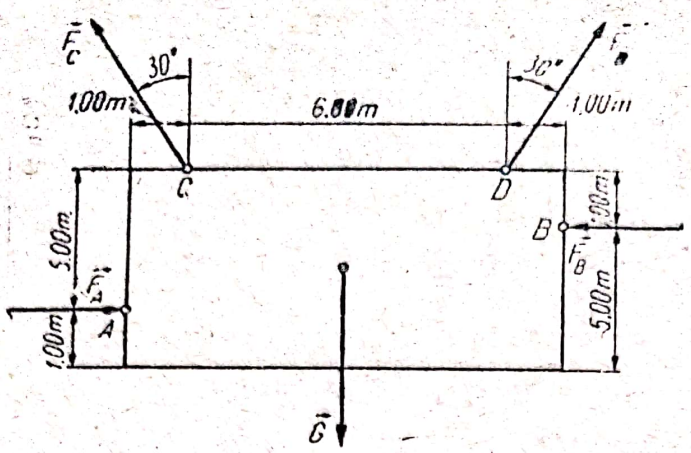


Fig. 1.34

B, C, D forţele $F_A = F_B = 500$ N (orizontale) şi $F_C = F_D = 1200$ N (pe direcţia cablurilor) înclinate faţă de verticală cu 30° ca în figura 1.34.

Să se analizeze efectul pe care-l produce asupra panoului, acţiunea simultană a muncitorilor, dacă greutatea panoului este $1200\sqrt{3}$ N.

R. Sistemul de forţe se reduce la un cuplu de moment $M = 2000$ N·m, care produce rotirea panoului, în planul său vertical, în sens antiorar.

1.35. La capetele unei bare orizontale îndoită în unghi drept se acţionează cu două chei prin care se transmite sistemul de forţe şi cupluri indicate în figură ($F_A = F_B = F_E = F_D = F_H = F_I = 100$ N).

a) Să se reducă sistemul de forţe dat în raport cu punctul C.

b) Să se arate că sistemul de forţe dat poate fi redus la o forţă unică şi să se determine linia de acţiune a acestei forţe (fig. 1.35).

R. a) $\mathbf{R} = -100\mathbf{i} - 100\mathbf{j}$, $(R = 100\sqrt{2}$ N$)$;

$\mathbf{M}_C = -40\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$, $(M_C = 40\sqrt{2}$ N·m$)$

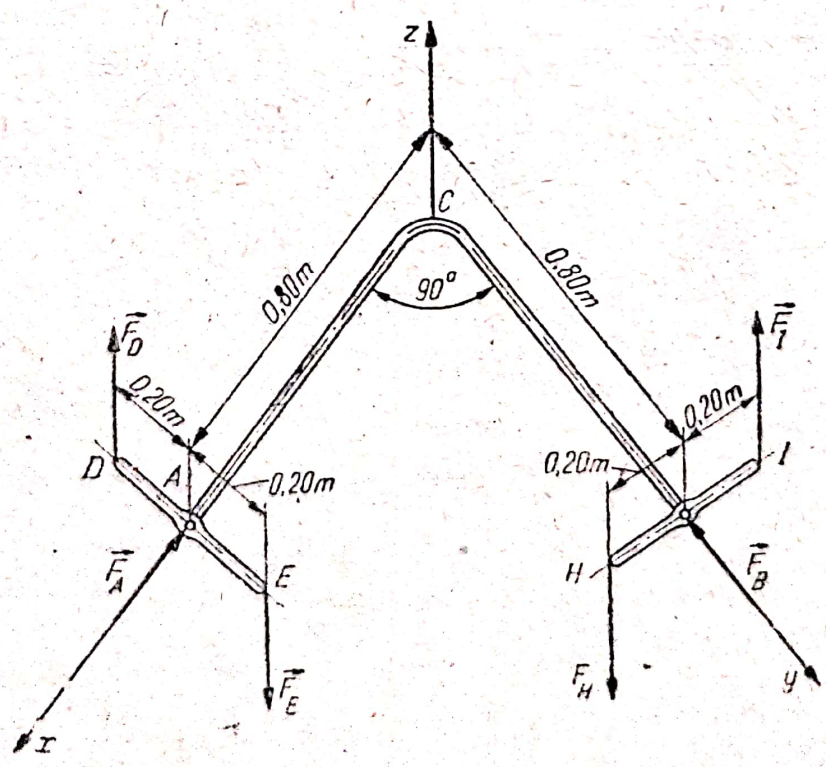


Fig. 1.35

b) Forța rezultantă $\mathbf{R}$, are ca suport o paralelă la bisectoarea planului xOy, situată la cota $z = -0{,}4$ m.

1.36. Asupra unei plăci orizontale, acționează forțele paralele $F_1 = 50$ N, $F_2 = 150$ N, $F_3 = 300$ N, $F_4 = 200$ N, și $F_5 = 200$ N (fig. 1.36).

Să se afle forța rezultantă și centrul forțelor paralele.

R. Forța rezultantă este: $\mathbf{R} = -200\ \mathbf{k}$, iar coordonatele centrului forțelor paralele: $x_C = 0{,}5$ m; $y_C = -6{,}75$ m.

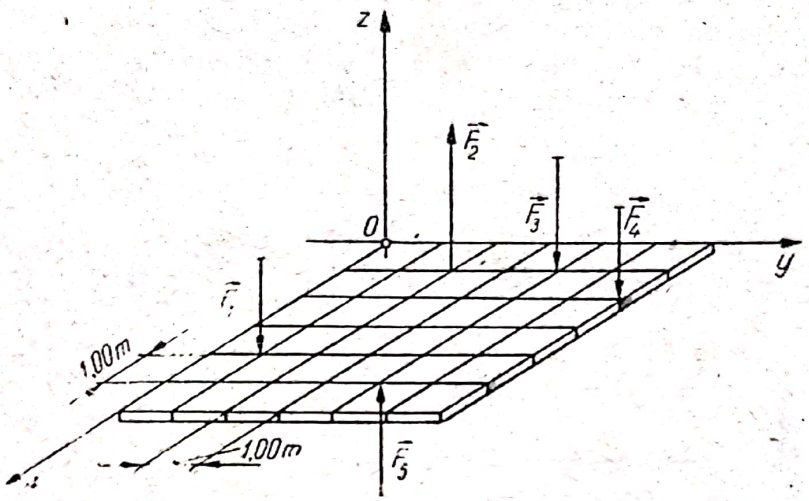


Fig. 1.36

1.37. O macara rotitoare este acționată de forțele din figura 1.37 și de un cuplu $M = 6.000$ daN · m, a cărui axă este dirijată după direcția AB. Se cere să se reducă sistemul de forțe în raport cu punctul A.

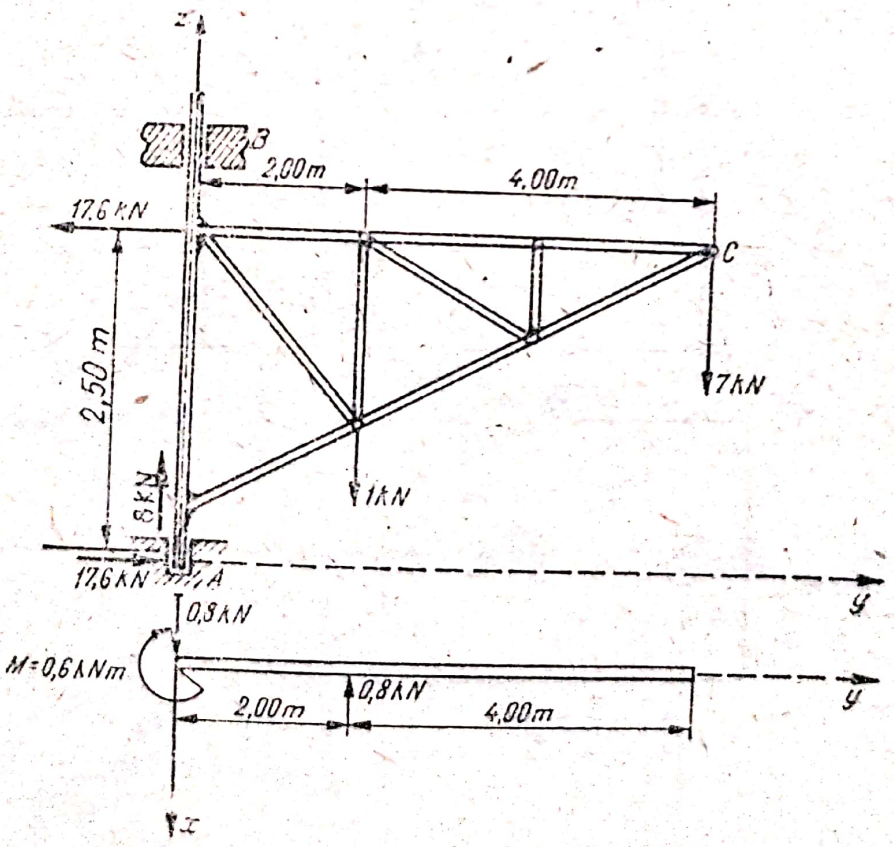


Fig. 1.37

R. $\mathbf{R} = 0$; $\mathbf{M} = 4400$ k. Sistemul de forţe se reduce, deci la un cuplu dirijat după direcţia AB.

1.38. Asupra unei macarale mobile acţionează forţele: G_1 — greutatea macaralei, G_2 — greutatea cabinei şi a contragreutăţii, G_3 — greutatea braţului macaralei, Q — greutatea pe care o ridică braţul macaralei şi presiunea vîntului, p [kN/m²], perpendiculară pe suprafaţa EFE_1F_1 de arie $a \cdot h$. Poziţia forţelor şi dimensiunile macaralei sînt date în figura 1.38. Se cere să se reducă sistemul de forţe în raport cu axele $Oxyz$, a căror poziţie este arătată în figură; să se găsească momentul în raport cu axa BC şi condiţia ca macaraua să nu se răstoarne în jurul acestei axe.

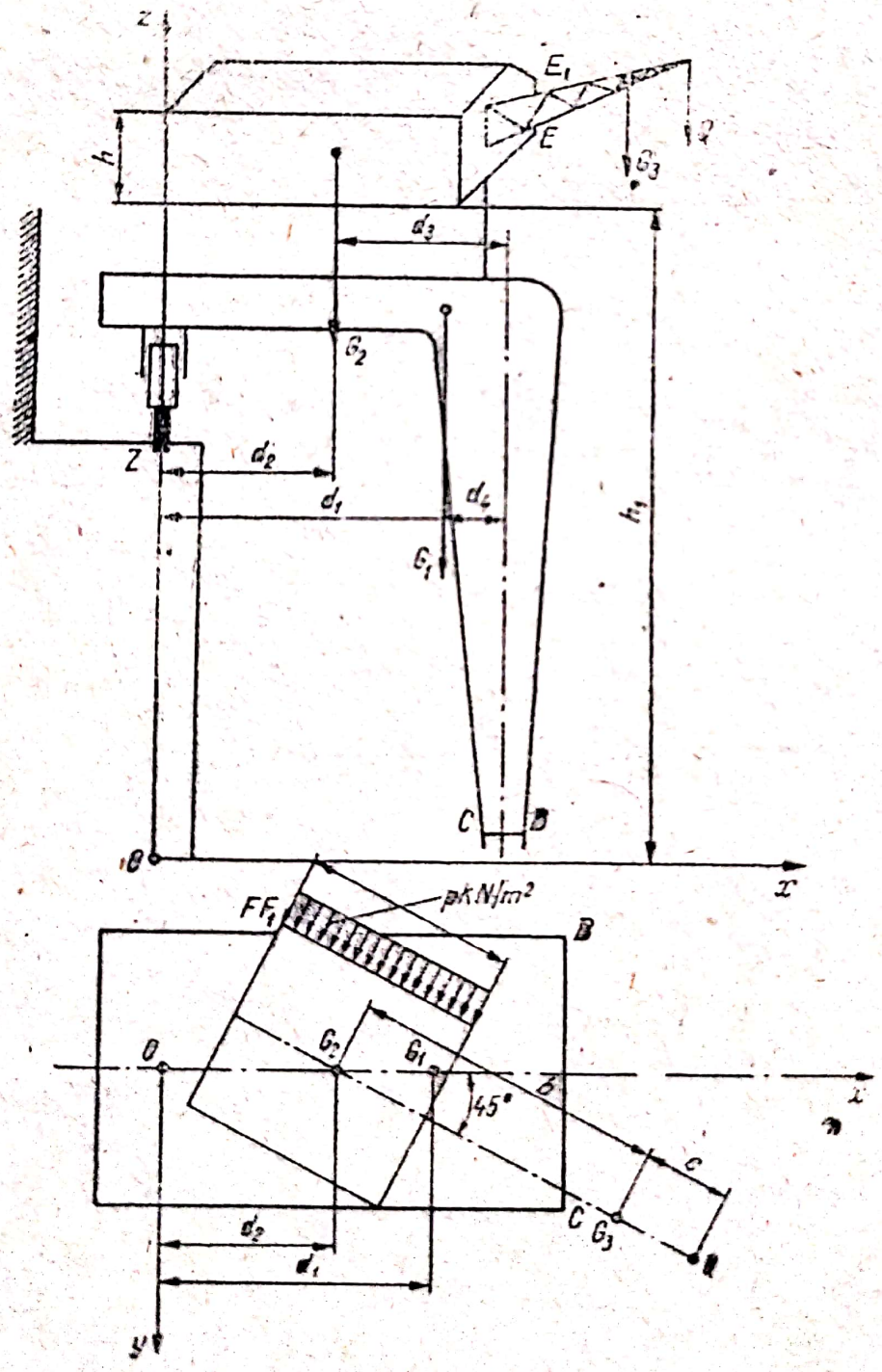


Fig. 1.38

Scanned with OKEN Scanner

R. $X = -pah\frac{\sqrt{2}}{2}$; $Y = pah\frac{\sqrt{2}}{2}$; $Z = -(G_1 + G_2 + G_3 + Q)$

$$M_x = -bG_3 - (b + c)Q\frac{\sqrt{2}}{2} - pah\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{h}{2} + h_1\right)$$

$$M_y = d_1G_1 + G_2d_2 + G_3\left(d_2 + b\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + Q\left(d_2 + b\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - pah\left(\frac{h}{2} + h_1\right);$$

$$M_z = pahd_2\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$M_{BC} = Q\left[(b + c)\frac{\sqrt{2}}{2} - d_3\right] + \left(b\frac{\sqrt{2}}{2} - d_3\right)G_3 - G_1d_4 - G_2d_3 - pah\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{h}{2} + h_1\right).$$

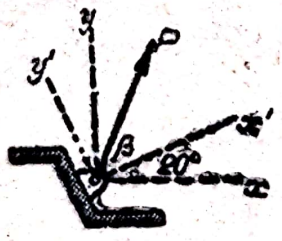
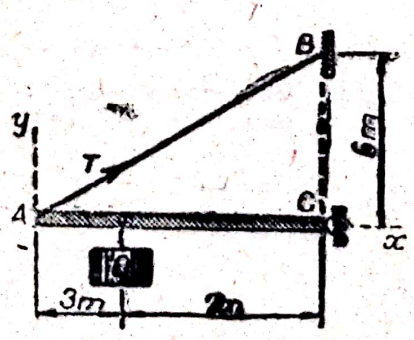
Condiția ca macaraua să nu se răstoarne în jurul axei BC este

$$M_{(BC)} < 0.$$

1.39. Să se rezolve problemele recapitulative din tabelul 1.39.

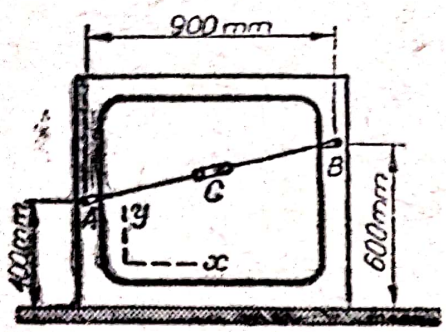
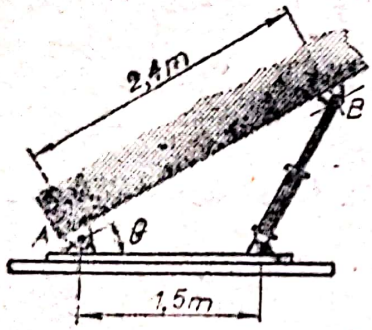
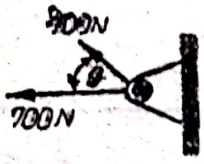
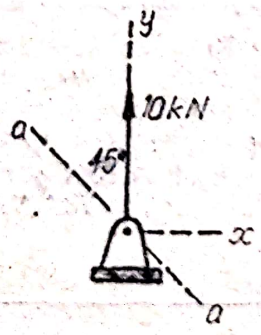
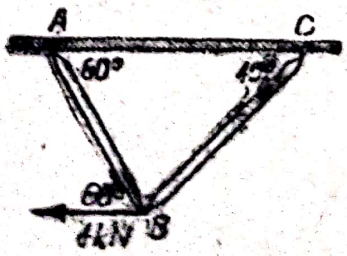
Tabelul 1.39

Probleme recapitulative [26]

Nr. crt.	Figura	Se cunoaște	Să se determine
0	1	2	3
1		Componenta forței P după axa x: $P_x = 500$ N și după axa x': $P_{x'} = 800$ N.	Expresia analitică a forței P în funcție de versorii axelor x și y precum și componenta $P_{y'}$ după axa y'. R. $\mathbf{P} = 500\mathbf{i} + 965\mathbf{j}$ $P_{y'} = 736$ N.
2		$T = 15$ kN	Expresia analitică a vectorului T și mărimea sarcinii Q. R. $\mathbf{T} = 12{,}8\mathbf{i} + 7{,}72\mathbf{j}$. $Q = 11$ kN

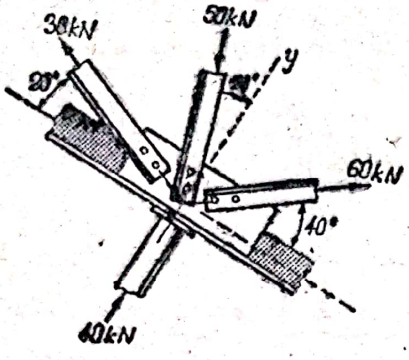
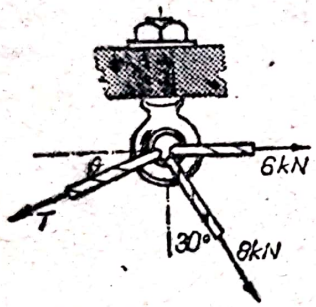
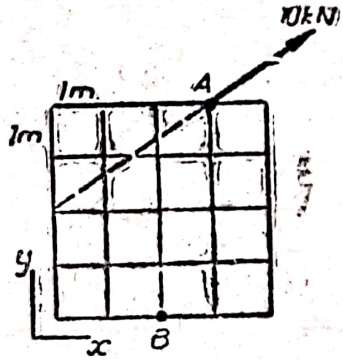
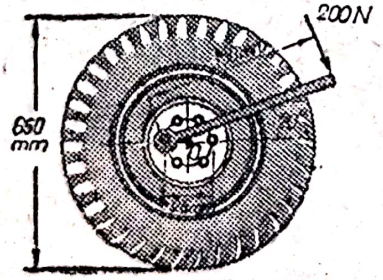
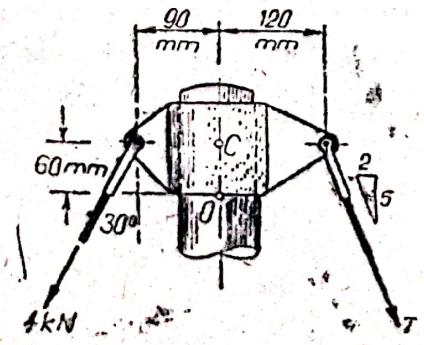
Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.39 (continuare)

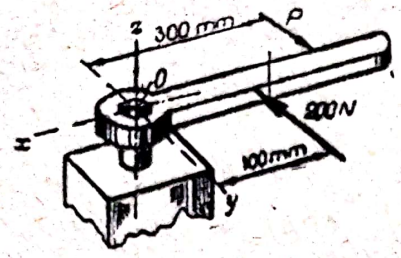
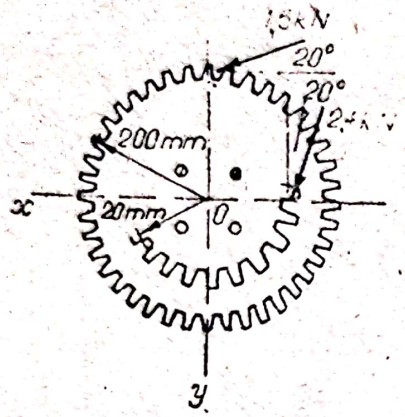
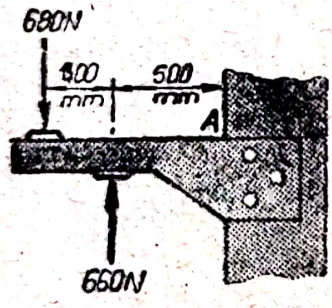
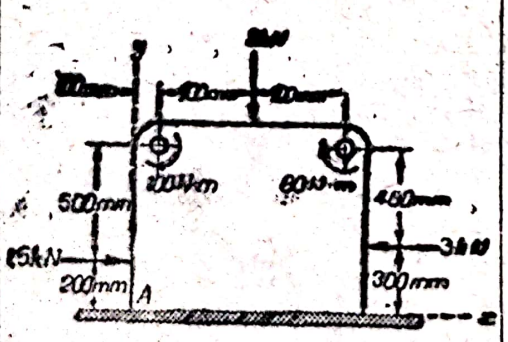
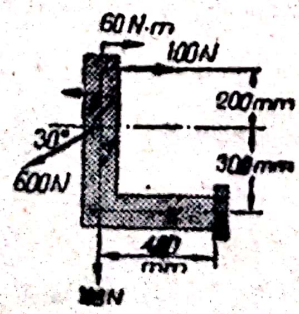
0	1	2	3
3		Efortul de 900 N din cablul AB	Componentele F_x, F_y ale forței ce se aplică în B. R. $F_x = -870$ N $F_y = -195{,}2$ N
4		Forța ce acționează după direcția cilindrului hidraulic: 40 kN și $\theta = 30°$.	Componentele F_t și F_n după direcția AB și normală la AB. R. $F_t = 33{,}2$ kN $F_n = 22{,}2$ kN
5		Rezultanta $R =$ $= 1000$ N a celor două forțe.	Unghiul θ și unghiul β dintre R și orizontală. R. $\theta = 51{,}3°$ $\beta = 18{,}2°$
6		Forța verticală de 10 kN are două componente F_1 după direcția $a-a$ și $F_2 = 8$ kN	Mărimea componentei F_1 și unghiul θ dintre F_2 și axa x. R. $F_1 = 10{,}81$ kN; $\theta = 17{,}1°$ sau $F_1 = 3{,}33$ kN; $\theta = 72{,}9°$
7		Forța orizontală de 4 kN.	Componentele forței de 4 kN după direcțiile AB și BC. R. $F_{AB} = 2{,}93$ kN $F_{BC} = 3{,}59$ kN

Scanned with OKEN Scanner

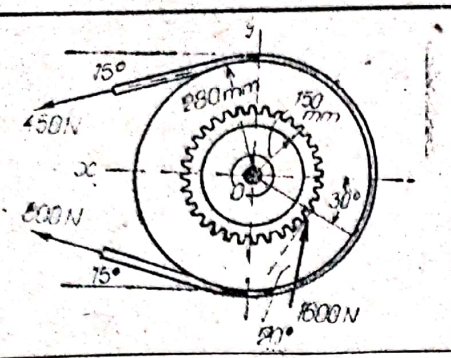
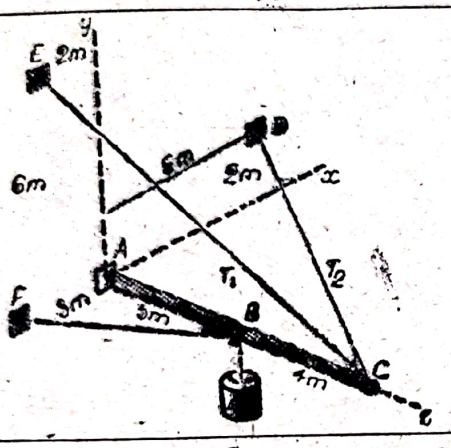
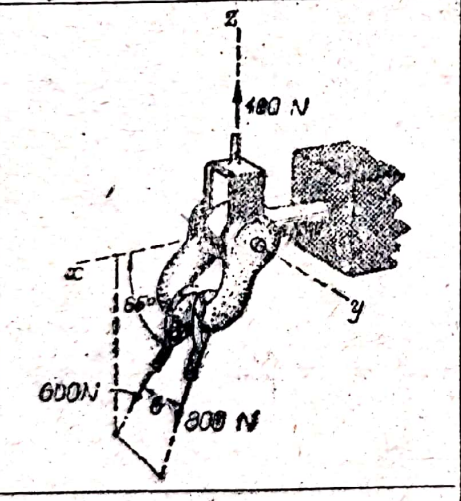
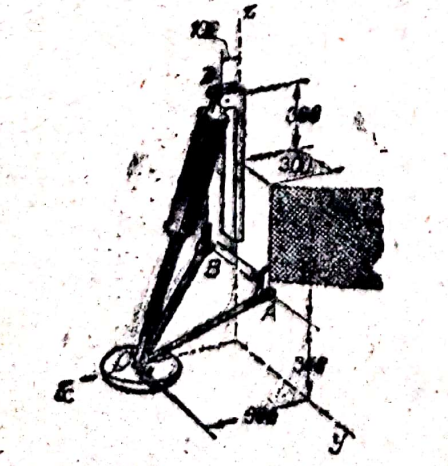
Tabelul 1.39 (continuare)

0	1	2	3
8		Eforturile din bare: 30 kN; 50 kN; 60 kN; 40 kN.	Expresia analitică a rezultantei R, modulul și unghiul θ_x pe care-l face cu axa x. R. $\mathbf{R} = 34\mathbf{i} + 41{,}8\mathbf{j}$ $R = 54{,}5$ kN; $\theta_x = 50{,}2°$
9		Rezultanta de 15 kN verticală și descendentă.	Efortul T și unghiul θ. R. $T = 12{,}85$ kN $\theta = 38{,}9°$
10		O diviziune este egală cu 1 m.	Momentul M_B al forței de 10 kN în raport cu polul B. R. $M_B = 27{,}7$ kN · m. în sens orar.
11		Forța de 200 N aplicată la extremitatea levierului.	Momentul M produs de forță în raport cu centrul O al roții. R. $M = 78{,}3$ N · m
12		Forța de 4 kN care solicită cablul din stînga.	Efortul T astfel ca momentul rezultant în O să fie nul. R. $T = 3{,}23$ kN.

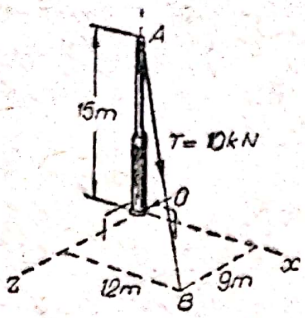
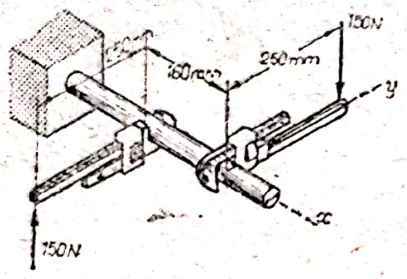
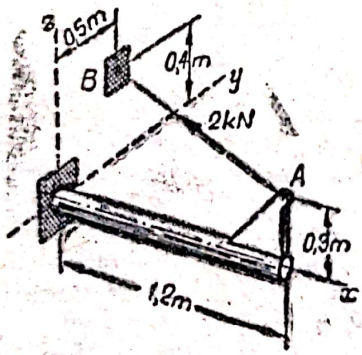
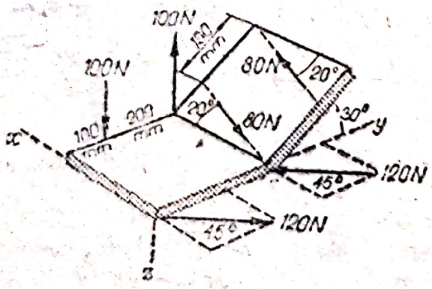
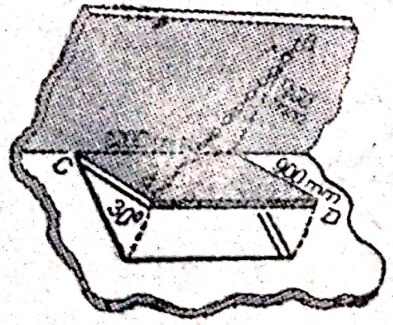
Tabelul 1.39 (continuare)

0	1	3	3
13		Cheia este acționată de forța P și o forță de 200 N.	Expresiile analitice ale forțelor **P** și **R** dacă torsorul de reducere, în O, al forțelor aplicate este $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}\}$ unde $M = 20\,000$ N · m. R. $\mathbf{P} = 40\,\mathbf{j}$; $\mathbf{R} = -160\mathbf{j}$.
14		Cele două roți dințate sînt fixate pe același ax și acționate prin forțele de 1,5 kN și 2,4 kN.	Torsorul de reducere în centrul roților. R. $R = 3{,}56$ kN; $\theta_x = 51{,}1°$ $M = 11{,}28$ N · m în sens trigonometric.
15		Forțele de 680 N și 660 N de sensuri opuse.	Unde acționează rezultanta celor două forțe? R. La 10,7 m în stînga lui A.
16		Forțele de: 1,5 kN; 2 kN; 3 kN și cuplurile de: 100 N · m, 80 N · m.	Expresia analitică a rezultantei R și punctul de intersecție al rezultantei cu axa x. R. $\mathbf{R} = -1{,}5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $x = 290$ mm.
17		Forțele de: 100 N, 600 N, 100 N și cuplul de 60 N · m.	Punctul de intersecție al suportului rezultantei cu axa y. R. $y = 100$ mm

Scanned with OKEN Scanner

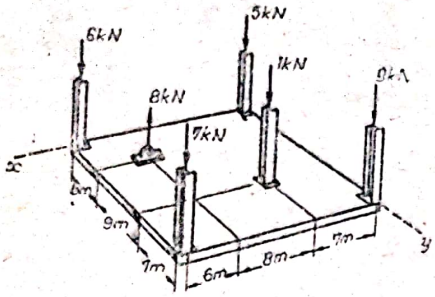
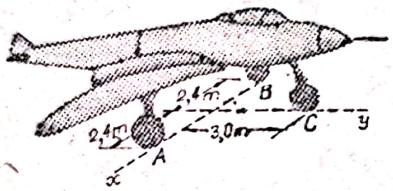
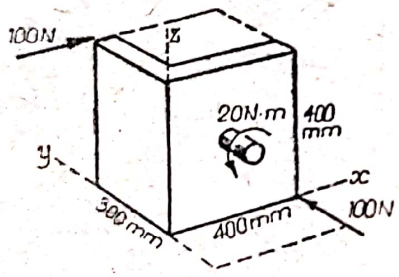
0	1	2	3
18		Eforturile din cureaua trapezoidală: 450 N, 800 N şi forţa aplicată roţii dinţate: 1600 N.	Expresia analitică a rezultantei celor trei forţe. R. $\mathbf{R} = 930\mathbf{i} + 1600\,\mathbf{j}$.
19		Efortul în cablul suport AB este $T = 10$ kN.	Expresia vectorială a efortului T care acţionează asupra barei BC. R. $\mathbf{T} = \frac{10}{\sqrt{389}}(8\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 10\mathbf{k})$
20		Forţa verticală de 400 N. Unghiul dintre planul celor două cabluri şi axa orizontală x de 65° şi eforturile din cele două cabluri: 600 N, 800 N.	— Unghiul θ astfel ca componenta rezultantei celor trei forţe să fie descendentă şi egală cu 750 N. — Modulul rezultantei. — Cosinusurile directoare ale rezultantei. R. $\theta = 33{,}3°$ $R = 1021$ N; $\cos\theta_x = 0{,}525$; $\cos\theta_y = 0{,}430$; $\cos\theta_z = -0{,}734$.
21		Masa de 600 kg a modulului staţiei interplanetare Mars Viking se repartizează uniform pe cele trei picioare ale sale. Acceleraţia gravitaţională $g_M = 3{,}73$ m · s^{-2} la suprafaţa planetei Marte.	Forţele din cele trei braţe ale fiecărui picior cînd modulul se află pe suprafaţa planetei Marte în poziţie orizontală. R. $F_{CB} = 1046$ N, $F_{AC} = F_{CB} = 240$ N.

Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
22		Efortul din cablu $T = 10$ kN	Expresiile analitice ale efortului T și momentului polar M_o, precum și momentul axial M_z al efortului T. R. $\mathbf{T} = 10(0{,}566\mathbf{i} - 0{,}707\mathbf{j} + 0{,}424\mathbf{k})$; $\mathbf{M}_o = 150(0{,}424\mathbf{i} - 0{,}566\mathbf{k})$; $M_z = -84{,}9$ kN · m $\mathbf{M}_z = -84{,}9\mathbf{k}$.
23		Forțele de cite 150 N acționează asupra cheilor franceze.	Expresia analitică a momentului cuplului. R. $\mathbf{M} = -75\mathbf{i} + 22{,}5\mathbf{j}$. în N · m
24		Efortul de 2 kN din cablul AB.	Expresia analitică a efortului și momentul față de axa z. R. $\mathbf{T} = 2(-0{,}92\mathbf{i} + 0{,}383\mathbf{j} + 0{,}077\mathbf{k})$ în kN. $M_z = 0{,}92$ kN · m
25		Trei cupluri formate din trei perechi de forțe egale și opuse.	Expresia analitică a momentului rezultant. R. $\mathbf{M} = -20\mathbf{i} - 6{,}77\mathbf{j} - 37{,}2\mathbf{k}$ în kN · m
26		Efortul de 100 N din lanțul AB, cînd ușa de acces este ținută deschisă la 30°.	Componenta efortului din lanț pe direcția CD și momentul efortului în raport cu axa balamalelor. R. $T_{CD} = 46$ N; $M = 46{,}8$ N · m

Scanned with OKEN Scanner

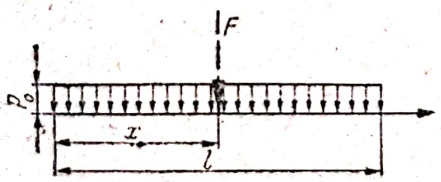
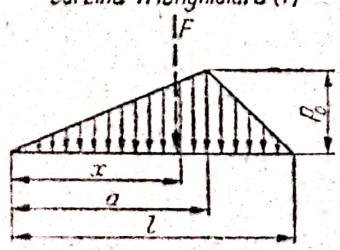
Tabelul 1.39 (continuare)

0	1	2	3
27		Asupra unei plăci de bază acționează șase forțe verticale.	Coordonatele x și y ale punctului în care suportul rezultantei înțeapă placa de bază. $x = 8{,}00$ m, $y = 15{,}95$ m.
28		Repartiția greutății avionului pe cele trei roți: $A = 22$ kN, $B = 22{,}4$ kN, $C = 3{,}43$ kN.	Coordonatele x, y ale centrului de greutate al avionului. R. $x = -0{,}0201$ m $y = 0{,}215$ m.
29		Forțele de cîte 100 N și cuplul de 20 N · m.	Momentul minim al sistemului de solicitări și coordonatele punctului din planul $x - z$, prin care trece axa centrală. R. $\mathbf{M}_{min} = 10(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ $x = 100$ mm $z = 100$ mm.

1.40. Să se rezolve problemele din tabelul 1.40.

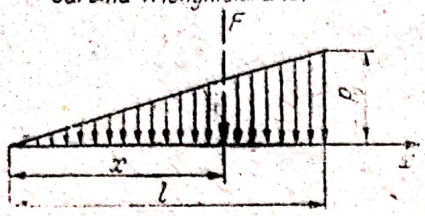
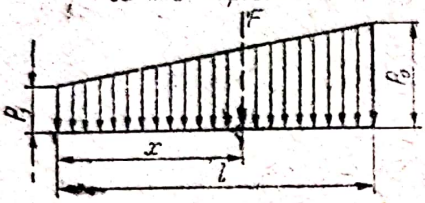
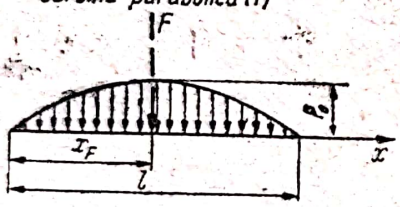
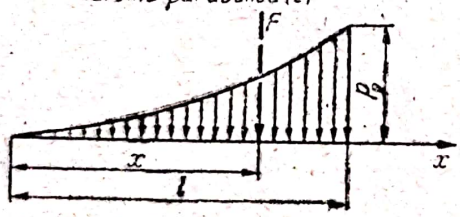
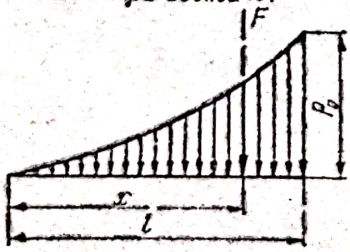
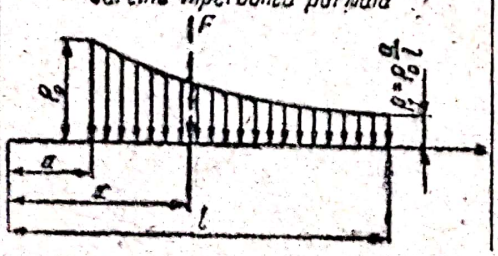
Tabelul 1.40

Sarcini distribuite

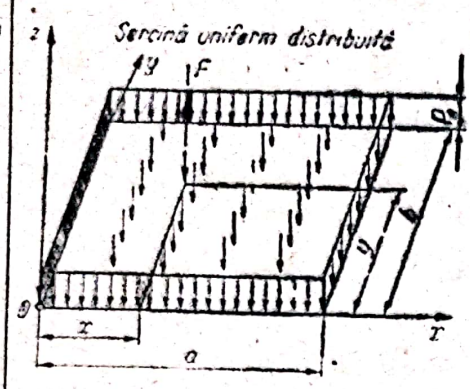
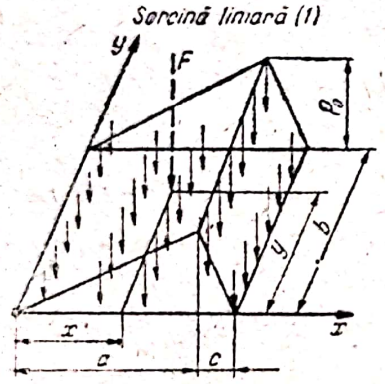
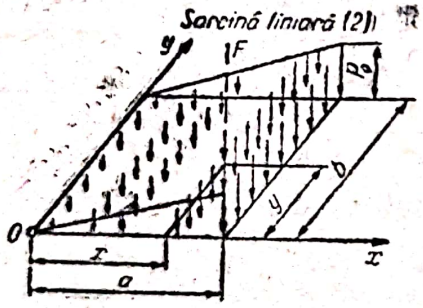
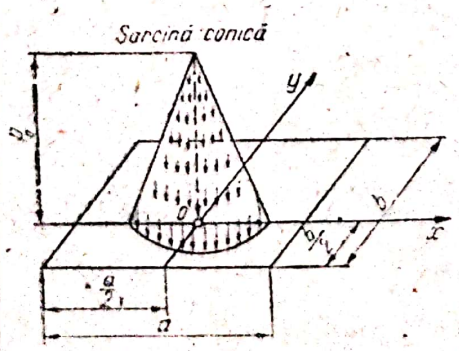
Nr. crt.	Bara și sarcina	$p(x)$	F	x	Observații
0	1	2	3	4	5
1	*Sarcină distribuită* 	p_0	$p_0 l$	$\frac{l}{2}$	
2	*Sarcină triunghiulară (I)* 	$p_0 \frac{x}{l}$ · $(0 \leqslant x \leqslant a)$ $p_0 \frac{x - l}{a - l}$ · $(a \leqslant x \leqslant l)$	$\frac{p_0 l}{2}$	$\frac{a + l}{3}$	

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.40 (continuare)

0	1	2	3	4	5
3	Sarcină triunghiulară (2) 	$\frac{p_0 x}{2}$	$\frac{p_0 l}{2}$	$\frac{2l}{3}$	Caz particular al nr. 2 pentru $a = l$
4	Sarcină trapezoidală 	$p_1 + \frac{p_0 - p_1}{l} x$	$(p_0 + p_1)\frac{l}{2}$	$\frac{2p_0 + p_1}{p_0 + p_1}\frac{l}{3}$	Pentru $p_1 = 0$ se obține cazul nr. 3
5	Sarcină parabolică (1) 	$\frac{4p_0 x}{l} - \frac{4p_0 x^2}{l^2}$	$\frac{2}{3} p_0 l$	$\frac{l}{2}$	Curba de încărcare este o parabolă de gradul doi
6	Sarcină parabolică (2) 	$\frac{p_0}{l^2} x^2$	$\frac{p_0 l}{3}$	$\frac{3l}{4}$	Curba de încărcare este o parabolă de gradul al doilea, tangentă în capătul din stînga
7	Sarcină parabolică (3) 	$\frac{p_0}{l^3} x^3$	$\frac{p_0 l}{4}$	$\frac{4l}{5}$	Curba de încărcare este o parabolă de gradul al treilea tangentă barei în capătul din stînga
8	Sarcină hiperbolică parțială 	$p_0 \frac{a}{x}$	$p_0 a \ln \frac{l}{a}$	$\frac{l - a}{\ln \frac{l}{a}}$	

Scanned with OKEN Scanner

Nr. crt.	Placa şi sarcina	$p(x, y)$	F	X	Y	Observaţii
9		p_0	p_0ab	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	
10		$p_0 \frac{x}{a}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ $p_0 \frac{x-c}{a-c}$ $(a \leqslant x \leqslant a+c)$	$\frac{(a+c)b}{2} p_0$	$\frac{2a+c}{3}$	$\frac{b}{2}$	
11		$p_0 \frac{x}{a}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$	$p_0 \frac{ab}{2}$	$\frac{2a}{3}$	$\frac{b}{2}$	Caz particular al nr. 10 pentru $c = 0$
12		$\frac{p_0}{R}\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right)$ $-R \leqslant x \leqslant R$ $-R \leqslant y \leqslant R$	$\frac{R^2 p_0}{3}$	0	0	

Scanned with OKEN Scanner

2
Centre de greutate

A. DEFINIȚII ȘI PROBLEME

2.1. Centre de masă

Dacă un rigid, de masă m, poate fi descompus într-un număr finit de porțiuni simple, de mase m_i ($i = \overline{1, n}$) cu centrele de masă G_i determinate prin vectorii $\mathbf{r}_i$ în raport cu polul O invariabil legat de corp (fig. 2.a), atunci vectorul de poziție al centrului de masă G al întregului corp este dat în relația

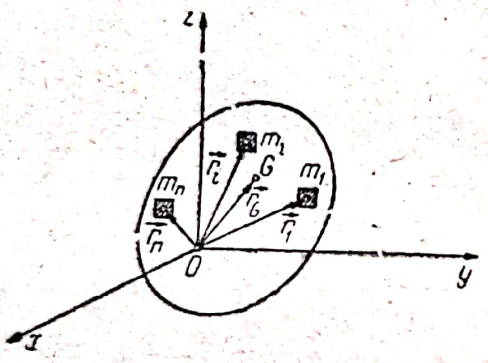


Fig. 2 a

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{2.1}$$

Observații. 1) În cazul corpurilor omogene, prin simplificarea densității, în locul maselor m_i din (2.1) intervin volumele V_i, ariile A_i sau lungimile L_i corespunzătoare maselor m_i distribuite spațial, pe suprafețe sau pe linii, rezultînd relațiile

$$\mathbf{r}_G = \frac{\Sigma V_i \mathbf{r}_i}{\Sigma V_i}, \quad \mathbf{r}_G = \frac{\Sigma A_i \mathbf{r}_i}{\Sigma A_i}, \quad \mathbf{r}_G = \frac{\Sigma L_i \mathbf{r}_i}{\Sigma L_i} \tag{2.2}$$

care, proiectate pe axele unui reper ortonormat furnizează coordonatele centrelor de masă ale corpurilor omogene respective.

2) Relațiile (2.1) și (2.2) sînt valabile și dacă unele mase parțiale, respectiv volume sau arii parțiale, sînt extrase dintr-un corp, cu condiția de a atribui semnul (—) maselor, volumelor sau ariilor extrase.

3) Proprietatea 2 se poate extinde în cazul unui sistem material (S) obținut prin asamblarea rigidă a mai multor corpuri. Fiecare corp va putea fi considerat, într-un astfel de caz, ca un subsistem (S_i) al lui (S).

În cazul unui sistem discret de puncte materiale, vectorul rezultant al acestui sistem, reprezentînd greutatea totală a sistemului, acționează în centrul G al vectorilor paraleli, numit centru de greutate sau centru de masă al sistemului, al cărui vector de poziție față de un pol O, are expresia

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{2.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (2.3) se obțin coordonatele centrului de masă al sistemului, în raport cu un sistem de referință trirectangular drept, avînd originea în polul O

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \\ \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \\ \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

2.2. Determinarea grafică a centrului de masă al unui sistem de puncte materiale

Pentru determinarea grafică a centrului de masă se consideră un sistem de puncte materiale A_1, A_2, A_3, avînd respectiv masele m_1, m_2, m_3 și vectorii de poziție $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ față de un punct O (fig. 2.b). Notînd masa întregului sistem cu $m = \sum_i m_i$, în virtutea relației (2.3) rezultă expresia

$$m\mathbf{r}_G = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3,$$

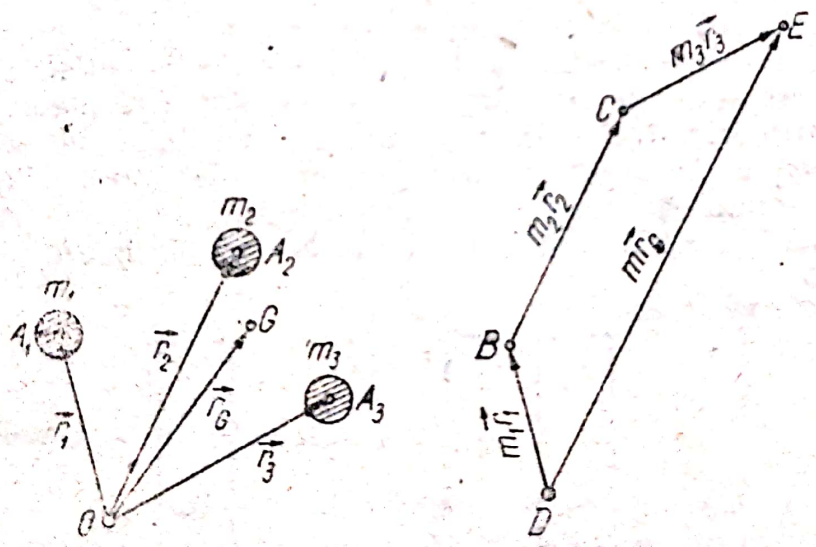


Fig. 2 b

care se interpretează grafic. În acest scop se construiește poligonul vectorial, pentru vectorii din dreapta egalității, din care se obține vectorul rezultant $m\mathbf{r}_G = \mathbf{DE}$.

Din punctul O se duce o paralelă la $\mathbf{DE}$; pe această dreaptă se găsește centrul de masă G la distanța $\overline{OG} = r_G$. Segmentul $\overline{OG}$ se determină împărțind modulul rezultantei prin masa m

$$\overline{OG} = \frac{|m\mathbf{r}_G|}{m} \tag{2.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

2.3. Momente statice

Mărimea vectorială

$$\mathbf{S}_o = \int_{(S)} \mathbf{r}\, dm = m\mathbf{r}_G \tag{2.6}$$

se numeşte „moment static al rigidului în raport cu polul O" (fig. 2.a). Pentru $\mathbf{S}_o = \mathbf{0}$, din (2.6) rezultă $\mathbf{r}_G = \mathbf{0}$, ceea ce arată că momentul static al rigidului în raport cu centrul de masă ($O \equiv G$) este nul. Proiecţiile momentului static polar $\mathbf{S}_0$, pe axele unui sistem de referinţă invariabil legat cu rigidul, au expresiile

$$\begin{bmatrix} S_{yOz} \\ S_{zOx} \\ S_{xOy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{(S)} x\, dm \\ \int_{(S)} y\, dm \\ \int_{(S)} z\, dm \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

unde x, y şi z sînt proiecţiile vectorului de poziţie $\mathbf{r}$ al masei elementare dm, iar x_G, y_G, z_G — coordonatele centrului de masă faţă de reperul considerat.

Mărimile scalare (2.7) se numesc „momente statice planare", în raport cu planele reperului cartezian, deoarece conţin distanţele de la masa elementară, respectiv de la centrul de masă la aceste plane.

În particular, dacă masa rigidului este distribuită într-un singur plan, fie de exemplu planul yOz, proiecţiile momentului static polar $\mathbf{S}_o$, pe axele Oy şi Oz se numesc „momente statice axiale", deoarece conţin distanţele de la masa elementară, respectiv de la centrul de masă, la aceste axe şi se notează

$$\begin{bmatrix} S_y \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{(S)} z\, dm \\ \int_{(S)} y\, dm \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} z_G \\ y_G \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

2.4. Determinarea grafică a momentului static axial

Să considerăm sistemul de puncte $A_1, \ldots, A_4$ sedii ale maselor discrete $m_1, \ldots, m_4$ (fig. 2.c). Momentul static al acestor mase în raport cu o axă (Δ) conţinută în planul sistemului de puncte este

$$S_\Delta = m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3 + m_4 d_4$$

unde $d_1, \ldots, d_4$ sînt distanţele de la punctele sistemului la axa (Δ).

Scanned with OKEN Scanner

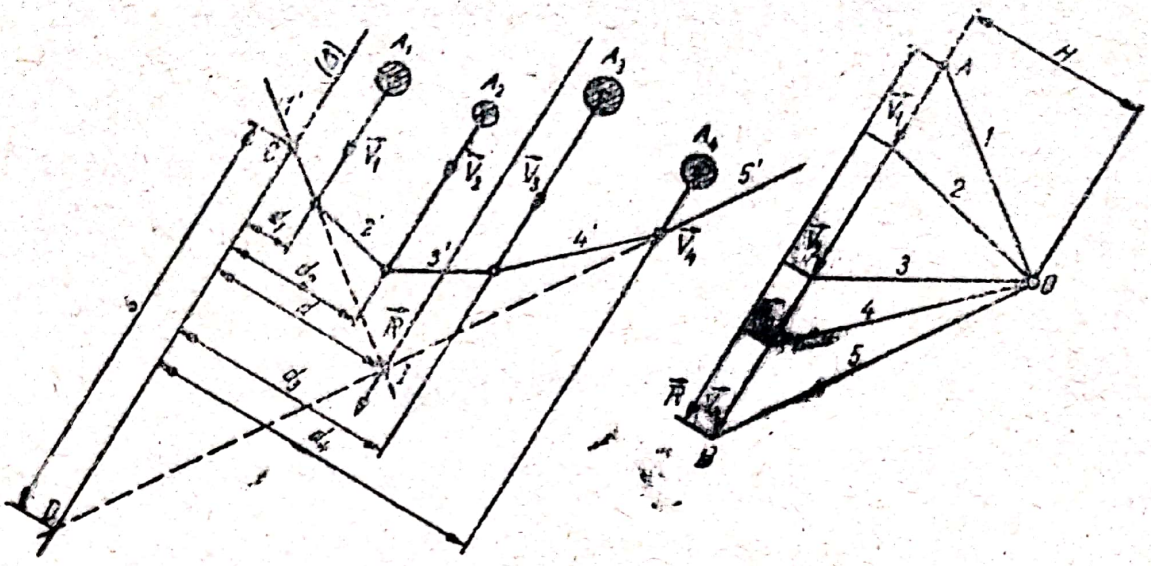


Fig. 2 e

Pentru determinarea grafică a momentului static S_Δ se consideră vectorii $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_4$, paraleli cu axa (Δ) avînd mărimile proporționale cu masele $m_1, \ldots, m_4$. Dacă μ este factorul de proporționalitate, avem

$$V_i = \mu m_i, \quad (i = \overline{1,4}).$$

Se construiește poligonul vectorial cu distanța polară H și poligonul funicular 1′, 2′, 3′, 4′. Se prelungesc laturile 1′, și 4′ pînă cînd intersectează axa (Δ), determinîndu-se astfel segmentul „s".

Momentul static al sistemului de mase $m_1, \ldots, m_4$ în raport cu axa (Δ) va fi

$$S_\Delta = s \cdot H, \tag{2.9}$$

unde „H" se măsoară la scara vectorilor $\mathbf{V}_i$ (în unități de masă), iar „s" la scara lungimilor.

De remarcat că această metodă grafică se aplică și în cazul corpurilor cu masa distribuită într-un singur plan.

2.5. Teoremele Pappus-Guldin.

Teorema I: aria suprafeței generate de o curbă plană care se rotește în jurul unei axe din planul său, pe care nu o intersectează, este egală cu produsul dintre lungimea curbei și lungimea cercului descris de centrul de greutate al ei, adică

$$A = 2\pi x_G \cdot L = 2\pi S_y \tag{2.10}$$

unde x_G este abscisa centrului de greutate al curbei și S_y — momentul static al curbei plane, în raport cu axa Oy.

Dacă curba este compusă din curbe simple, aria suprafeței generate de ea va fi dată de relația

$$A = 2\pi \Sigma x_i L_i. \tag{2.11}$$

Teorema II: volumul generat de o suprafață plană care se rotește în jurul unei axe din planul său, pe care nu o intersectează, este egal cu

produsul dintre aria suprafeței și lungimea cercului descris de centrul de greutate al ei; prin urmare

$$V = 2\pi x_G A = 2\pi S_y \tag{2.12}$$

unde x_G este abscisa centrului de greutate al suprafeței, iar S_y — momentul static al suprafeței plane față de axa Oy.

Dacă suprafața generatoare este compusă din suprafețe simple, relația (2.12) se va scrie sub forma

$$V = 2\pi \Sigma x_i A_i. \tag{2.13}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

2.1. Să se determine coordonatele centrului maselor pentru sistemul celor cinci mase din figura 2.1.

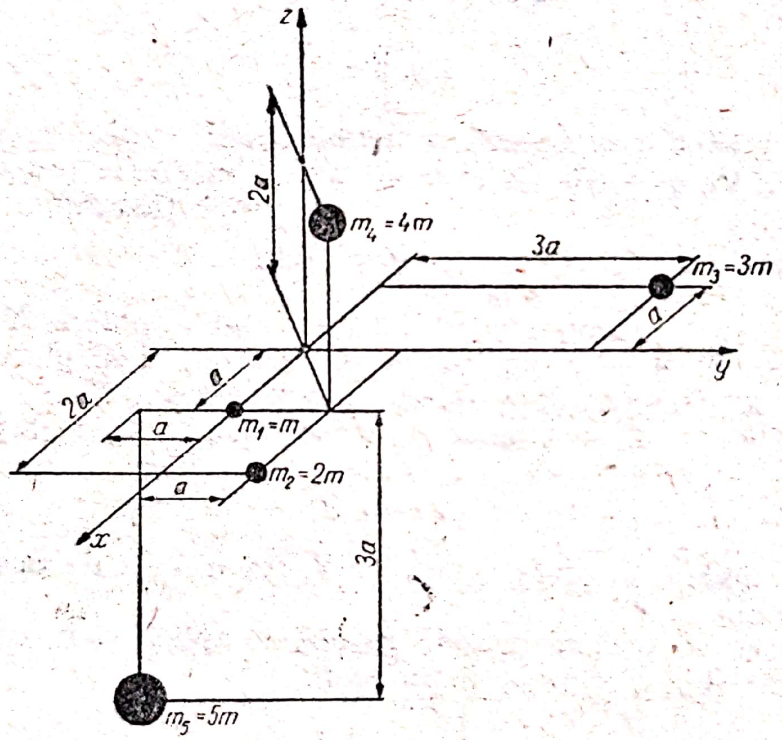


Fig. 2.1

Rezolvare. Se aplică relațiile (2.4), pe baza datelor din figura 2.1, unde x_i, y_i și z_i reprezintă coordonatele centrelor de masă parțiale, iar $m_i x_i$, $m_i y_i$ și $m_i z_i$ momentele statice planare în raport cu planele yOz, xOz, și xOy. Rezultă

$$x_G = \frac{\sum_1^5 m_i x_i}{\sum_1^5 m_i} = \frac{11am}{15m} = 0{,}733a \qquad y_G = \frac{\sum_1^5 m_i y_i}{\sum_1^5 m_i} = \frac{10am}{15m} = 0{,}66a$$

$$z_G = \frac{\sum_1^5 m_i z_i}{\sum_1^5 m_i} = \frac{-7am}{15m} = -0{,}466a.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.2. Să se determine masa unei plăci pătrate de latură a, dacă densitatea plăcii este proporțională în fiecare punct cu distanța acestui punct la vîrful O al pătratului și egală cu ρ_0 în centrul pătratului.

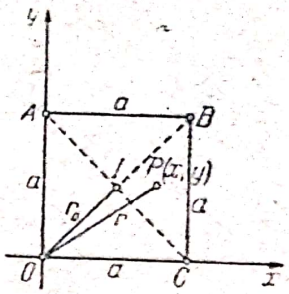


Fig. 2.2

Rezolvare. Se utilizează relația masei

$$M = \iint_{(A)} \rho \, dx \, dy$$

în care $\rho = kr$, r fiind distanța de la un punct oarecare $P(x, y)$ al plăcii la vîrful acesteia O (fig. 2.2); prin urmare

$$\rho = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Cunoscînd că masa în centrul pătratului este ρ_0, rezultă:

$$\rho_0 = kr_0 = ka\frac{\sqrt{2}}{2}$$

de unde

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2a}\rho_0.$$

Prin urmare

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2a}\rho_0\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Relația masei devine, deci

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2a}\rho_0\int_0^a dx\int_0^a \sqrt{x^2 + y^2}\,dy = \frac{\sqrt{2}}{2a}\rho_0\int_0^a\left[\frac{y}{2}\sqrt{x^2 + y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^2}{2}\ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]\Bigg|_0^a dx = \frac{\sqrt{2}}{2a}\rho_0\int_0^a\left[\frac{a}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x^2}{2}\ln\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right]dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2a}\rho_0\left\{\frac{a}{2}\int_0^a\sqrt{x^2 + a^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^a x^2\ln\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2a}\rho_0\left\{\frac{a}{2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\ln\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} + \frac{a}{3}\cdot\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right]\right\}_0^a =$$

$$= \frac{\rho_0 a^2}{3}\left[2 + \sqrt{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right].$$

2.3. O macara rotitoare are forma și dimensiuile din figura 2.3. Presupunînd că barele au aceeași greutate pe metru de lungime, se cere să se determine centrul de greutate al părții mobile a macaralei.

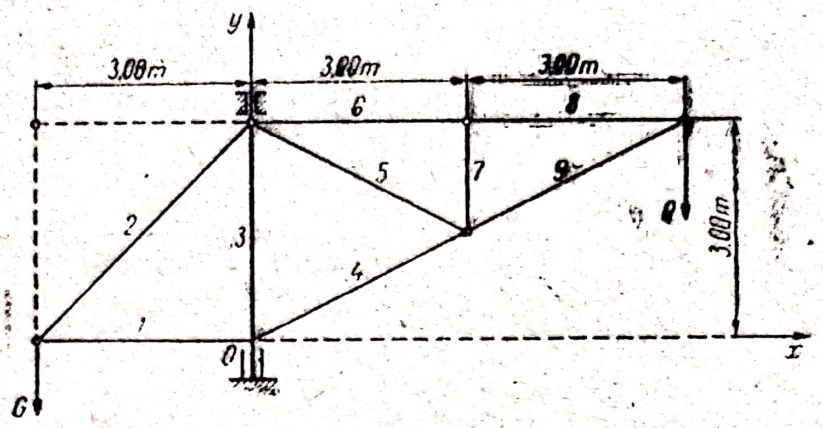


Fig. 2.3

Rezolvare. Alegem sistemul de axe ca în figură și efectuăm un calcul tabelar. Rezultă coordonatele centrului de greutate

$$x_G = \frac{\sum_1^9 x_i L_i}{\sum_1^9 L_i} = \frac{56{,}74}{27{,}78} = 2{,}04 \text{ m}; \quad y_G = \frac{\sum_1^9 y_i L_i}{\sum_1^9 L_i} = \frac{49{,}82}{27{,}78} = 1{,}79 \text{ m}.$$

2.4. Să se afle centrul de greutate al secțiunii transversale a unei mese, ale cărei dimensiuni sînt date în fig. 2.4.

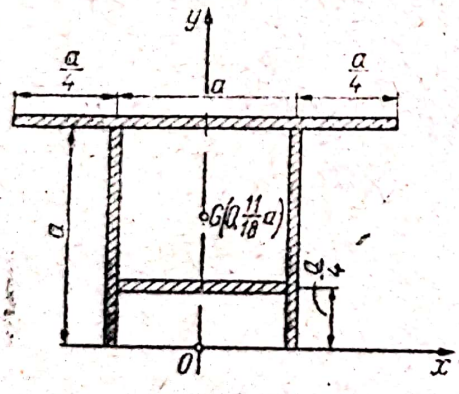


Fig. 2.4

Rezolvare. Axa Oy fiind axă de simetrie, rezultă că $x_G = 0$. Determinăm ordonata centrului de greutate al secțiunii; avem

$$y_G = \frac{\sum_1^3 y_i L_i}{\sum_1^3 L_i}.$$

Observînd că

$$y_1 = \frac{a}{4}, \; L_1 = a; \quad y_2 = \frac{a}{2}, \; L_2 = 2a; \quad y_3 = a, \; L_3 = \frac{3a}{2}$$

rezultă

$$y_G = \frac{\frac{a}{4} \cdot a + \frac{a}{2} \cdot 2a + a \cdot \frac{3a}{2}}{a + 2a + \frac{3a}{2}} = \frac{11}{18} a.$$

Centrul de greutate al secțiunii transversale a mesei se află, deci, în punctul $G\left(0, \frac{11}{18} a\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

2.5. Să se determine poziția centrului de greutate al ancorei omogene din figura 2.5.

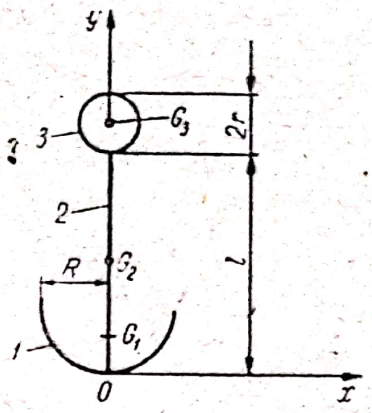


Fig. 2.5

Rezolvare. Deoarece ancora are ca axă de simetrie axa Oy, centrul de greutate se va găsi pe această axă și, prin urmare, $x_G = 0$. Coordonata y_G se obține efectuînd un calcul tabelar. Ținînd seama că ancora se poate descompune în semicercul ①, de lungime $L_1 = \pi R$, avînd centrul de greutate $G_1\left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$ (ordonata punctului G_1 s-a luat din tabelul 2.5), bara ② de lungime $L_2 = l$ și cu centrul de greutate în $G_2\left(0, \frac{l}{2}\right)$ și cercul ③ de lungime $L_3 = 2\pi r$, avînd centrul de greutate în punctul $G_3(0, l + r)$. Cu aceste valori formăm tabelul 2.5. Rezultă

$$y_G = \frac{\sum_1^3 y_i L_i}{\sum_1^3 L_i} = \frac{2R^2 + \frac{l^2}{2} + 2\pi r(l + r)}{\pi R + l + 2\pi r} = \frac{4R^2 + l^2 + 4\pi r(l + r)}{2(\pi R + l + 2\pi r)}.$$

Tabelul 2.5

Nr. corpului	Y_i	L_i	$Y_i L_i$
1	$\frac{2R}{\pi}$	πR	$2R^2$
2	$\frac{l}{2}$	l	$\frac{l^2}{2}$
3	$l + r$	$2\pi r$	$2\pi r(l + r)$
Σ		$\pi(R + 2r) + l$	$2R^2 + \frac{l^2}{2} + 2\pi r(l+r)$

2.6. Să se determine coordonatele centrului de greutate ale barei omogene spațiale $ABOCD$, din figura 2.6.

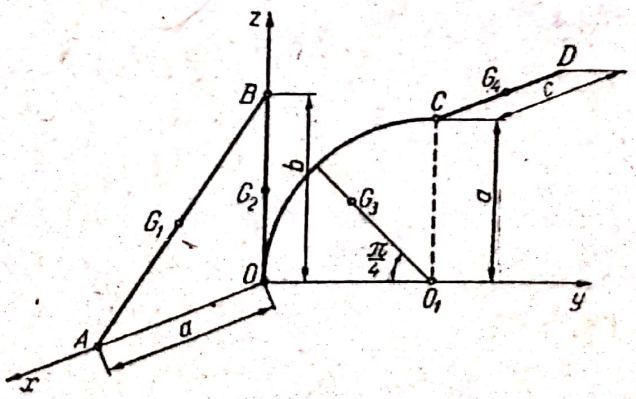


Fig. 2.6

R e z o l v à r e. Se descompune bara omogenă $ABOCD$ în barele componente: AB, BO, OC și CD, avînd lungimile $l_1 = AB = \sqrt{a^2 + b^2}$; $l_2 = BO = b$; $l_3 = \widehat{OC} = \frac{\pi a}{2}$; $l_4 = CD = c$. Centrele de greutate ale barelor componente au următoarele coordonate

$$G_1\left(x_1 = \frac{a}{2};\ y_1 = 0;\ z_1 = \frac{b}{2}\right);\ G_2\left(x_2 = 0;\ y_2 = 0,\ z_2 = \frac{b}{2}\right);$$

$$G_4\left(x_4 = -\frac{c}{2};\ y_4 = a;\ z_4 = a\right).$$

Pentru determinarea coordonatelor centrului de greutate G_3, se ține seama de faptul că elementul OC are forma unui sfert de cerc, pentru care distanța O_1G_3 se determină cu relația

$$O_1G_3 = a\frac{\sin\alpha}{\alpha} = a\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}a}{\pi}.$$

Coordonatele punctului G_3 au, deci, valorile

$$x_3 = 0;\ y_3 = a - O_1G_3\cos\frac{\pi}{4} = a - \frac{2\sqrt{2}a}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = a\left(1 - \frac{2}{\pi}\right);$$

$$z_3 = O_1G_3\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2a}{\pi}.$$

Coordonatele centrului de greutate al barei spațiale au valorile

$$x_G = \frac{\sum_1^4 x_iL_i}{\sum_1^4 L_i} = \frac{\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{c^2}{2}}{\sqrt{a^2+b^2} + b + \frac{\pi a}{2} + c} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2} - c^2}{\pi a + 2\left(b + c + \sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

$$y_G = \frac{\sum_1^4 y_iL_i}{\sum_1^4 L_i} = \frac{\frac{\pi a^2}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + ac}{\sqrt{a^2+b^2} + b + \frac{\pi a}{2} + c} = \frac{a^2(\pi - 2) + 2ac}{\pi a + 2\left(b + c + \sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

$$z_G = \frac{\sum_1^4 z_iL_i}{\sum_1^4 L_i} = \frac{\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \frac{b^2}{2} + a^2 + ac}{\sqrt{a^2+b^2} + b + \frac{\pi a}{2} + c} = \frac{2a(a + c) + b\left(b + \sqrt{a^2+b^2}\right)}{\pi a + 2\left(b + c + \sqrt{a^2+b^2}\right)}.$$

2.7. Să se determine centrul de greutate al arcului de cicloidă:

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta)$$

cuprins între primele două puncte ale cicloidei așezate pe axa Ox (fig. 2.7) (cicloida este curbă tehnică utilizată în construcția de mașini).

Scanned with OKEN Scanner

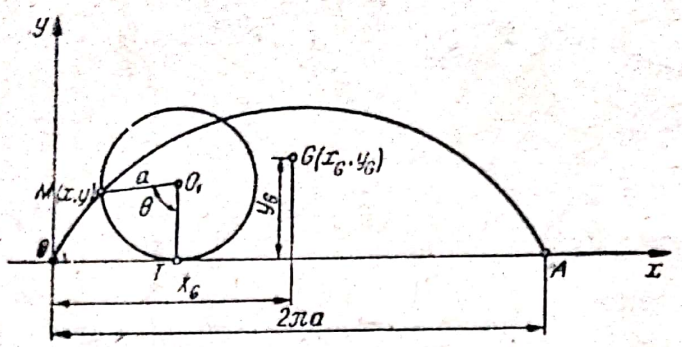


Fig. 2.7

Rezolvare. Abscisa centrului de greutate rezultă imediat, fiind la mijlocul distanței OA

$$x_G = \frac{OA}{2} = \frac{2\pi a}{2} = \pi a.$$

Determinăm ordonata centrului de greutate al cicloidei cu ajutorul formulei

$$y_G = \frac{\int y\,dL}{\int dL}$$

Calculăm elementul de arc dL; avem

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = a\sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} =$$

$$= a\sqrt{2(1 - \cos\theta)}\,d\theta = 2a \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta.$$

Ținînd seama că $y = a(1 - \cos\theta)$, rezultă

$$y_G = \frac{2a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos\theta)\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta}{2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta} = \frac{2a\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\theta}{2}\,d\theta}{-2\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}} = \frac{2a\int_0^{2\pi}\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta}{-2(\cos\pi - \cos\theta)} =$$

$$= \frac{a}{2}\left[\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta - \int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta\right] = \frac{a}{2}\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{4a}{3}.$$

Prin urmare, coordonatele centrului de greutate ale unei bucle de cicloidă sînt

$$x_G = \pi a;$$

$$y_G = \frac{4a}{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

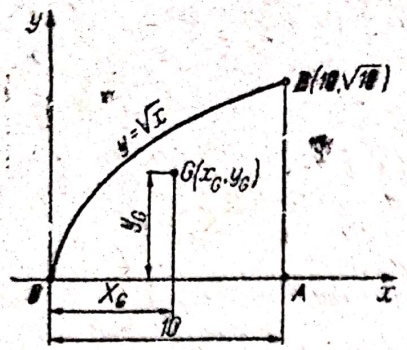


Fig. 2.8

2.8. Să se determine coordonatele centrului de greutate ale arcului de parabolă din figura 2.8.

Rezolvare. Avem

$$x_G = \frac{\int x\,dL}{\int dL}, \quad y_G = \frac{\int y\,dL}{\int dL}.$$

Calculăm elementul de arc

$$dL = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \frac{\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Rezultă

$$x_G = \frac{\int_0^{10} x\sqrt{\frac{1+4x}{x}}\,dx}{\int_0^{10}\sqrt{\frac{1+4x}{x}}\,dx};$$

efectuînd integrarea, se obține

$$x_G = \frac{\frac{1}{4}\left[\frac{4x+1}{4}\sqrt{4x^2+x} - \frac{1}{8}\ln\left(\frac{4x+1}{2} + \sqrt{4x^2+x}\right)\right]_0^{10}}{\frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{\frac{4x+1}{x}}}{2\left(\frac{4x+1}{x}-4\right)}\Bigg|_0^{10}} = 4{,}62.$$

Analog,

$$y_G = \frac{\int_0^{10}\sqrt{1+4x}\,dx}{\int_0^{10}\sqrt{\frac{1+4x}{x}}\,dx} = \frac{\left(\frac{1+4x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{10}}{\frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{\frac{4x+1}{x}}}{2\left(\frac{4x+1}{x}-4\right)}\Bigg|_0^{10}} = 2{,}02.$$

2.9. Să se determine coordonatele centrului de masă ale liniei materiale omogene, formată din trei semicercuri de raze R, $2R$, $4R$, avînd centrele respectiv în O_1, O_2 și O_3 (fig. 2.9).

Scanned with OKEN Scanner

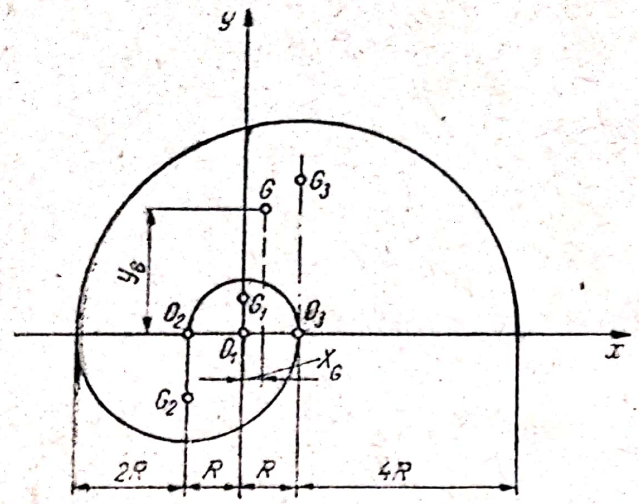


Fig. 2.9

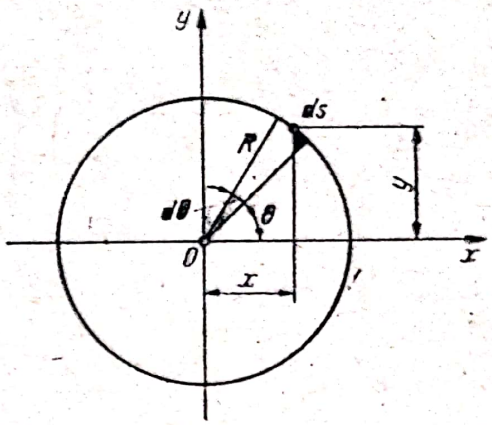


Fig. 2.10

R e z o l v a r e. Determinăm, mai întîi, coordonatele centrului de greutate al fiecărui semicerc în parte; avem respectiv:

$$x_1 = 0;\ y_1 = \frac{R\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi};\ L_1 = \pi R.$$

$$x_2 = -R;\ y_2 = -\frac{2R\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4R}{\pi};\ L_2 = 2\pi R.$$

$$x_3 = R;\ y_3 = \frac{4R\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{8R}{\pi};\ L_3 = 4\pi R.$$

Coordonatele centrului de greutate al liniei vor fi

$$x_G = \frac{\sum_1^3 x_i L_i}{\sum_1^3 L_i} = \frac{2\pi R^2}{7\pi R} = \frac{2R}{7};\quad y_G = \frac{\sum_1^3 y_i L_i}{\sum_1^3 L_i} = \frac{26R^2}{7\pi R} = \frac{26R}{7\pi}.$$

2.10. Să se calculeze poziția centrului de masă pentru un contur circular neomogen de rază R, dacă densitatea materialului este $\rho = k\theta$ (fig. 2.10).

R e z o l v a r e. Avem respectiv

$$x_G = \frac{\int \rho x\, ds}{\int \rho\, ds};\qquad y_G = \frac{\int \rho y\, ds}{\int \rho\, ds}.$$

Ținînd seama că

$$\rho = k\theta\,;\ ds = R\,d\theta\,;\ x = R\cos\theta\,;\ y = R\sin\theta,$$

rezultă

$$x_G = \frac{\int_0^{2\pi} \rho R^2 \cos\theta\,d\theta}{\int_0^{2\pi} \rho R\,d\theta} = \frac{R^2k\int_0^{2\pi} \theta\cos\theta\,d\theta}{kR\int_0^{2\pi}\theta\,d\theta} = \frac{R^2k\left(\theta\sin\theta\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\right)}{kR\,\frac{\theta^2}{2}\Big|_0^{2\pi}} =$$

$$= R\,\frac{\cos\theta\Big|_0^{2\pi}}{\frac{\theta^2}{2}\Big|_0^{2\pi}} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_0^{2\pi} \rho R^2\sin\theta\,d\theta}{\int_0^{2\pi} \rho R\,d\theta} = \frac{R^2k\int_0^{2\pi}\theta\sin\theta\,d\theta}{Rk\int_0^{2\pi}\theta\,d\theta} = R\,\frac{-\theta\cos\theta\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta}{\frac{\theta^2}{2}\Big|_0^{2\pi}} = -\frac{R}{\pi}.$$

2.11. Să se determine locul geometric al centrului de greutate pentru toate pozițiile posibile ale mecanismului din figura 2.11, știind că greutatea manivelei OA este G_1, greutatea pietrei de culisă A este G_2, iar

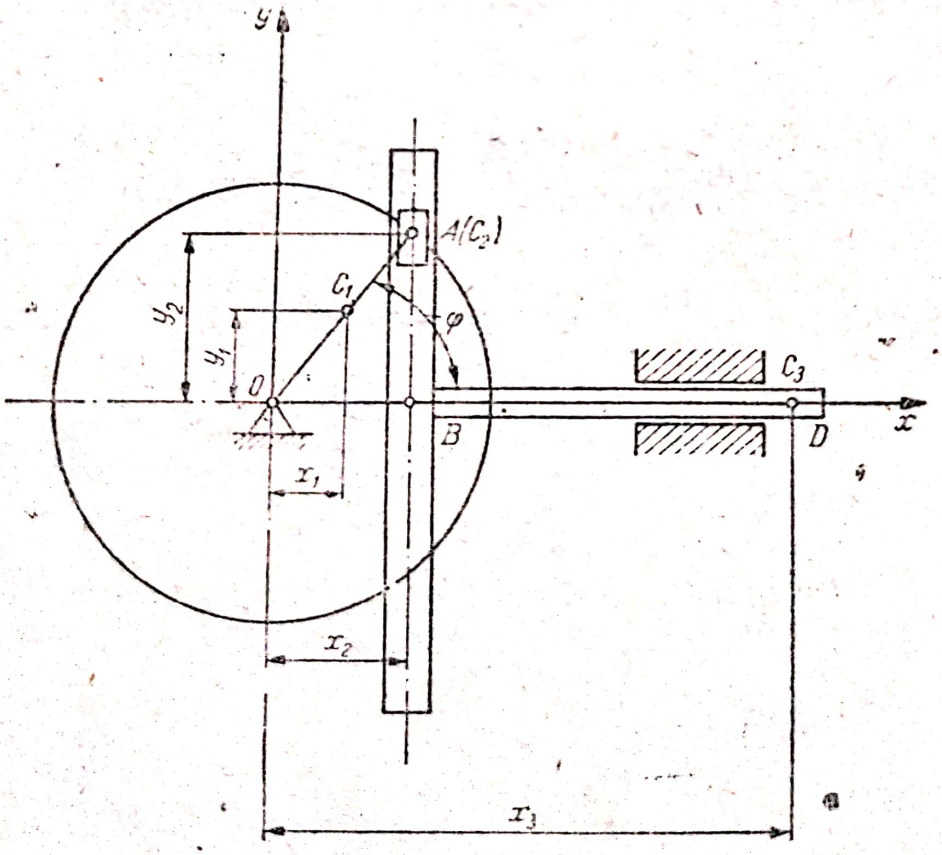


Fig. 2.11

centrul de greutate al culisei împreună cu tija BD este în punctul C_3 astfel că $BC_3 = 2OA = 2l$.

Rezolvare. Alegem sistemul de referință ca în figură și notăm cu φ unghiul de rotație al manivelei OA; dacă notăm centrele de greutate ale celor trei elemente cu C_1, C_2 și C_3, se observă că

$$x_1 = \frac{l}{2}\cos\varphi\,;\quad y_1 = \frac{l}{2}\sin\varphi$$

$$x_2 = l\cos\varphi\,;\quad y_2 = l\sin\varphi$$

$$x_3 = l\cos\varphi + 2l = l(2+\cos\varphi)\,;\quad y_3 = 0.$$

Coordonatele centrului de greutate al mecanismului, într-o poziție oarecare dată de unghiul φ, sînt

$$x_C = \frac{x_1G_1 + x_2G_2 + x_3G_3}{G_1+G_2+G_3} = \frac{G_1\frac{l}{2}\cos\varphi + G_2l\cos\varphi + G_3l(2+\cos\varphi)}{G_1+G_2+G_3} = d + a\cos\varphi,$$

unde s-a notat $d = \dfrac{2G_3l}{G_1+G_2+G_3}$; $a = \dfrac{G_1+2G_2+2G_3}{2(G_1+G_2+G_3)}\,l$;

$$y_C = \frac{y_1G_1 + y_2G_2 + y_3G_3}{G_1+G_2+G_3} = \frac{G_1\frac{l}{2}\sin\varphi + G_2l\sin\varphi}{G_1+G_2+G_3} = b\sin\varphi$$

în care $b = \dfrac{G_1+2G_2}{2(G_1+G_2+G_3)}\,l$.

Eliminînd parametrul φ, se obține ecuația

$$\frac{(x_C-d)^2}{a^2} + \frac{y_C^2}{b^2} = 1.$$

Prin urmare, locul geometric căutat este o elipsă cu semiaxele a și b, și cu centrul pe axa Ox, la distanța d față de punctul O.

2.12. Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru placa din fig. 2.12.

Rezolvare. Alegînd sistemul de referință ca în figură,

$$y_G = 0.$$

Calculul lui x_G se face considerînd dreptunghiul ① din care se scad semicercul ② și trapezul ③. Avem respectiv

$$x_1 = \frac{35}{2} = 17{,}5\,;\quad A_1 = 1400.$$

Distanța de la centrul cercului pînă la punctul G_2, O_1G_2 se calculează cu ajutorul formulei sectorului de cerc

$$d = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}10\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{40}{3\pi} = 4{,}22.$$

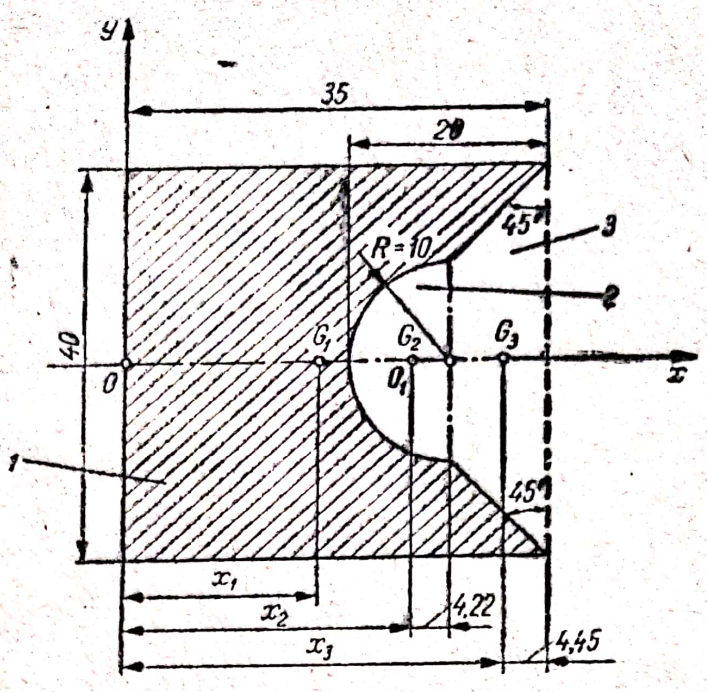


Fig. 2.12

Înălțimea trapezului fiind $O_1A = 10$, rezultă

$$x_2 = 35 - AO_1 - O_1C_2 = 35 - 10 - 4{,}225 = 20{,}775\,;\quad A_2 = \frac{\pi 16^2}{2} = 157.$$

Distanța AG_3 se calculează cu formula distanței de la baza mare pînă la centrul de greutate al unui trapez

$$h_a = \frac{h}{3}\,\frac{a+2b}{a+b}$$

unde a reprezintă baza mare, iar b — baza mică a trapezului. Deci

$$AG_3 = \frac{10}{3}\cdot\frac{40+2\cdot 20}{60} = \frac{80}{18} = 4{,}45.$$

Rezultă x_3

$$x_3 = 35 - 4{,}45 = 30{,}55$$

$$A_3 = \frac{a+b}{2}\,h = \frac{40+20}{2}\,10 = 300.$$

Calculăm acum x_G

$$x_G = \frac{\sum_1^3 x_i A_i}{\sum_1^3 A_i} = \frac{17{,}5\cdot 1400 - 20{,}775\cdot 157 - 30{,}55\cdot 300}{1400 - 157 - 300} = 12{,}6.$$

2.13. Să se determine centrul de greutate al profilului de baraj din figura 2.13. Aplicație numerică pentru: $a = b = 2h = 6$ m.

Scanned with OKEN Scanner

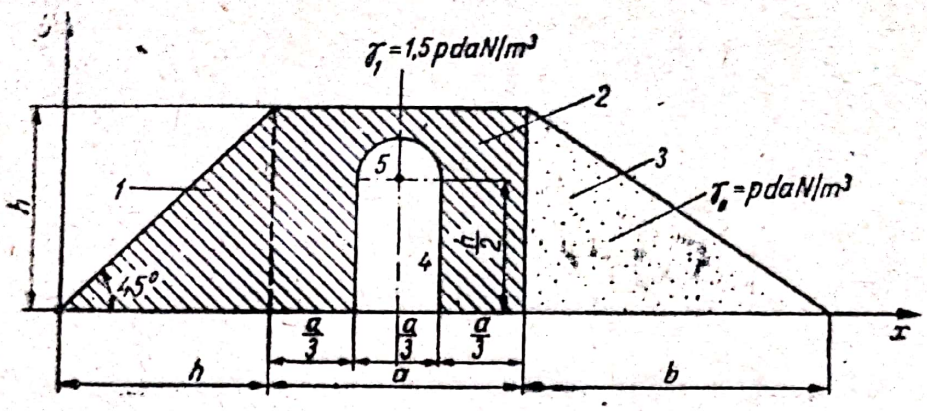


Fig. 2.13

Rezolvare. Secțiunea fiind neomogenă, coordonatele centrului de greutate se determină cu ajutorul formulelor

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i A_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i \gamma_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i A_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i \gamma_i}.$$

Tabelul 2.13

Nr. secțiuni	x_i	y_i	A_i	$\gamma_i A_i$	$x_i A_i \gamma_i$	$y_i A_i \gamma_i$
1	$\frac{2h}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h^2}{2}$	$\frac{3}{4}ph^2$	$\frac{ph^3}{2}$	$\frac{ph^3}{4}$
2	$\frac{a}{2}+h$	$\frac{h}{2}$	ah	$\frac{3}{2}aph$	$\frac{3}{2}aph\left(\frac{a}{2}+h\right)$	$\frac{3}{4}aph^2$
3	$h+a+\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{1}{2}bph$	$\frac{1}{2}bph\left(h+a+\frac{b}{3}\right)$	$\frac{bh^2p}{6}$
4	$\frac{a}{2}+h$	$\frac{h}{4}$	$-\frac{ah}{6}$	$-\frac{ah}{4}p$	$\left(\frac{a}{2}+h\right)\left(-\frac{ah}{4}p\right)$	$-\frac{ah^2p}{16}$
5	$\frac{a}{2}+h$	$\frac{h}{2}+\frac{2a}{9\pi}$	$-\frac{\pi a^2}{36}$	$-\frac{\pi a^2}{24}p$	$\left(\frac{a}{2}+h\right)\left(-\frac{\pi a^2}{24}p\right)$	$\left(\frac{h}{2}+\frac{2a}{9\pi}\right)\left(-\frac{\pi a^2}{24}p\right)$

Efectuăm, în continuare, un calcul ca în tabelul 2.13. În urma simplificării cu p, se obține:

$$x_G = \frac{\frac{h^3}{2}+\frac{3}{2}ah\left(\frac{a}{2}+h\right)+\frac{1}{2}bh\left(a+h+\frac{b}{3}\right)-\frac{ah}{4}\left(\frac{a}{2}+h\right)-\left(\frac{a}{2}+h\right)\frac{\pi a^2}{24}}{\frac{3}{4}h^2+\frac{3}{2}ah+\frac{1}{2}bh-\frac{ah}{4}-\frac{\pi a^2}{24}}$$

$$y_G = \frac{\frac{h^3}{4}+\frac{3ah^2}{4}+\frac{bh^2}{6}-\frac{ah^2}{16}-\frac{\pi a^2}{24}\left(\frac{h}{2}+\frac{2a}{9\pi}\right)}{\frac{3h^2}{4}+\frac{3}{2}ah+\frac{1}{2}bh-\frac{ah}{4}-\frac{\pi a^2}{24}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind cu valori numerice, rezultă

$$x_G = \frac{\frac{27}{2} + 27(3+3) + 9(6+3+2) - \frac{9}{2}(3+3) - 9\pi}{\frac{27}{4} + 27 + 9 - \frac{9}{2} - \frac{3\pi}{2}} = 6{,}53 \text{ m}$$

$$y_G = \frac{\frac{27}{4} + \frac{81}{2} + \frac{27}{3} - \frac{27}{4} - \frac{3\pi}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3\pi}\right)}{\frac{27}{4} + 27 + 9 - \frac{9}{2} - \frac{3\pi}{2}} = 1{,}30 \text{ m}.$$

2.14. Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru secțiunea compusă din figura 2.14.

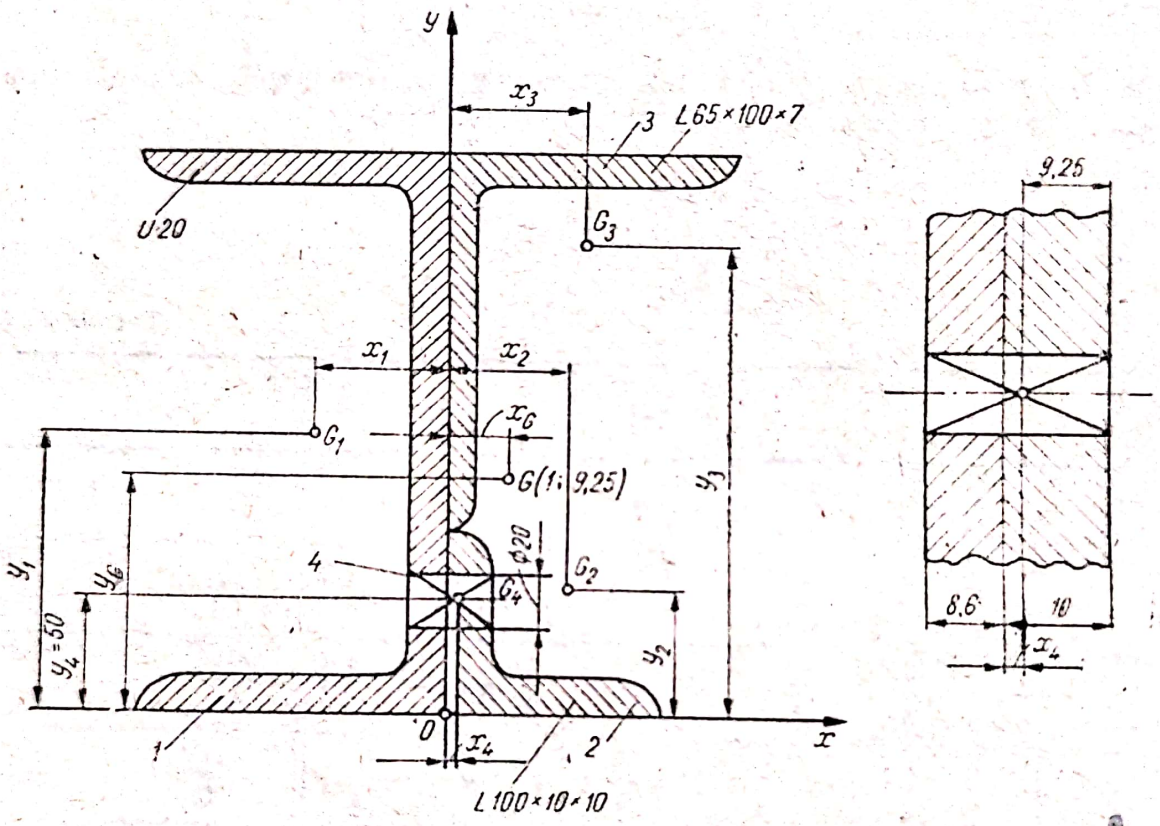


Fig. 2.14

Rezolvare. Pentru sistematizarea rezolvării problemei, vom efectua un calcul tabelar. Secțiunile fiind standardizate, vom utiliza tabelele cu caracteristicile profilelor laminate. Coordonatele: x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 și ariile A_1, A_2 și A_3 sînt date în tabelele profilelor, din care rezultă, utilizînd tabelele mărimile necesare.

Calculăm abscisa x_4; avem

$$x_4 = 10 - \frac{10 + 8{,}5}{2} = 0{,}75 \text{ mm} = 0{,}075 \text{ cm}.$$

$$x_1 = -e_1 = -2{,}01 \text{ cm}; \quad x_2 = e_x = 2{,}82 \text{ cm}; \quad x_3 = e_y = 1{,}51 \text{ cm}.$$

$$y_1 = 10 \text{ cm}; \quad y_2 = e_y = 2{,}82 \text{ cm}; \quad y_3 = 20 - e_x = 20 - 3{,}23 = 16{,}77 \text{ cm};$$

$$y_4 = 5 \text{ cm}.$$

$$A_1 = 32{,}2 \text{ cm}^2; \quad A_2 = 19{,}2 \text{ cm}^2; \quad A_3 = 11{,}2 \text{ cm}^2; \quad A_4 = -(1 + 0{,}86) \cdot 2 = -3{,}72 \text{ cm}^2$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste date rezultă:

$$x_G = \frac{\sum_1^4 x_i A_i}{\sum_1^4 A_i} = \frac{58{,}875}{58{,}9} \simeq 1 \text{ cm};$$

$$y_G = \frac{\sum_1^4 y_i A_i}{\sum_1^4 A_i} = \frac{545}{58{,}9} \simeq 9{,}25 \text{ cm}.$$

2.15. Să se determine poziția centrului de greutate al plăcii determinată de cardioidă

$$r = a(1 + \cos\theta).$$

(Cardioida este o curbă tehnică întîlnită în construcția de mașini) (fig. 2.15).

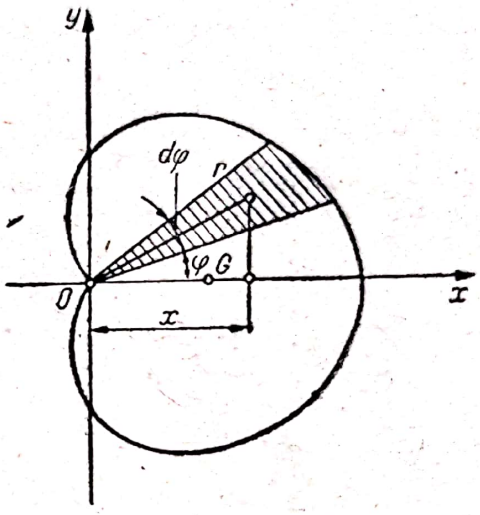


Fig. 2.16

Rezolvare. Alegînd sistemul de referință ca în figură, rezultă că $y = 0$, adică centrul de greutate se găsește pe axa Ox. Prin urmare

$$x_G = \frac{\int x\, dA}{\int dA}.$$

Elementul de arie putîndu-se asimila cu un triunghi, se poate scrie

$$x = \frac{2}{3} r\cos\varphi;\quad dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi;$$

deci

$$x_G = \frac{\int_{(A)} \frac{2}{3} r\cos\varphi \cdot \frac{1}{2} r^2\, d\varphi}{\int_{(A)} \frac{1}{2} r^2\, dA} = \frac{\frac{2}{3}\int_{(A)} r^3\cos\varphi\, d\varphi}{\int_{(A)} r^2\, d\varphi} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3} a^3 \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\varphi)^3 \cos\varphi\, d\varphi}{a^2 \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\varphi)^2\, d\varphi} = \frac{2}{3} a \frac{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi)\, d\varphi}{\int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi} =$$

$$= \frac{2}{3} a \frac{\left[\sin\varphi + \frac{3}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + 3\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right] + \frac{1}{4}\left[\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}}{\left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}} = \frac{5}{6} a.$$

Coordonatele centrului de greutate al plăcii sînt deci

$$x_G = \frac{5}{6}a; \quad y_G = 0.$$

2.16. Prin îndoirea plăcii triunghiulare omogene ACE în lungul dreptelor BD și OD (fig. 2.16, a), în așa fel încît să formeze unghiuri drepte, se obține placa din figura 2.16, b. Cunoscînd dimensiunile înscrise pe desen, să se determine centrul de greutate al corpului obținut.

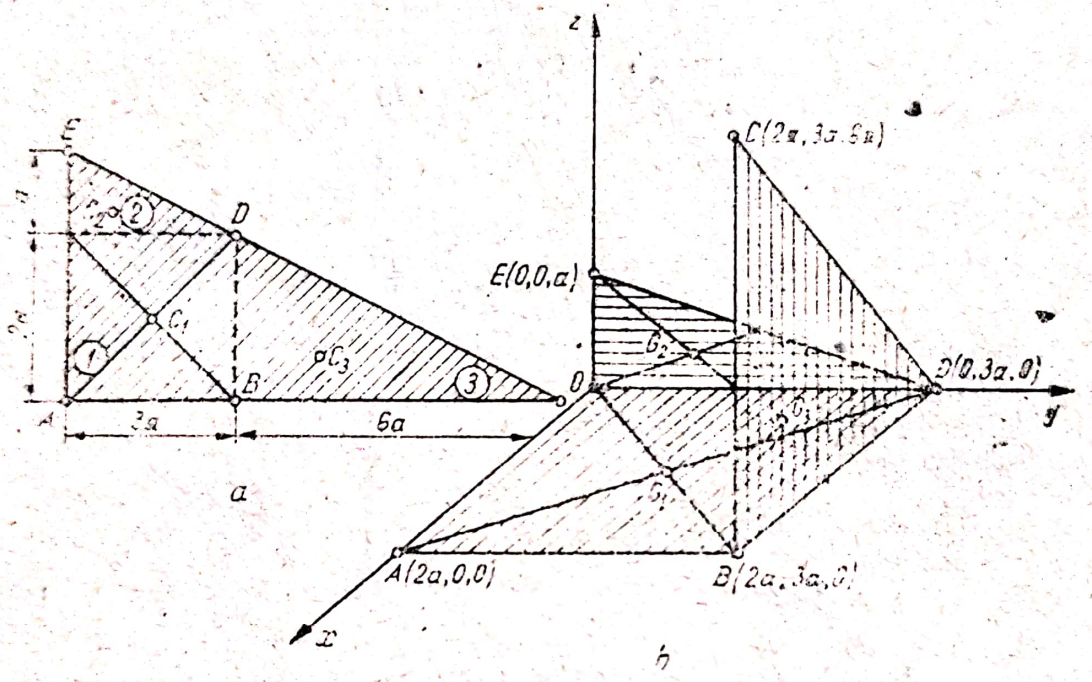


Fig. 2.15

Rezolvare. În urma îndoirii, placa considerată se descompune în următoarele plăci componente:

— dreptunghiul $ABDO$, avînd laturile $2a$ și $3a$, aria $A_1 = 6a^2$ și centrul de greutate, G_1, de coordonate

$$x_1 = a; \; y_1 = \frac{3a}{2} \text{ și } z_1 = 0;$$

— triunghiul dreptunghic EOD, de laturi a și $3a$, arie $A_2 = \frac{3a^2}{2}$ și centru de greutate G_2, de coordonate

$$x_2 = 0; \; y_2 = a \text{ și } z_2 = \frac{a}{3};$$

— triunghiul dreptunghic CBD, avînd laturile $2a$ și $6a$, aria $A_3 = 6a^2$ și centrul de greutate G_3, de coordonate

$$x_3 = \frac{4a}{3}; \; y_3 = 3a \text{ și } z_3 = 2a.$$

Coordonatele centrului de greutate al plăcii rezultă

$$x_G = \frac{\sum_1^3 x_i A_i}{\sum_1^3 A_i} = \frac{14a^3}{\frac{27a^2}{2}} = \frac{28}{27}a$$

$$y_G = \frac{\sum_1^3 y_i A_i}{\sum_1^3 A_i} = \frac{\frac{57a^3}{2}}{\frac{27a^2}{2}} = \frac{19}{9}a$$

$$z_G = \frac{\sum_1^3 z_i A_i}{\sum_1^3 A_i} = \frac{\frac{25a^3}{2}}{\frac{27a^2}{2}} = \frac{25}{27}a.$$

2.17. Să se determine centrul de greutate al nitului din figura 2.17, asimilat cu o semisferă și un cilindru, avînd: $D = 40$ mm, $d = 22$ mm și $l = 50$ mm.

Rezolvare. Alegînd sistemul de referință ca în figură, se observă că

$$x_G = y_G = 0;$$

rezultă

$$z_G = \frac{\sum_1^2 z_i V_i}{\sum_1^2 V_i} = \frac{z_1 V_1 + z_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

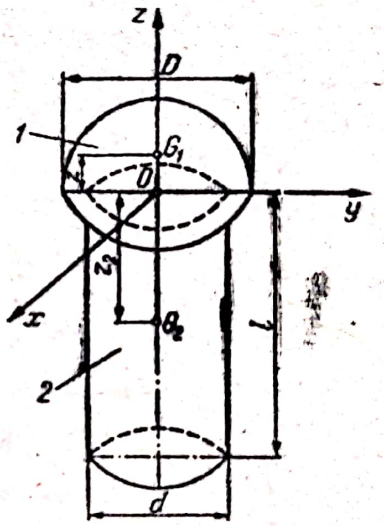


Fig. 2.17

Ținînd seama că: $z_1 = \frac{3}{8}R = \frac{3}{16}D$; $V_1 = \frac{\pi D^3}{12}$; $z_2 = -\frac{l}{2}$; $V_2 = \pi r^2 l$, se obține:

$$z_G = \frac{\frac{3}{16}D\frac{\pi D^3}{12} - \frac{l}{2}\frac{\pi d^2 l}{4}}{\frac{\pi D^3}{12} + \frac{\pi d^2 l}{4}} = \frac{\frac{D^4}{64} - \frac{d^2 l^2}{8}}{\frac{D^3}{12} + \frac{d^2 l}{4}} = \frac{\frac{4^4}{64} - \frac{2{,}2^2 \cdot 5^2}{8}}{\frac{4^3}{12} + \frac{2{,}2^2 \cdot 5}{4}} = -1 \text{ cm}.$$

2.18. Să se determine poziția centrului de greutate pentru arborele cotit din figura 2.18. Dimensiunile pe figură sînt în mm.

Rezolvare. Se efectuează un calcul ca în tabelul 2.18

$$x_G = y_G = 0,$$

$$z_G = \frac{\sum_1^7 z_i V_i}{\sum_1^7 V_i} = \frac{102\,236}{12865{,}44} = 7{,}95 \text{ cm} = 79{,}5 \text{ mm}.$$

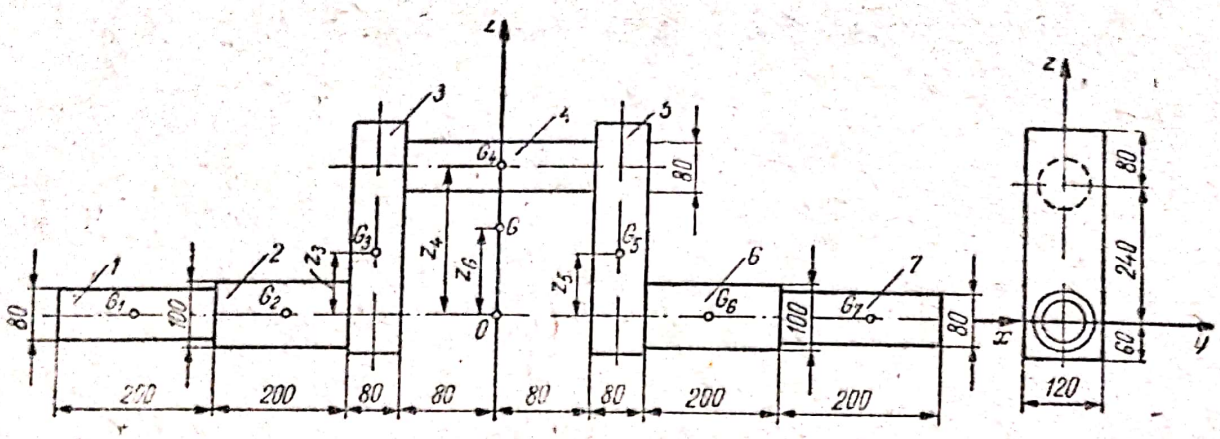


Fig. 2.18

Tabelul 2.18

Nr. crt.	V_i, în cm³	z_i, în cm	$V_i z_i$, în cm⁴
1	1004,80	0	0
2	1570	0	0
3	3456	12	41 472
4	803,84	24	19 292
5	3456	12	41 472
6	1570	0	0
7	1004,80	0	0
	12 865,44		102.236

2.19. Să se determine coordonatele centrului de greutate la porțiunea $ABCD$ dintr-un rezervor sferic de rază R (fig. 2.19).

Rezolvare. Considerăm o porțiune $ABCD$ dintr-o sferă de rază R mărginită de două cercuri meridiane și două cercuri paralele. Vom presupune că unul dintre meridiane este chiar planul xOy, cum se poate vedea pe figură.

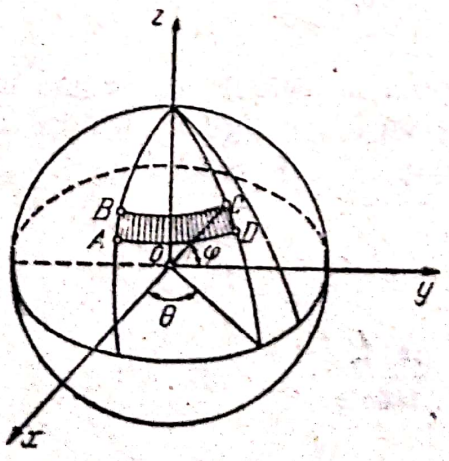


Fig. 2.19

Folosind drept coordonate longitudinea θ și latitudinea φ, atunci

$$x = R\cos\theta\cos\varphi\,;\; y = R\sin\theta\cos\varphi\,;\; z = R\sin\varphi\,;$$

$$dA = R^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta.$$

Rezultă

$$x_G = \frac{\iint R^2\cos^2\varphi\cos\theta\,d\theta\,d\varphi}{\iint R^2\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi} = R\,\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\theta}\cos\theta\,d\theta}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\theta}d\theta} =$$

$$= \frac{R}{2}\cdot\frac{\sin\theta\left[\varphi_2-\varphi_1+\frac{1}{2}(\cos 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)\right]}{\theta(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)};$$

$$y_G = \frac{\iint R^3\cos^2\varphi\sin\theta\,d\theta d\varphi}{\iint R^2\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi} = \frac{R\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\theta}\sin\theta\,d\theta}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\theta}d\theta} =$$

$$= \frac{R}{2}\cdot\frac{(1-\cos\theta)[\varphi_2-\varphi_1+(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)]}{\theta(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)};$$

$$z_G = \frac{\iint R^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta}{\iint R^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta} = R\,\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\theta}d\theta}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\varphi\,d\varphi\int d\theta} =$$

$$= \frac{R}{2}\,\frac{\sin^2\varphi_2-\sin^2\varphi_1}{\sin\varphi_2-\sin\varphi_1} = \frac{R}{2}(\sin\varphi_2+\sin\varphi_1).$$

2.20. Un vas metalic are forma și dimensiunile din fig. 2.20, a. Fundul vasului are forma semisferică și este consolidat cu un strat de plumb în formă de calotă semisferică, de înălțime h. Se cere să se determine densitatea materialului din care este construit vasul.

Rezolvare. Condiția de echilibru indiferent este satisfăcută dacă centrul de greutate al întregului sistem se găsește în originea sistemului de referință, condiție ce se exprimă prin relația

$$z_G = \frac{\sum_1^5 m_i z_i}{\sum_1^5 m_i} = 0,$$

sau

$$\sum_1^5 m_i z_i = 0.$$

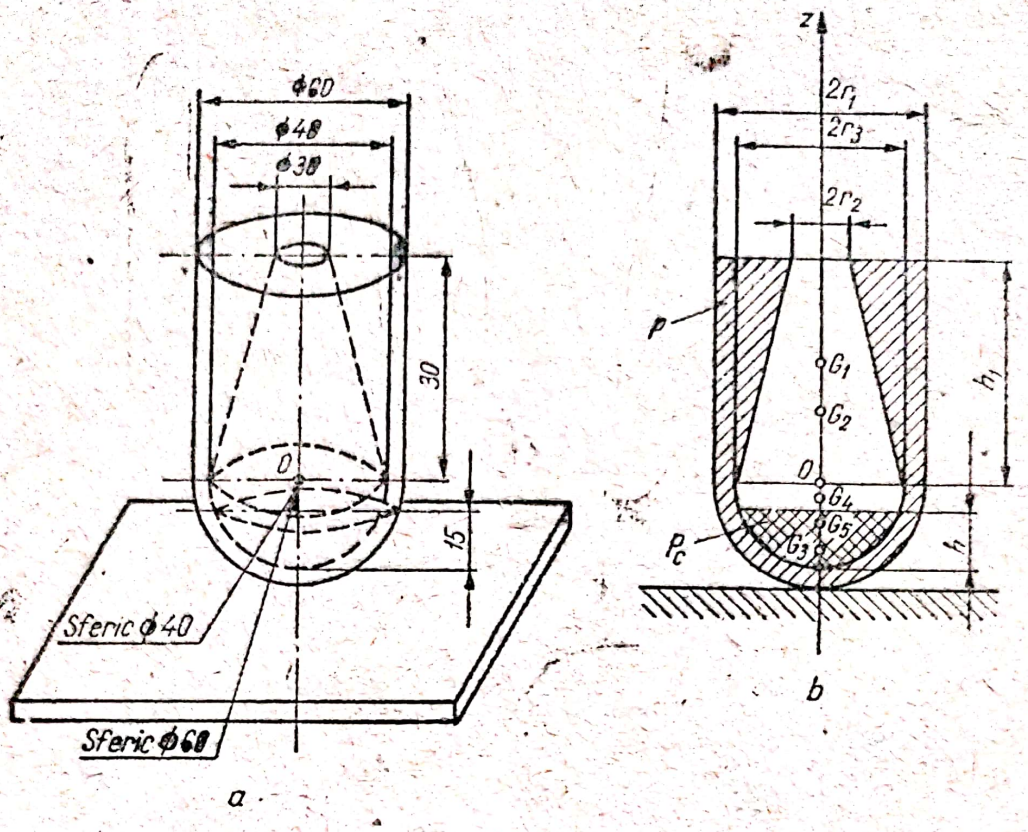


Fig. 2.20 a, b

Ținînd seama că

$$m_1 = \rho V_1 = \pi r_1^2 h_1 \rho\,; \quad z_1 = \frac{h_1}{2}$$

$$m_2 = \rho V_2 = \frac{h_1}{3}\rho\,(r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2)\,; \quad z_2 = \frac{h_1(r_3^2 + 2r_2 r_3 + 3r_2^2)}{4(r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2)}$$

$$m_3 = \rho V_3 = \rho\,\frac{2\pi r_1^3}{3}\,; \quad z_3 = -\frac{3}{8}r_1$$

$$m_4 = \rho V_4 = \rho\,\frac{2\pi r_2^3}{3}\,; \quad z_4 = -\frac{3}{8}r_2$$

$$m_5 = \rho_{P_b} V_5 = \frac{\pi h^3}{3}(3r_2 - h)\rho_{P_b}\,; \quad z_5 = -\frac{3}{4}\cdot\frac{(2r_2 - h)^2}{3r_2 - h}$$

unde s-a notat cu ρ_{P_b} densitatea plumbului; avem

$$\sum_1^5 m_i z_i = m_1 z_1 - m_2 z_2 + m_3 z_3 - m_4 z_4 + m_5 z_5 = 0,$$

adică

$$\rho\left[\frac{\pi r_1^2 h_1^2}{2} - \frac{\pi h_1^2}{12}(r_3^2 + 2r_2 r_3 + 3r_2^2) - \frac{\pi r_1^4}{4} + \frac{\pi r_2^4}{4}\right] - \rho_{P_b}\frac{\pi h^3}{4}(2r_3 - h)^2 = 0.$$

Înlocuind datele problemei, se obține

$$\rho = 0{,}3\rho_{P_b}.$$

2.21. Înălțimea centrului de greutate al unui automobil se determină prin cîntărirea automobilului în poziție înclinată. Se cere să se determine înălțimea centrului de greutate h (fig. 2.21).

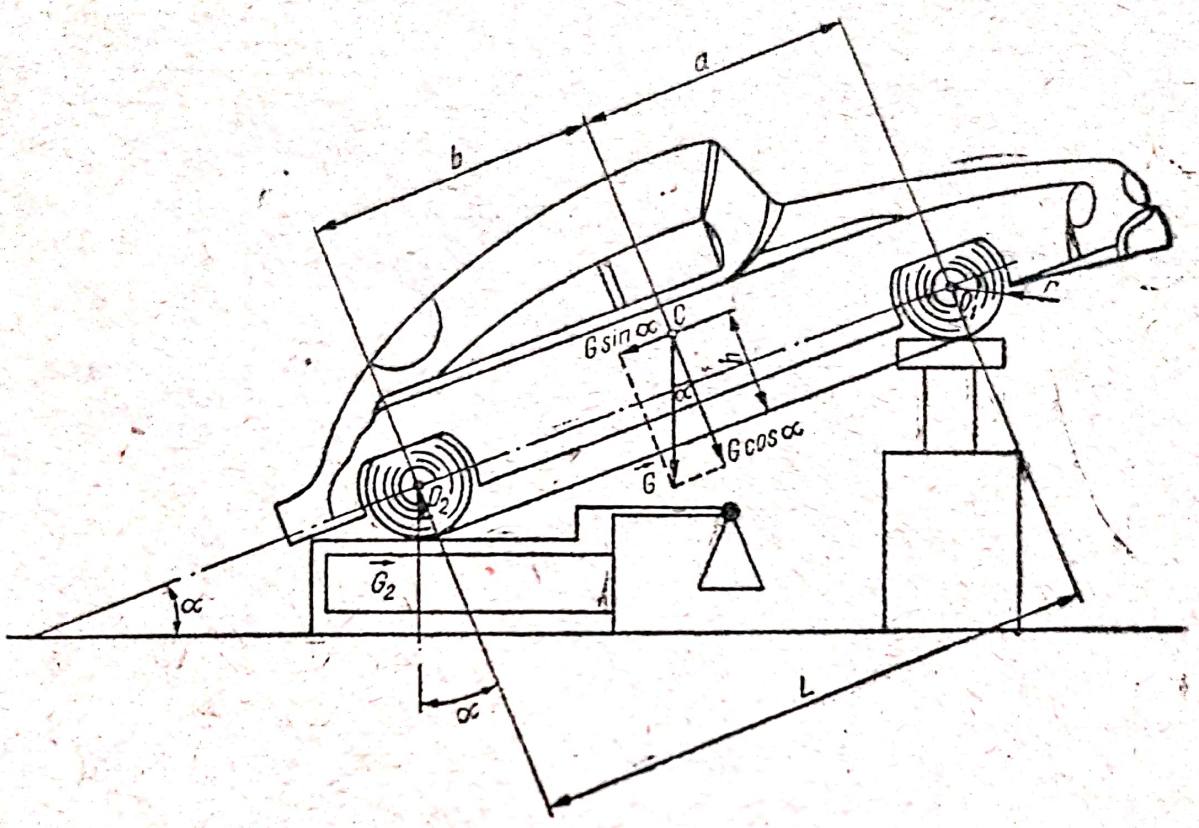


Fig. 2.21

Rezolvare. Ecuația de momente a forțelor ce solicită automobilul, în poziție înclinată, în raport cu centrul roții din față se scrie:

$$\Sigma M_{(o_1)} = 0: \quad -G_2(a+b)\cos\alpha + Ga\cos\alpha + (h-r)G\sin\alpha = 0.$$

Din această ecuație, se deduce înălțimea căutată h; rezultă:

$$h = \frac{G_2}{G}(a+b)\operatorname{ctg}\alpha - a\operatorname{ctg}\alpha + r.$$

2.22. Să se determine coordonatele centrului de greutate al tractorului pe șenile din fig. 2.22.

Rezolvare. Ecuația de momente față de punctul ① se scrie (fig. 2.22, a):

$$M_{①} = 0: \quad -B \cdot Q_2 + \left(\frac{B}{2} + e\right)G = 0;$$

rezultă

$$e = \frac{Q_2 - 0{,}5\,G}{G}B$$

Observație. Se presupune $Q_2 > Q_1$; dacă $Q_2 < Q_1$, se obține

$$e = \frac{0{,}5G - Q_2}{G}B$$

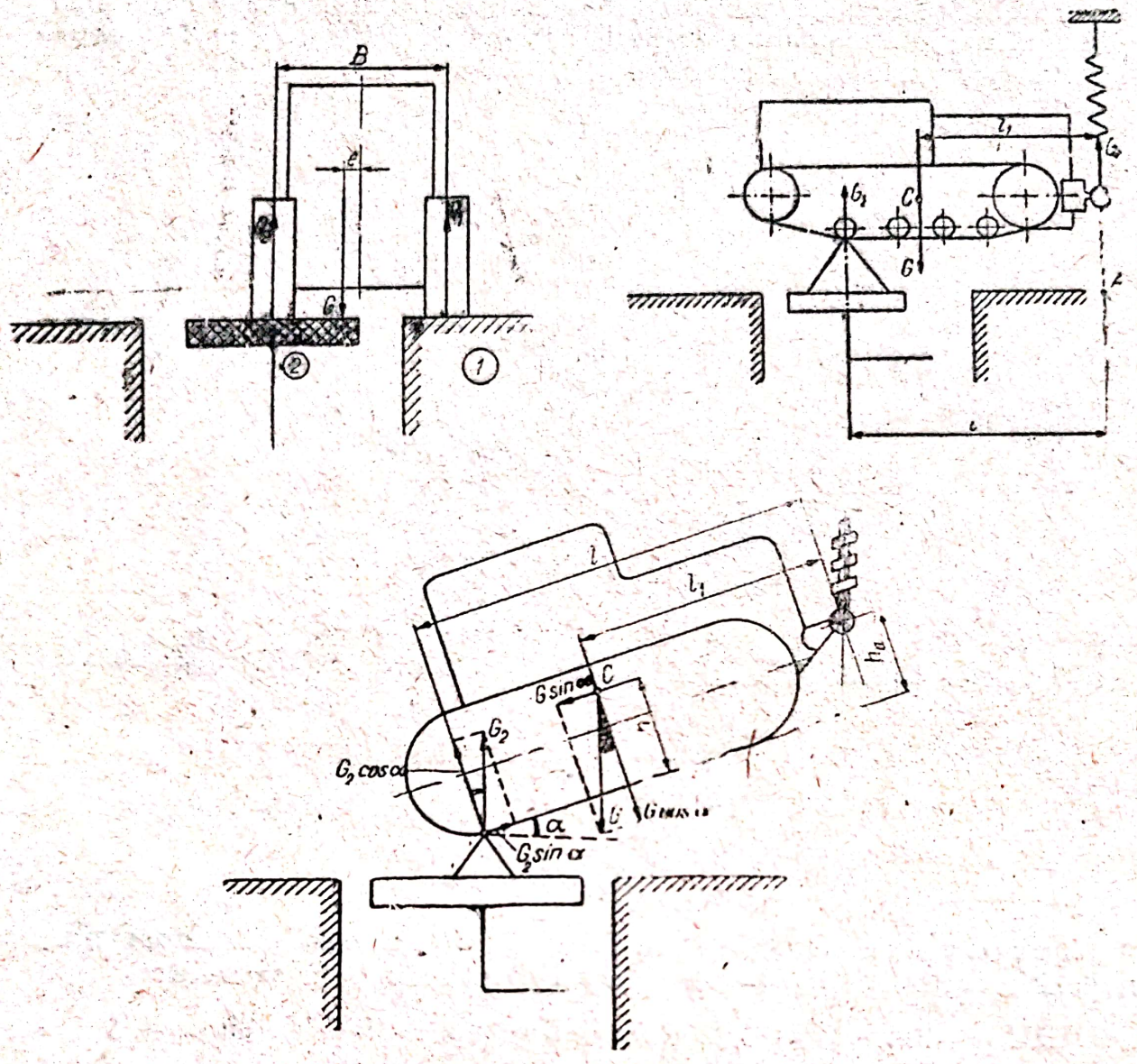


Fig.2.22 a, b, c

În vederea determinării coordonatei l_1 (fig. 2.22,b), se cîntărește tractorul în poziție orizontală și se determină forța G_2; se scrie apoi ecuația de momente în raport cu punctul A

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \; -lG_2 + l_1 G = 0,$$

de unde

$$l_1 = \frac{G_2}{G} l.$$

Înălțimea h a centrului de greutate al tractorului se determină prin cîntărire în poziție înclinată (fig. 2.22,c) și scriind apoi ecuația de momente în raport cu punctul A; avem

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \; (l - h_0 \operatorname{tg} \alpha) \cdot \cos \alpha \cdot G_2 - (l_1 - h_0 \operatorname{tg} \alpha) G +$$

$$+ h \sin \alpha \cdot G = 0;$$

Rezultă cota

$$h = \frac{(l - h_0 \operatorname{tg} \alpha) G_2 \cos \alpha - (l_1 - h_0 \operatorname{tg} \alpha) G \cos \alpha}{G \sin \alpha}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.23. Să se determine aria și volumul vasului avînd forma din fig. 2.23, a.

R e z o l v a r e. Vasul rezultă prin rotirea liniei compuse din figura 2.23,a, în jurul axei (D). Aria vasului se calculează cu ajutorul primei teoreme Pappus-Guldin

$$A = 2\pi x_G L = 2\pi \sum_1^5 x_i L_i.$$

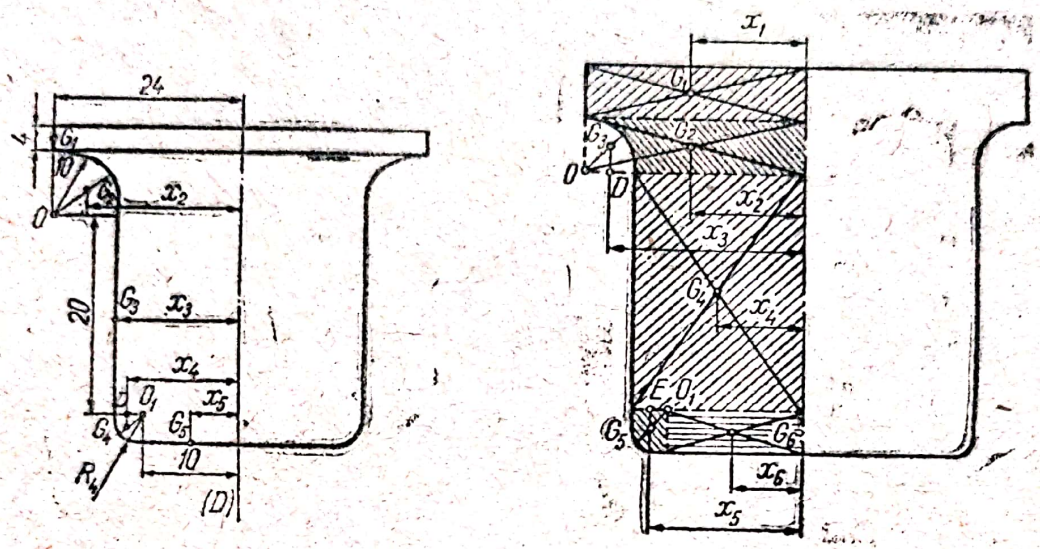


Fig. 2.23 a, b

Efectuăm un calcul ca în tabelul 23,a.

Tabelul 2.23,a

Nr.	x_i	L_i	$x_i L_i$
1	24	4	96
2	17,64	15,7	277
3	14	20	280
4	12,55	6,28	78,5
5	5	10	50
Σ			781,5

$$x_1 = 24; \quad L_1 = 4.$$

Pentru a determina pe x_2, calculăm distanța OA; avem

$$OA = OG_2 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{40}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{40}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{20}{\pi} = 6{,}36.$$

Rezultă

$$x_2 = 24 - 6{,}36 = 17{,}64; \quad L_2 = \frac{\pi R_2}{2} = 5\pi = 15{,}7.$$

$$x_3 = 14; \quad L_3 = 20.$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm distanța O_1D pentru a determina pe x_4; avem

$$O_1D = O_1G_4 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{R_4 \sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{4\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{\pi}.$$

Rezultă

$$x_4 = 10 + O_1D = 10 + \frac{8}{\pi} = 12{,}55.$$

$$L_4 = \frac{\pi R_4}{2} = \frac{4\pi}{2} = 6{,}28.$$

Aria vasului va fi, deci:

$$A = 2\pi \Sigma x_i L_i = 2\pi \cdot 781{,}5 = 4910 \text{ unități pătratice.}$$

Determinăm volumul vasului, considerînd că aria haşurată se roteşte în jurul axei (D) (fig. 2.23,*b*). Vom utiliza relația

$$V = 2\pi \sum_1^6 x_i A_i$$

Se observă că

$$x_3 = 24 - OD = 24 - OG_3 \cos\frac{\pi}{4} = 24 - \frac{2}{3} \cdot 10 \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= 24 - \frac{40}{3\pi} = 19{,}76; \quad A_3 = \pi\frac{10^2}{4} = 78{,}6;$$

$$x_6 = 10 + O_1E = 10 + O_1G_5 \cos\frac{\pi}{4} = 10 + \frac{2}{3} \cdot 4 \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\pi}{4} = 11{,}7;$$

$$A_6 = \frac{\pi 4^2}{4} = 12{,}6.$$

Acum putem completa uşor tabelul 2.23,b.

Tabelul 2.23,b

Nr. element	x_i	A_i	x_iA_i
1	12	96	1152
2	12	240	2880
3	19,76	−78,6	−1550
4	7	280	1960
5	5	40	200
6	11,7	12,6	148
Σ			4790

Volumul vasului va fi

$$V = 2\pi \cdot 4790 = 30\,000 \text{ unități cubice.}$$

Scanned with OKEN Scanner

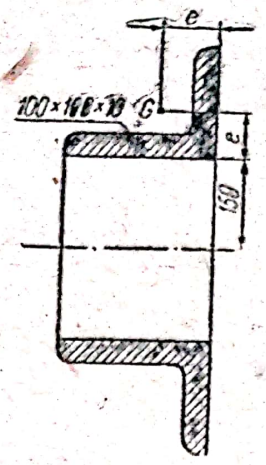


Fig. 2.24

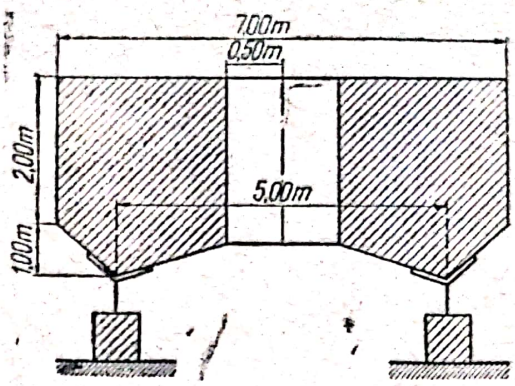


Fig. 2.25

2.24. Un inel circular are secțiunea un profil cornier. Se cere să se stabilească volumul conform datelor din fig. 2.24.

Rezolvare. Din tabelul cornierelor cu aripi egale, luăm cota e și aria cornierului A: pentru cornierul cu aripi egale $100 \times 100 \times 10$, corespund

$$e = 2{,}82 \text{ cm și } A = 19{,}2 \text{ cm}^2.$$

Volumul inelului va fi deci

$$V = 2\pi x_G \cdot A = 2\pi(15 + 2{,}82) \cdot 19{,}2 = 2150 \text{ cm}^3.$$

2.25. Un rezervor circular are secțiunea efectuată prin axul său ca în fig. 2.25. Se cere volumul rezervorului.

Rezolvare. Determinăm suprafața secțiunii situată de o parte a axei de rotație

$$A = 3 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 1}{2} = 7{,}5 \text{ m}^2.$$

Distanța de la axa de rotației pînă la centrul de greutate al secțiunii este dată de

$$x_G = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2};$$

observînd că

$$x_1 = 2 \text{ m}; \; A_1 = 6 \text{ m}^2;$$

$$x_2 = \frac{0{,}5 + 2{,}5 + 3{,}5}{3} = \frac{6{,}5}{3} \text{ m}; \; A_2 = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5 \text{ m}^2,$$

rezultă

$$x_G = \frac{2 \cdot 6 + \frac{6{,}5}{2} \cdot \frac{3}{2}}{6 + 1{,}5} = 2{,}25 \text{ m}.$$

Conform teoremei a doua Pappus-Guldin, se obține

$$V = 2\pi \cdot x_G \cdot A = 2\pi \cdot 2{,}25 \cdot 7{,}5 = 33{,}75\pi \text{ m}^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

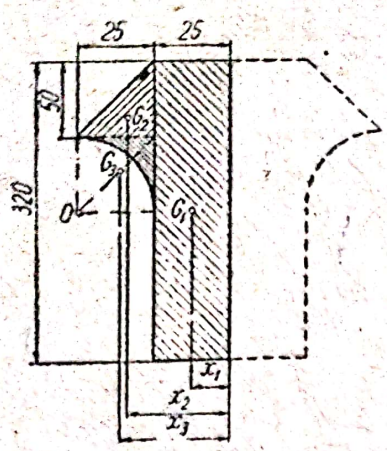


Fig. 2.26

2.26. Să se determine dimensiunile brute ale semifabricatului necesar pentru forjarea în matriță a pinionului unui diferențial, avînd cotele din fig. 2.26.

Rezolvare. De obicei se folosesc semifabricate cilindrice avînd înălțimea h și diametrul d și raportul $h/d = 1{,}5$.

Volumul semifabricatului va fi

$$1{,}5\frac{\pi d^3}{4} = 2\pi \sum_1^3 x_i A_i ;$$

rezultă

$$d = \sqrt[3]{\frac{8}{1{,}5}\sum_1^3 x_i A_i}.$$

Se observă că

$$x_1 = 12{,}5 \text{ mm}; \quad A_1 = 320 \cdot 25 = 8\,000 \text{ mm}^2$$

$$x_2 = 25 + \frac{25}{3} = 33{,}3 \text{ mm}; \quad A_2 = \frac{50 \cdot 25}{2} = 625 \text{ mm}$$

$$x_3 = \frac{37{,}5 \cdot 625 - \left(50 - \frac{2}{3} \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi \cdot 25^2}{4}}{625 - \frac{\pi \cdot 25^2}{4}} = 30{,}2 \text{ mm}$$

$$A_3 = 625 - \frac{\pi \cdot 25^2}{4} = 134 \text{ mm}^2.$$

În continuare se efectuează un calcul ca în tabelul 2.26. Rezultă

$$d = \sqrt[3]{\frac{8}{1{,}5} 124850} = 87{,}3 \text{ mm}.$$

Prin urmare,

$$h = 1{,}5d = 131 \text{ mm}.$$

Tabelul 2 26

Nr. element	x_i	A_i	$x_i A_i$
1	12,5	8 000	100 000
2	33,3	625	20 800
3	30,2	134	4 050
Σ			1 4 850

Scanned with OKEN Scanner

2.27. Să se calculeze momentul static în raport cu axa Ox, pentru placa din fig. 2.27.

Rezolvare. Placa este compusă dintr-un semicerc și un triunghi. Centrul de greutate al ariei semicercului are ordonata

$$y_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

iar centrul de greutate al triunghiului

$$y_2 = -\frac{h}{3}.$$

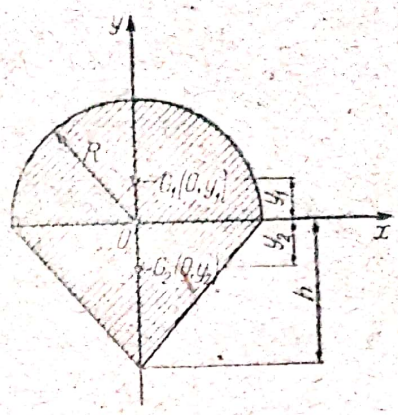


Fig. 2.27

Momentul static al plăcii, în raport cu axa Ox, va fi deci

$$S_x = \sum_1^2 y_i A_i = \frac{4R}{3\pi} \frac{\pi R^2}{2} - \frac{h}{3} \frac{2R \cdot h}{2};$$

rezultă

$$S_x = \frac{R}{3}(2R^2 - h^2).$$

2.28. Să se determine, pe cale grafică, momentul static al plăcii din fig. 2.28, în raport cu axa Oy.

Rezolvare. Aria suprafeței 1 este $A_1 = 200$ mm², ceea a suprafeței, 2, $A_2 = 400$ mm², iar aria suprafeței 3 este $A_3 = 314$ mm². În continuare se consideră vectorii $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, proporționali cu ariile A_1, A_2, A_3, vectorul $\mathbf{V}_3$ fiind orientat în sens opus celorlalți doi, deoarece aria A_3 lipsește.

Pentru modulele V_1, V_2, V_3 s-a ales scara 1 cm = 200 mm². Pentru lungimi s-a ales scara 1 : 1. Din figură rezultă, prin măsurare și ținînd seama de scări,

$$s = 37 \text{ mm și } H = 22 \text{ mm}.$$

Prin urmare, momentul static S_y este

$$S_y = 37 \cdot (22 \times 200) = 163000 \text{ mm}^3 = 163 \text{ cm}^3.$$

2.29. Să se determine grafic centrul de masă al mecanismului patrulater articulat $ABDE$ (fig. 2.29,a) noscînd:

$$m_1 = 0{,}2 \text{ kg}; \; m_2 = 0{,}3 \text{ kg}; \; m_3 = 0{,}25 \text{ kg}; \; AB = 0{,}37 \text{ m};$$
$$BD = 0{,}51 \text{ m}; \; DE = 0{,}45 \text{ m}; \; AE = 0{,}3 \text{ m}; \; \alpha = 90°.$$

Rezolvare. Se desenează mecanismul la scara 1 : 10, se construiesc apoi vectorii de poziție ai centrelor $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ și $\mathbf{r}_3$ și se determină modulele lor; rezultă

$$r_1 = 0{,}175 \text{ m}; \; r_2 = 0{,}6 \text{ m}; \; r_3 = 0{,}76 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

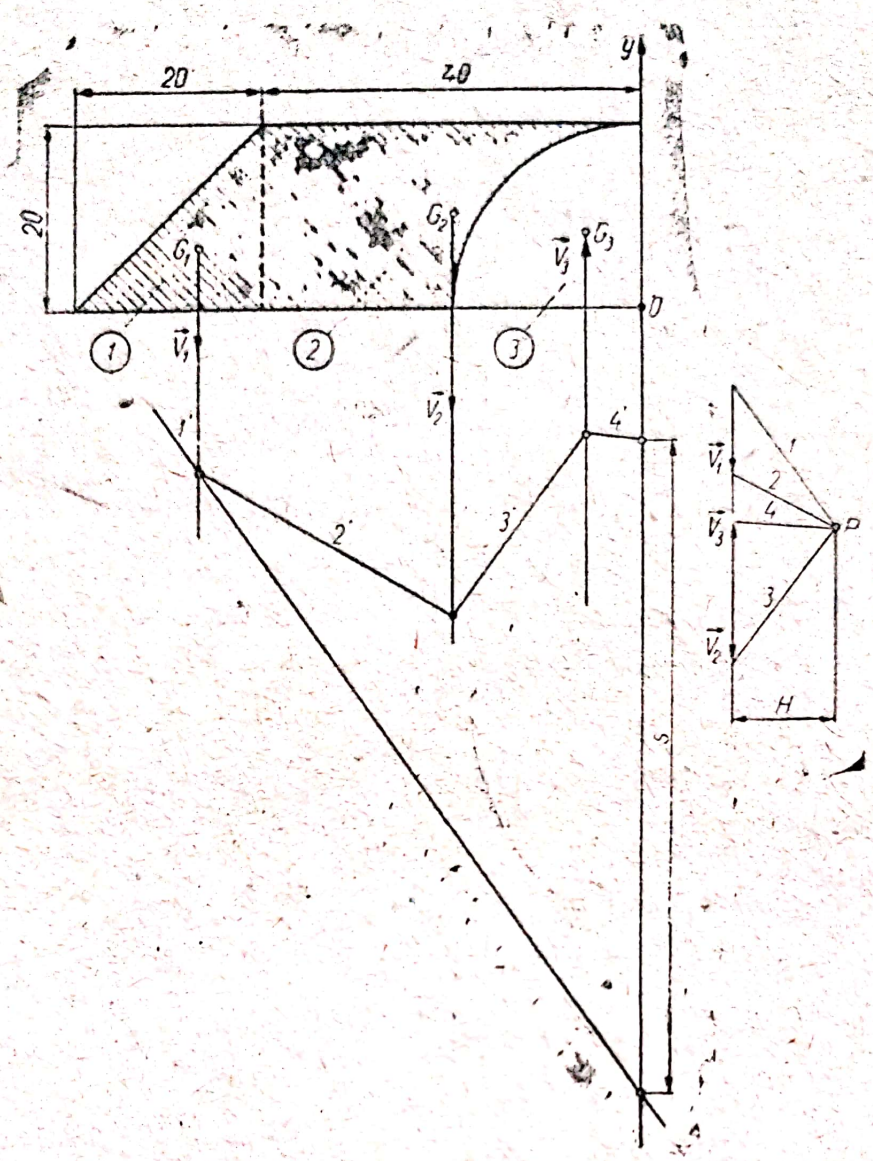


Fig. 2.28

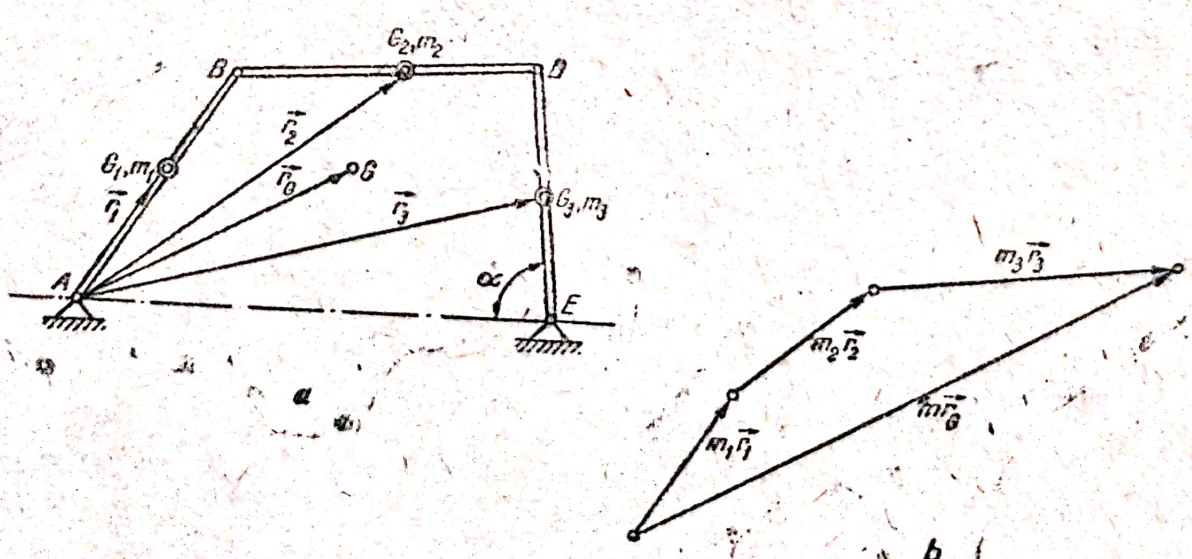


Fig. 2.29

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează, de asemenea, modulele vectorilor $m_i r_i$; se obține

$$m_1 r_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}175 = 0{,}035 \text{ kg} \cdot \text{m}; \quad m_2 r_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18 \text{ kg} \cdot \text{m};$$

$$m_3 r_3 = 0{,}25 \cdot 0{,}76 = 0{,}19 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

Se alege pentru aceste module scara 1 cm = 0,05 kgm și se construiește poligonul vectorial în baza relației

$$m\mathbf{r}_G = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3.$$

Din poligon (fig. 2.29, b) rezultă

$$|m\mathbf{r}_G| = 7{,}9 \cdot 0{,}05 = 0{,}395 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Conform cu (2.5), avem

$$r_G = \frac{|m\mathbf{r}_G|}{m} = \frac{0{,}395}{0{,}75} = 0{,}526 \text{ m}.$$

2.30. Să se determine analitic și grafic diametrul D al rondelei din care, prin ambutisare, rezultă vasul din fig. 2.30, a.

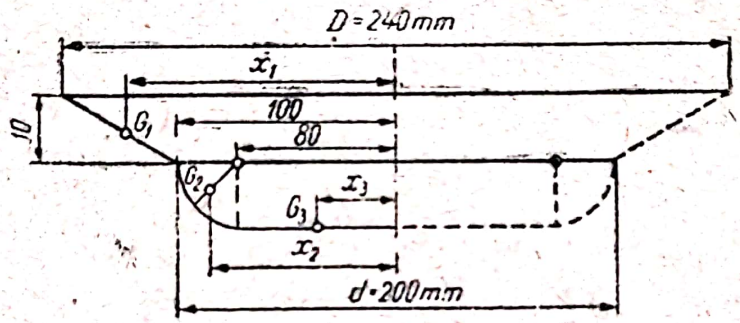


Fig. 2.30 a

Rezolvare. Presupunînd că tabla nu se subțiază în urma procesului de ambutisare, diametrul rondelei se determină egalînd suprafața vasului cu aria rondelei de ambutisare; rezultă

$$2\pi \sum_1^3 x_i L_i = \pi R^2$$

de unde

$$R = \sqrt{2\sum_1^3 x_i L_i} = \sqrt{2 x_G L}.$$

Cu cotele din figură obținem

$$x_1 = 100 + \frac{240 - 200}{4} = 110 \text{ mm} \quad L_1 = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22{,}3 \text{ mm};$$

$$x_2 = 80 + 20 \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{4} = 80 + \frac{40}{\pi} = 92{,}72 \text{ mm};$$

$$L_2 = \frac{2\pi \cdot 20}{4} = 31{,}4 \text{ mm}; \quad x_3 = \frac{80}{2} = 40 \text{ mm}; \quad L_3 = 80 \text{ mm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În continuare efectuăm un calcul ca în tabelul 2.30. Rezultă

$$R = \sqrt{2 \cdot 8564} = 131 \text{ mm}.$$

Tabelul 2.30

Nr. elementului	x_i	L_i	$x_i L_i$
1	110	22,3	2453
2	92,72	31,4	2911
3	40	80	3200
Σ		133,7	8564

Construcţia grafică se arată în fig. 2.30,b şi are la bază relaţia

$$R^2 = 2x_G \cdot L.$$

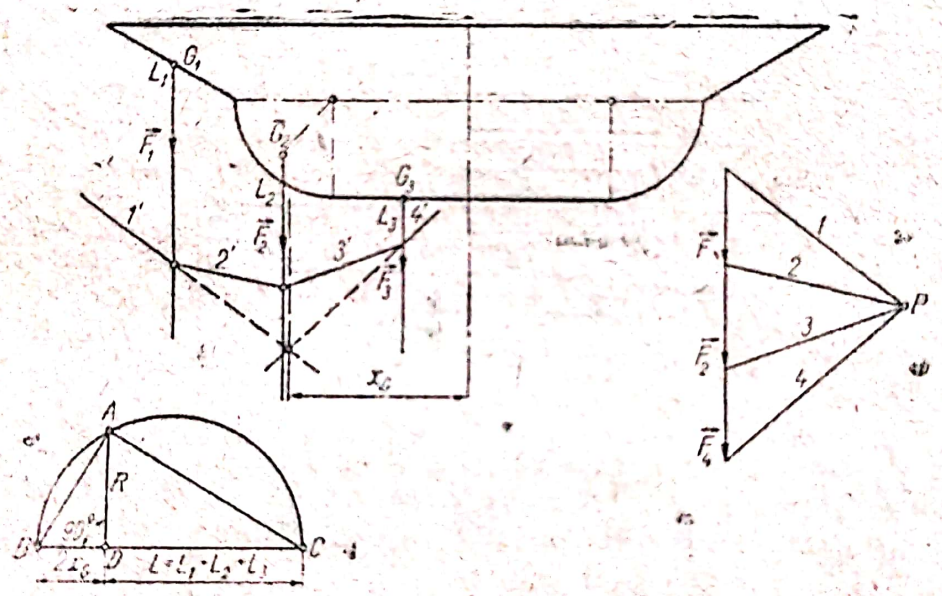


Fig. 2.30 b

Se observă că raza rondelei R este media geometrică între două segmente egale cu $2x_G$, respectiv cu L, adică va corespunde cu înălţimea BD a triunghiului ABC. Din figura 2.30,b rezultă

$$R = 54{,}4 \cdot 2{,}5 = 131 \text{ mm}.$$

C. PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

2.31. Să se determine centrul maselor pentru mecanismul patrulater (fig. 2.31), cunoscînd:

$$AB = ED = 300 \text{ mm}; \; BE = AD = 800 \text{ mm};$$
$$AC_1 = DC_3 = 150 \text{ mm}; \; BC_2 = 400 \text{ mm};$$
$$m_1 = 0{,}2 \text{ kg}; \; m_2 = 1{,}0 \text{ kg}; \; m_3 = 0{,}2 \text{ kg}.$$

R. $x_G = 0{,}528$ m; $y_G = 0{,}222$ m.

Scanned with OKEN Scanner

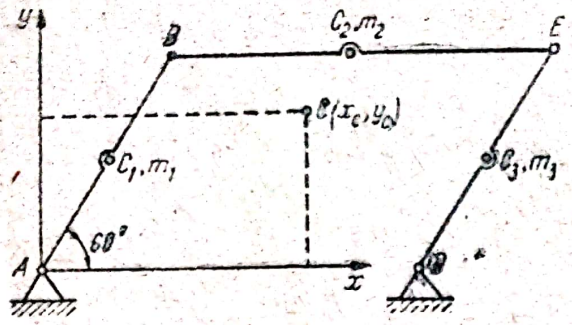


Fig. 2.31

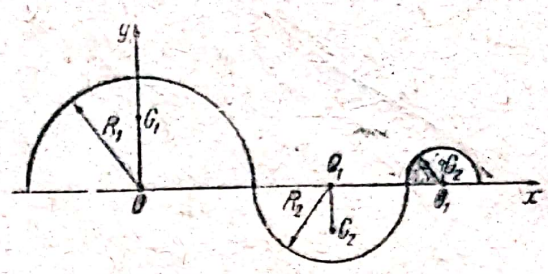


Fig. 2.32

2.32. Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru o bară metalică omogenă, compusă din trei semicercuri de raze: $R_1 = 4a$, $R_2 = 2a$, și $R_3 = a$ (fig. 2.32).

R. $x_G = 3a$; $y_G = \frac{26}{7\pi} a$

2.33. O macara rotitoare are forma și dimensiunile din figura 2.33. Presupunînd că barele sînt toate din același material și de grosime constantă, să se găsească centrul de greutate al părții mobile a macaralei.

R. $x_G = 0{,}72$ m; $y_G = 0{,}62$ m.

2.34. Să se afle coordonatele centrului de greutate al unui cîrlig omogen avînd dimensiunile din fig. 2.34.

R. $x_G = 0{,}35\ R$; $y_G = 0{,}54\ R$.

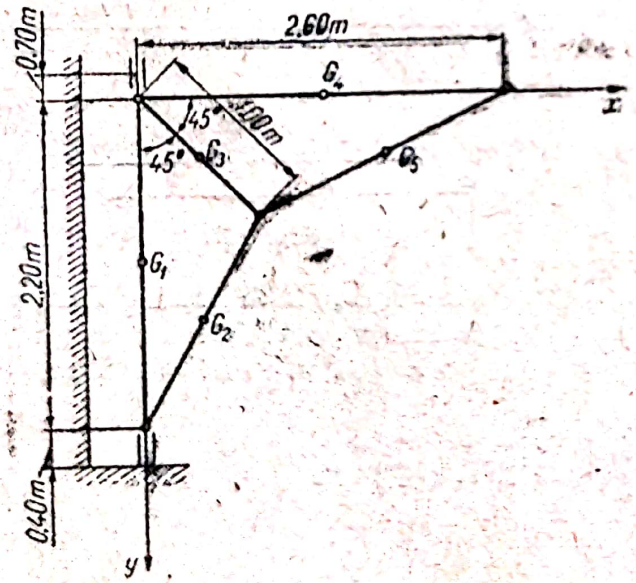


Fig. 2.33

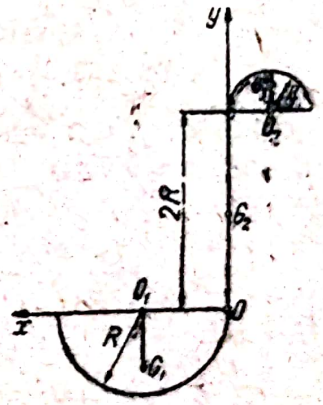


Fig. 2.34

2.35. Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru bara omogenă din fig. 2.35, formată dintr-un semicerc ABA', de rază R, situat în planul yOz, completat cu două segmente de dreaptă AC și $A'C'$ de lungimi egale cu a și paralele cu axa Ox.

R. $x_G = y_G = 0$; $z_G = \frac{2R^2}{\pi R + 2a}$.

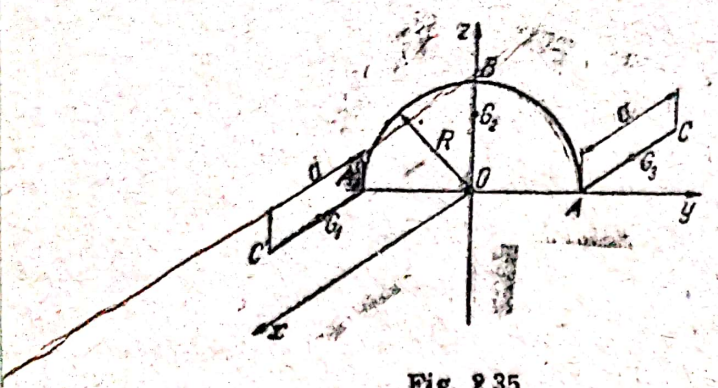


Fig. 2.35

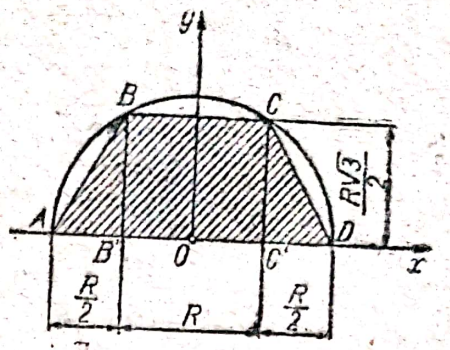


Fig. 2.36

2.36. Să se calculeze poziţia centrului de greutate al unei plăci în formă de semihexagon (fig. 2.36).

R. $x_G = 0$; $y_G = \frac{2R\sqrt{3}}{9}$.

2.37. Să se afle coordonatele centrului de greutate pentru placa avînd forma şi dimensiunile din fig. 2.37 (inel de forma unei jumătăţi de elipsă).

R. $x_G = 0$; $y_G = \frac{4}{3\pi} \frac{ab^2 - a_1 b_1^2}{ab - a_1 b_1}$.

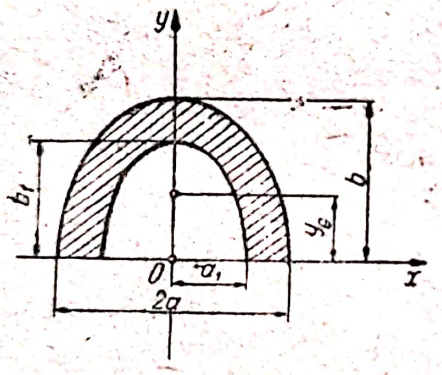


Fig. 2.37

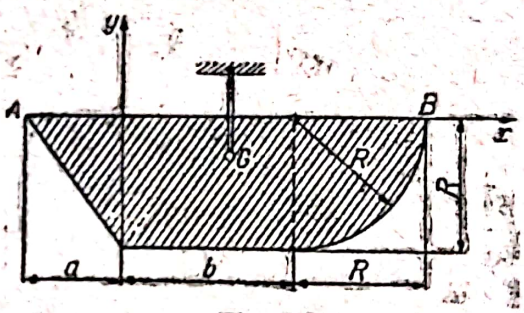


Fig. 2.38

2.38. O placă omogenă are forma din figura 2.38. Să se determine locul de prindere al plăcii, pentru a putea sta în echilibru cu latura AB în poziţie orizontală, ştiind că $a = 3$ m, $b = 0{,}4$ m şi $R = 0{,}5$ m.

$$\text{R. } x_G = \frac{-\frac{a^2R}{6} + \frac{b^2R}{2} + \frac{\pi R^2}{4}\left(b + \frac{4R}{3\pi}\right)}{\frac{aR}{2} + bR + \frac{\pi R^2}{4}} = 0{,}323 \text{ m}$$

$$y_G = -\frac{\frac{aR^2}{6} + \frac{bR^2}{2} + \frac{R^3}{3}}{\frac{aR}{2} + bR + \frac{\pi R^2}{4}} = -0{,}221 \text{ m}.$$

2.39. Să se determine poziţia centrului de greutate la secţiunea longitudinală a unei chei fixe (fig. 2.39).

$$\text{R. } x_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{4R^3 - 3r^2 + 3ab\,(2R + a)}{2R^2 - 3\sqrt{3}r^2 + 4ab}$$

Scanned with OKEN Scanner

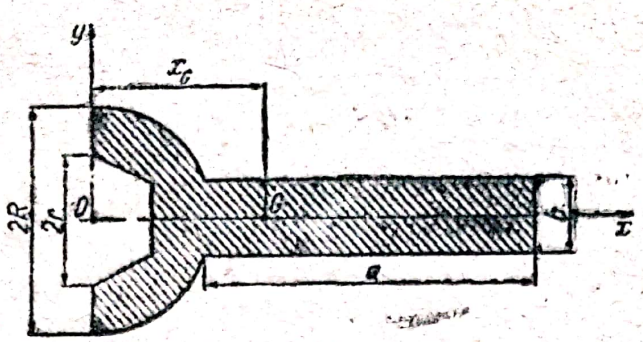


Fig. 2.39

2.40. Să se determine centrul de greutate pentru secțiunea compusă din fig. 2.40.

R. $y_G = 5{,}45$ cm.

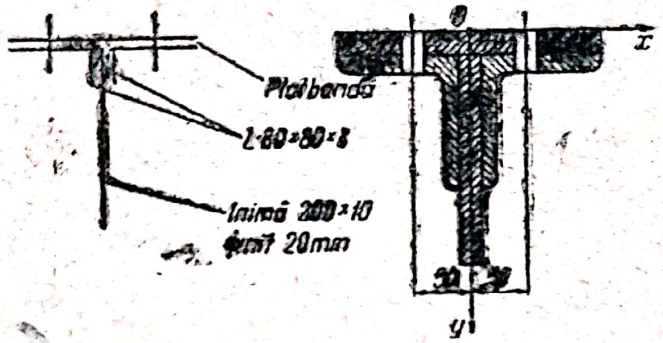


Fig. 2.40

2.41. Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru placa de grosime δ, constantă, din fig. 2.41, cunoscînd că este formată din materiale de greutăți specifice γ_1 și γ_2.

R. $x_G = \frac{a}{3} \cdot \frac{2\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$; $y_G = \frac{b}{3} \cdot \frac{\gamma_1 + 2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$

2.42. Să se determine coordonatele centrului de greutate al unei secțiuni neomogene de beton armat cu armături din oțel profilat, avînd dimensiunile din fig. 2.42, socotind greutatea specifică a betonului $\gamma_1 = 2{,}2$ daN/dm³ și a oțelului $\gamma_2 = 7{,}8$ daN/dm³.

R. $x_G = 0$; $y_G = \frac{y_1 A_1 \gamma_1 + y_2 A_2 \gamma_2 - y_2 A_2 \gamma_1}{A_1 \gamma_1 + A_2 \gamma_2 - A_2 \gamma_1} = 38{,}2$ cm.

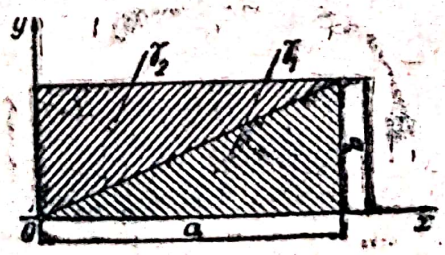


Fig. 2.41

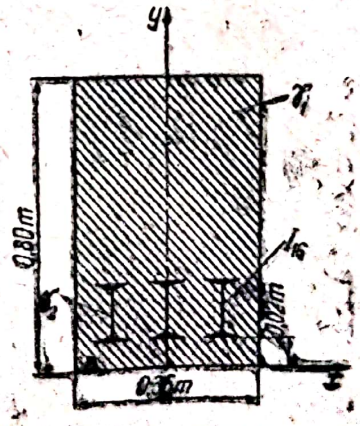


Fig. 2.42

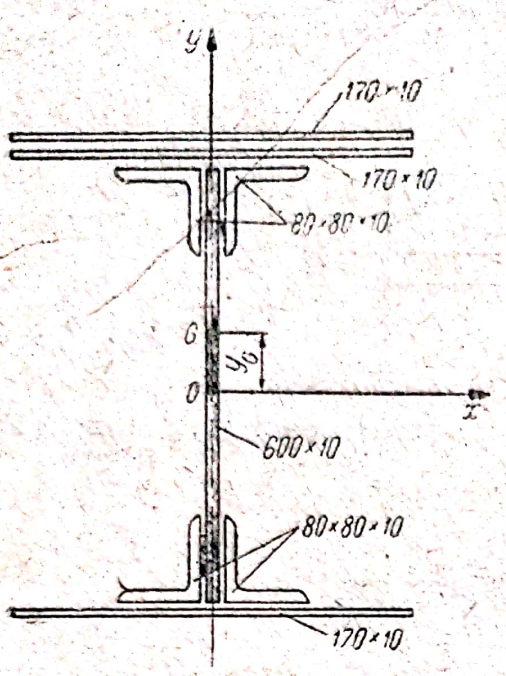


Fig. 2.43

2.43. Să se determine centrul de greutate pentru secțiunea compusă din figura 2.43.

R. $x_G = 0$; $y_G = 3{,}1$ cm.

2.44. Să se determine centrul de greutate al suprafeței haşurate din suprafața lenticulară $COBD$ (fig. 2.44).

R. $x_G = \dfrac{5R}{2(4\pi - 3\sqrt{3})}$; $y_G = -\dfrac{R}{2}$.

2.45. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale plăcii mărginită de astroida

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; \quad x > 0, \; y > 0.$$

R. $x_G = \dfrac{256a}{315\pi}$; $y_G = \dfrac{256a}{315\pi}$

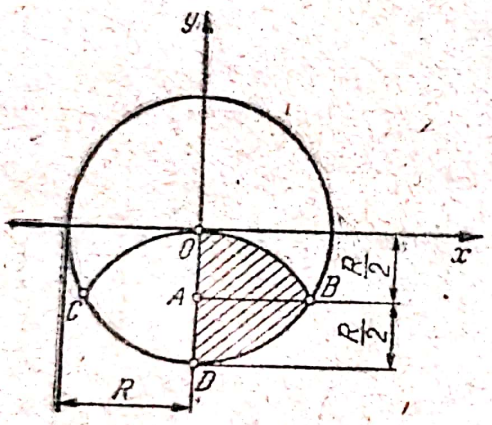


Fig. 2.44

2.46. Să se determine centrul de greutate al suprafeței OAB haşiurate din fig. 2.46, cuprinsă între axa Ox și curbele $y = a \sin x$ și $y = a \cos x$.

R. $x_G = \dfrac{\pi a}{4}$; $y_G = \dfrac{(\pi - 2)a}{8(2 - \sqrt{2})}$.

2.47. Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene din fig. 2.47.

R. $x_G = 1{,}72\ a$; $y_G = 0{,}462\ a$; $z_G = 0{,}975\ a$.

2.48. Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru corpul omogen din fig. 2.48, ale cărui dimensiuni sînt cunoscute.

R. $x_G = \dfrac{8bd + 12dc + 5c^2}{4(4b + 3c)}$; $y_G = \dfrac{a(8b + 7c)}{4(4b + 3c)}$; $z_G = \dfrac{4b^2 + 3dc}{2(4b + 3c)}$.

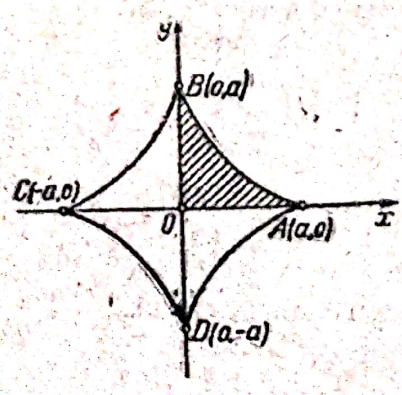


Fig. 2.45

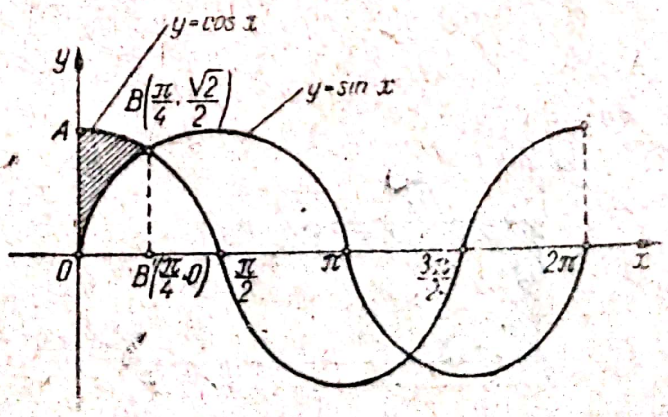


Fig. 2.46

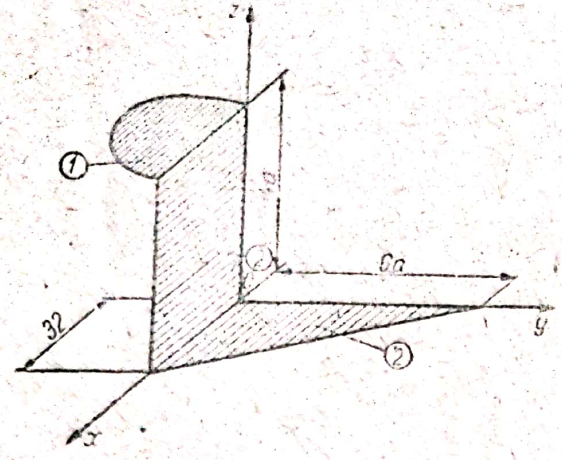


Fig. 2.47

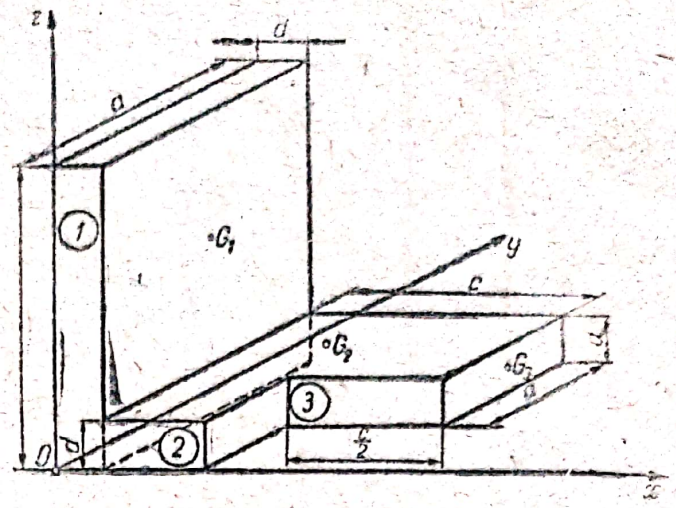


Fig. 2.48

2.49. Să se determine centrul de greutate al unui arbore de lungime $2l$ și rază r, având două roți pline la extremități (fig. 2.49).

R. $x_G = \dfrac{R_2^2 a_2 (a_2 + l) - R_1^2 a_1 (a_1 + l)}{R_1^2 a_1 + r^2 l + R_2^2 a_2}$.

2.50. Să se determine centrul de greutate al volumului care rămîne dintr-un con de rază R și unghiul la vîrf 2α, din care se scade o semisferă de rază r tangentă la con, cu centrul pe baza conului; se dau α și R (fig. 2.50).

R. $x_G = y_G = 0$; $z_G = \dfrac{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4 \operatorname{tg} \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha)} R$.

2.51. Să se determine coordonatele centrului de greutate al ansamblului de corpuri din fig. 2.51.

R. $x_G = 0$; $y_G = -\dfrac{4R}{13\pi}$; $z_G = \dfrac{11h}{52}$

2.52. Lagărul în care se rotește un ax vertical este alcătuit dintr-un locaș cilindric A, săpat într-o semisferă de bronz B, care, la rîndul ei,

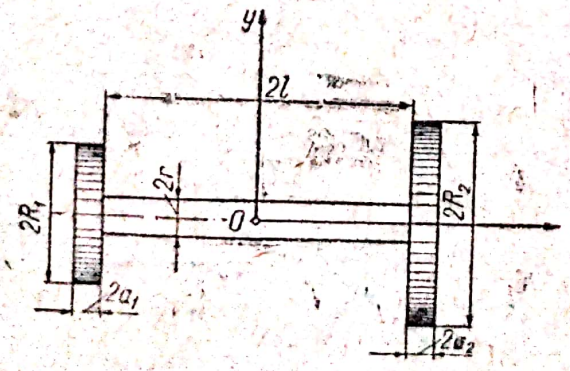


Fig. 2.49

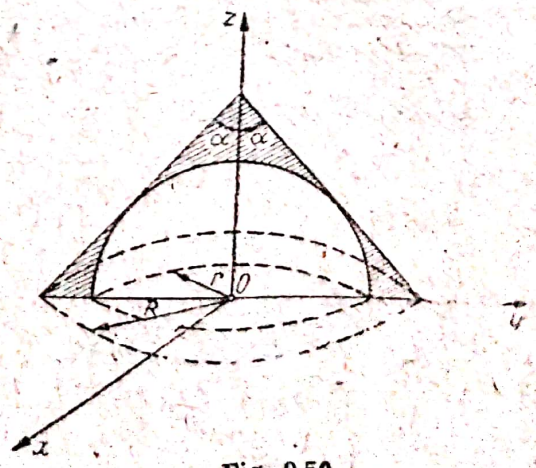


Fig. 2.50

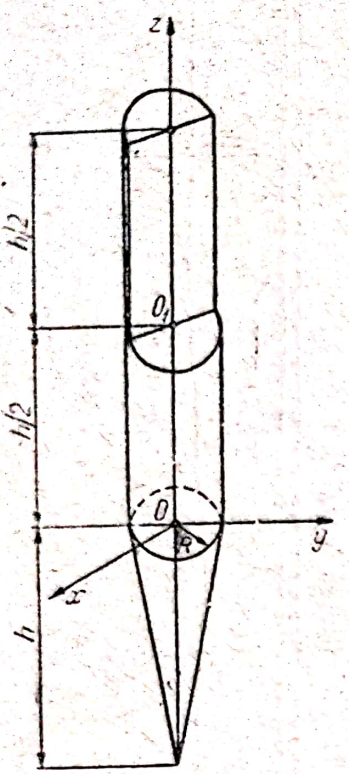


Fig. 2.51

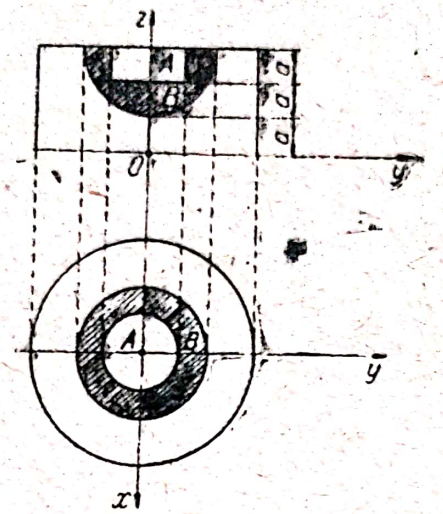


Fig. 2.52

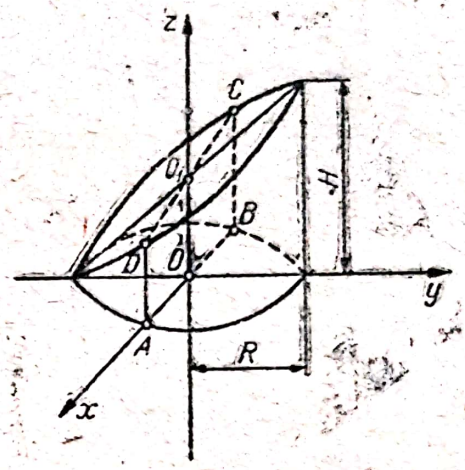


Fig. 2.53

este fixată într-un cilindru de oțel D. Dimensiunile sînt date în figura 2.52. Greutatea specifică a bronzului este γ_1 daN/dm³ și a oțelului, γ_2 daN/dm³. Să se afle centrul de greutate al ansamblului (fig. 2.52).

R. $z_G = \frac{3}{2}\,\frac{33\gamma_2 + 43\gamma_1}{49\gamma_2 + 29\gamma_1}\,a.$

2.53. Să se determine centrul de greutate al jumătății de cilindru circular omogen din figura 2.53, de rază R și înălțime H.

R. $x_G = 0\,;\ y_G = \frac{R}{4}\,;\ z_G = \frac{5H}{16}\,.$

2.54. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al optimii de elipsoid din figura 2.54.

R. $x_G = \frac{3}{8}\,a\,;\ y_G = \frac{3}{8}\,b\,;\ z_G = \frac{3}{8}\,c.$

2.55. Să se determine centrul de greutate al unui rezervor de forma unui paraboloid, plin cu apă, știind că $R = 8$ m și $h = 5$ m (fig. 2.55).

R. $x_G = 0\,;\ y_G = 0\,;\ z_G = \frac{2}{3}\,h = 3{,}33$ m.

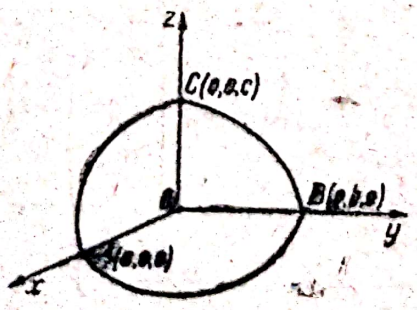


Fig. 2.54

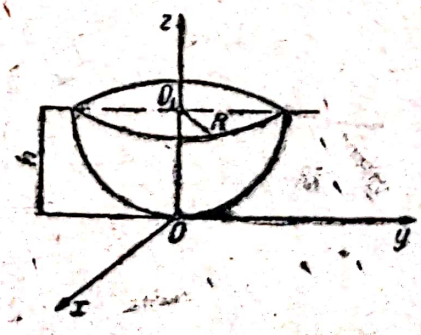


Fig. 2.55

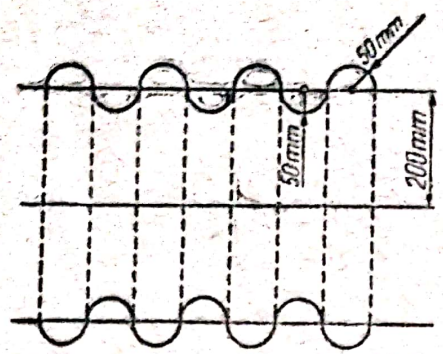


Fig. 2.56

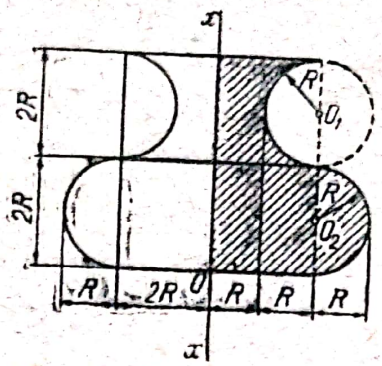


Fig. 2.57

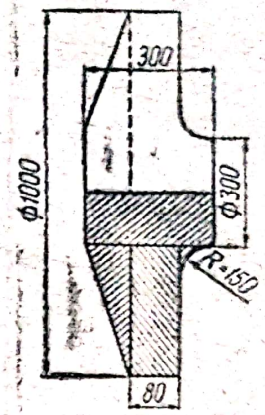


Fig. 2.58

2.56. O bucată de țeavă circulară are secțiunea efectuată prin ax ca în figura 2.56. Să se determine suprafața acestei bucăți de țeavă presupunînd că grosimea ei este neglijabilă.

R. $A = 100\pi(10\pi + 1)$ cm².

2.57. Un corp de revoluție omogen are forma și dimensiunile din figura 2.57. Să se determine aria totală și volumul corpului.

R. $A = 8\pi R^2(\pi + 1)$; $V = \frac{56}{3}\pi R^3$.

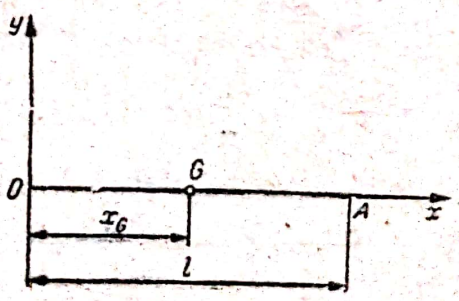
2.58. Să se determine volumul rotorului unui compresor, avînd dimensiunile din figura 2.58.

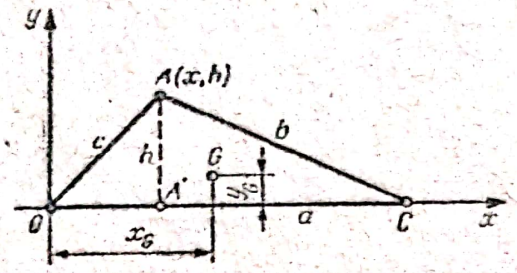
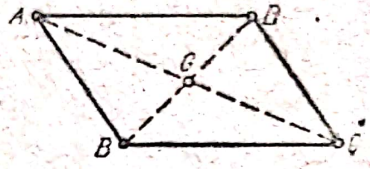
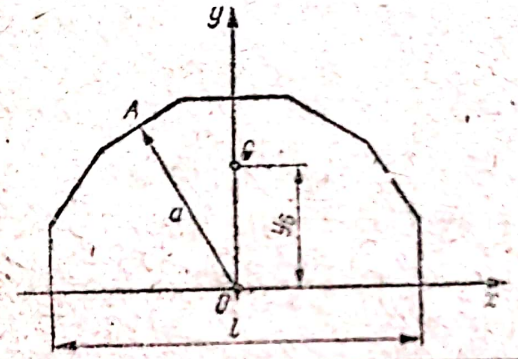
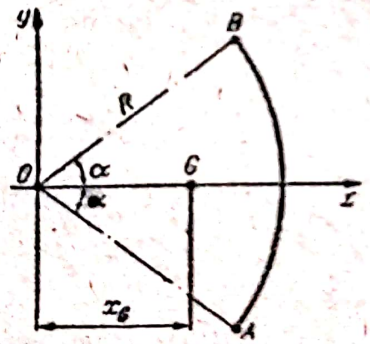
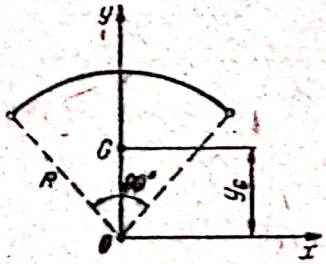
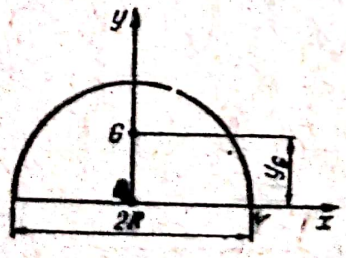
R. $V = 104\,500$ cm³.

2.59. Să se determine centrele de greutate ale corpurilor din tabelul 2.59.

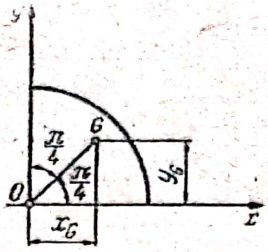
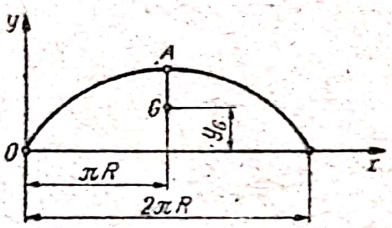
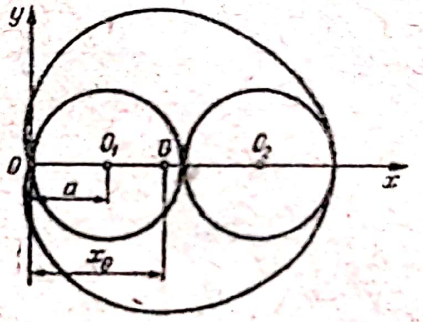
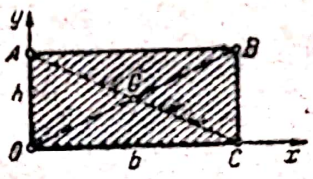
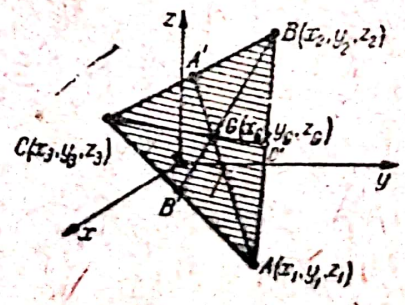
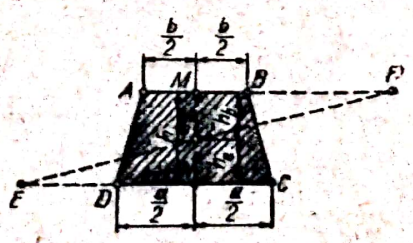
Tabelul 2.59

Centre de greutate

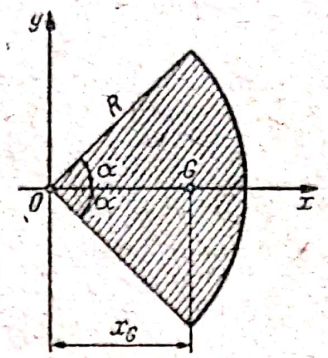
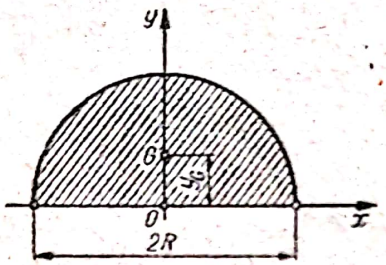
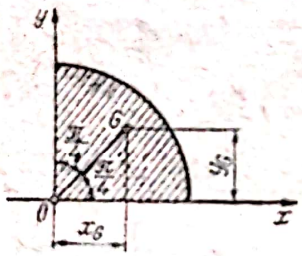
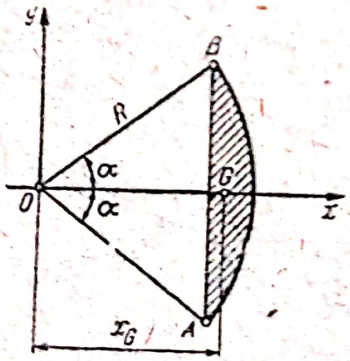
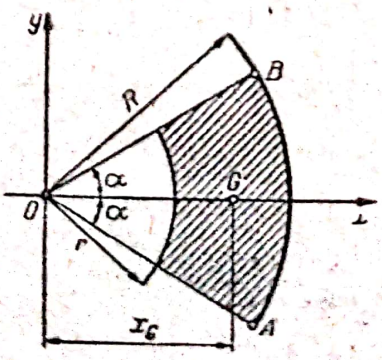
	Corpul	Figura și sistemul de coordonate	Coordonata centrului de greutate
0	1	2	3
LINII	Linia dreaptă		$x_G = \frac{1}{2}l$

0	1	2	3
LINII	Conturul triunghiului		Intersecția bisectoarelor triunghiului median $x_G = \frac{a(a+2b)+x(c-b)}{2(a+b+c)}$ $y_G = \frac{h}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c}$
	Conturul paralelogramului (dreptunghiului, rombului)		La intersecția diagonalelor
	Conturul poligonul regulat		$y_G = OG = \frac{a \cdot l}{L}$ a — apotema OA l — proiecția conturului poligonal pe axa Ox L — lungimea conturului
	Arcul de cerc de rază R și unghiul la centru 2α		$x_G = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $y_G = 0$ arc $\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$; semiunghiul la centru în radiani.
	Sfert de cerc de rază R		$x_G = 0$; $y_G = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R.$
	Semicercul de rază R		$x_G = 0$; $y_G = \frac{2R}{\pi} = 0{,}6366R$

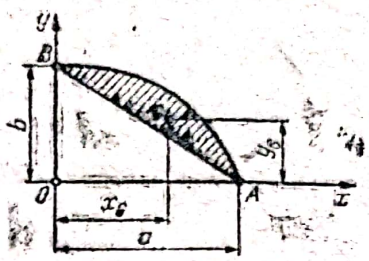
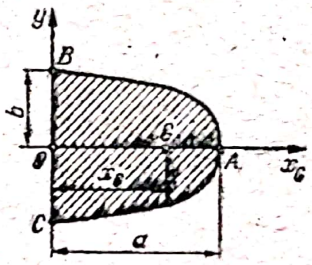
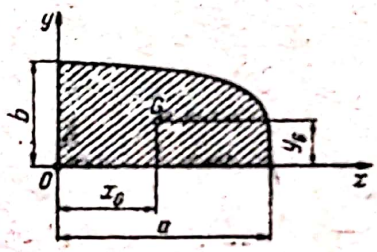
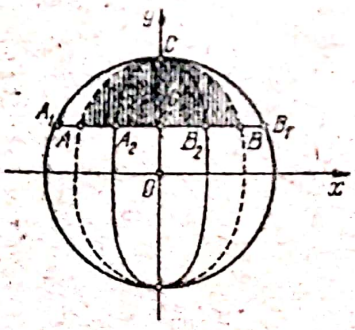
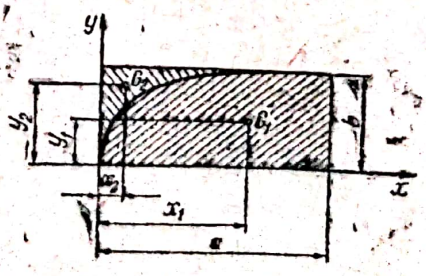
Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
LINII	Sfert de cerc de rază R		$x_G = y_G = \frac{2}{\pi} R$
	Cicloida $x = R(\varphi - \sin\varphi)$, $y = R(1 - \cos\varphi)$		$x_G = \pi R$; $y_G = \frac{3}{4} R$ R — raza cercului generator; $R = \frac{1}{2} \overline{AB}$.
	Cardioida		$x_G = \frac{8}{5} a$; $y_G = 0$.
	Dreptunghiul		$x_G = \frac{b}{2}$; $y_G = \frac{h}{2}$.
Suprafeţe	Triunghiul. Centrul de greutate G se găseşte la intersecţia medianelor. Distanţa dintre centrul de greutate şi o latură este egală cu o treime din înălţimea corespunzătoare		Dacă virfurile au coordonatele x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, coordonatele centrului de greutate sînt: $x_G = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$ $y_G = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$ $z_G = \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$
	Trapezul. Centrul de greutate se găseşte pe segmentul dintre centrele M şi N ale laturilor paralele a şi b.		Distanţa h_a şi h_b sînt: $h_a = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$ $h_b = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$

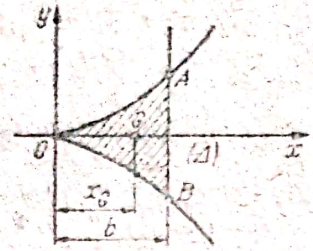
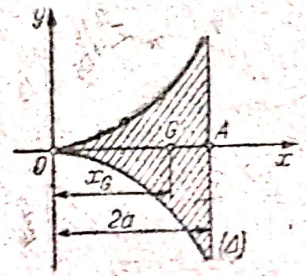
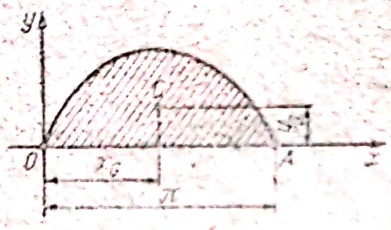
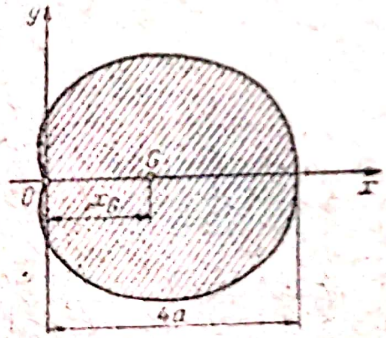
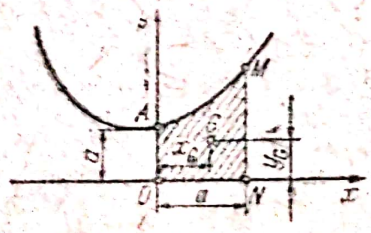
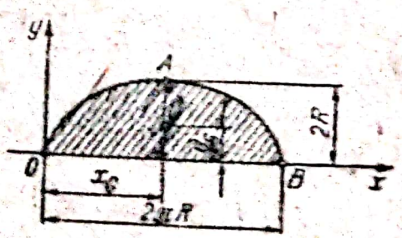
Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
Suprafețe	Sectorul de cerc, cu arc $\alpha = \frac{\pi\alpha^0}{180^\circ}$ de rază R.		$x_G = \frac{2}{3} \cdot R \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 38{,}1972 \frac{R \sin\alpha}{\alpha^\circ}$; $y_G = 0$
	Semicerc		$x_G = 0$; $y_G = \frac{4R}{3\pi} = 0{,}4244R$
	Sfert de cerc		$x_G = y_G = \frac{4R}{3\pi} = 0{,}4244\ R$
	Segmentul de cerc de rază R și unghiul la centru 2α		$x_G = \frac{4}{3} \cdot \frac{R \sin^3\alpha}{\text{arc}\,2\alpha - \sin 2\alpha}$ $y_G = 0.$
	Porțiunea de coroană circulară de raze R și r		$x_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\text{arc}\,\alpha} = 38{,}1972 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha^\circ}$

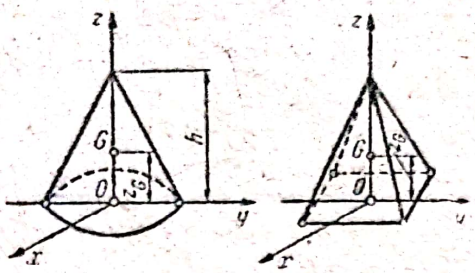
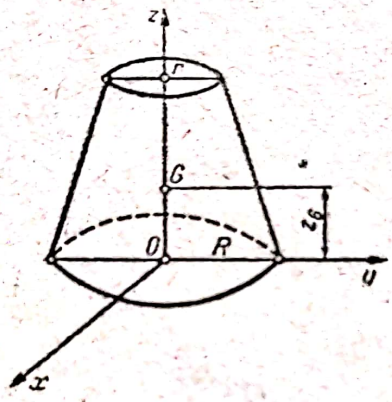
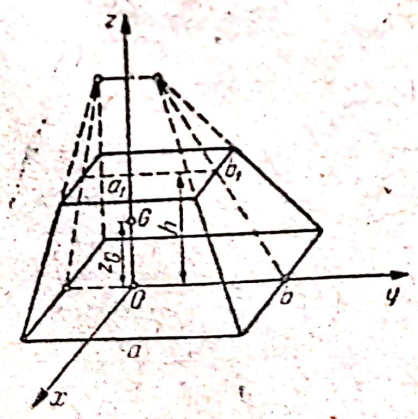
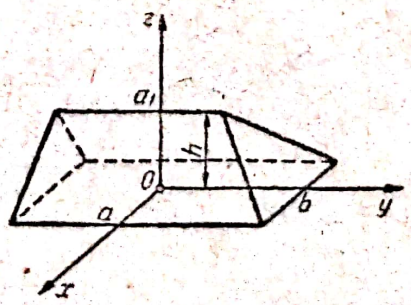
Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
	Segment de elipsă		$x_G = \frac{2a}{3(\pi - 2)}$ $y_G = \frac{2b}{3(\pi - 2)}$
	Semielipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$		$x_G = \frac{4a}{3\pi}$ $y_G = 0$
	Sfertul de elipsă		$x_G = \frac{4a}{3\pi}$ $y_G = \frac{4b}{3\pi}$
	Segmentul de elipsă. Centrele de greutate ale segmentelor simetrice de elipsă A_1B_1C și A_2B_2C coincid cu centrul de greutate al segmentului ABC al unui cerc, al cărui diametru este axa principală perpendiculară pe coarda segmentului de elipsă. Această relație se bazează pe faptul că elipsa este o figură afină cercului. În general avem teorema: în orice reprezentare afină a unei figuri plane, punctul care reprezintă centrul de greutate este centrul de greutate al figurii imagine afină.		
	Suprafața de parabolă		$x_1 = \frac{3}{5}a$ $y_1 = \frac{3}{8}b$ $x_2 = \frac{3}{10}a$ $y_2 = \frac{3}{4}b$

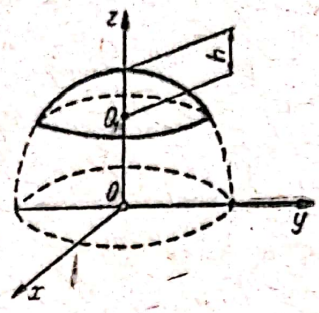
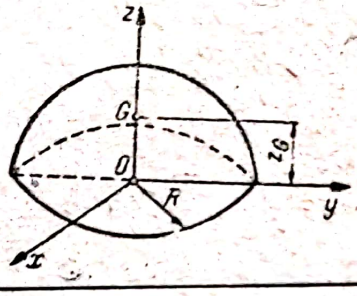
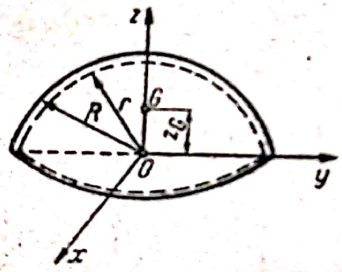
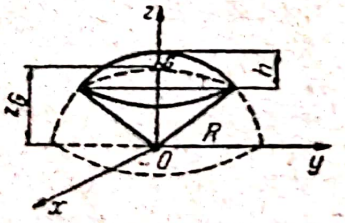
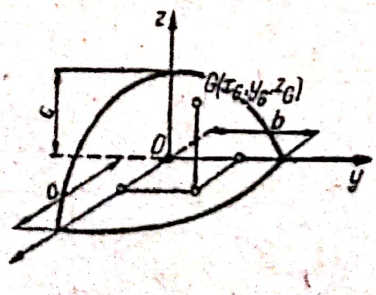
Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
Suprafețe	Parabola semicubică $ay^2 = x^3$ Aria suprafeței OAB		$x_G = \frac{5}{7} b$
	Cisoida lui Diocles, de ecuație $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$		$x_G = \frac{5}{3} a$ G fiind centrul de greutate al ariei suprafeței limitată de ramurile și asimptota ei (Δ)
	Sinusoida $y = \sin x$		$x_G = \frac{\pi}{2}$; $y_G = \frac{\pi}{8}$.
	Cardioida		$x_G = \frac{11}{6} a$ $y_G = 0$
	Aria suprafeței $OAMN$ a lănțișorului $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$		$x_G = \frac{2a}{e + 1}$ $y_G = \frac{a}{8} \cdot \frac{e^4 + 4e^2 - 5}{e(e^2 - 1)}$
	Cicloida		$x_G = \pi R$ $y_G = \frac{5}{6} R$.

Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
Volume	Conul și piramida		$x_G = y_G = 0$ $z_G = \frac{h}{4}$
	Trunchiul de con circular. Dacă h este înălțimea trunchiului de con, R și r razele bazelor, distanța dintre centrul de greutate și baza cu raza R este z_G.		$x_G = y_G = 0$ $z_G = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$
	Trunchiul de piramidă de înălțime h și A și B ariile bazelor mare și respectiv mică.		$x_G = y_G = 0$ $z_G = \frac{h}{4} \cdot \frac{A + 2AB + 3B}{A + AB + B}$
	Pana		$x_G = y_G = 0$ $z_G = \frac{h}{2} \frac{(a + a_1)}{2a + a_1}$

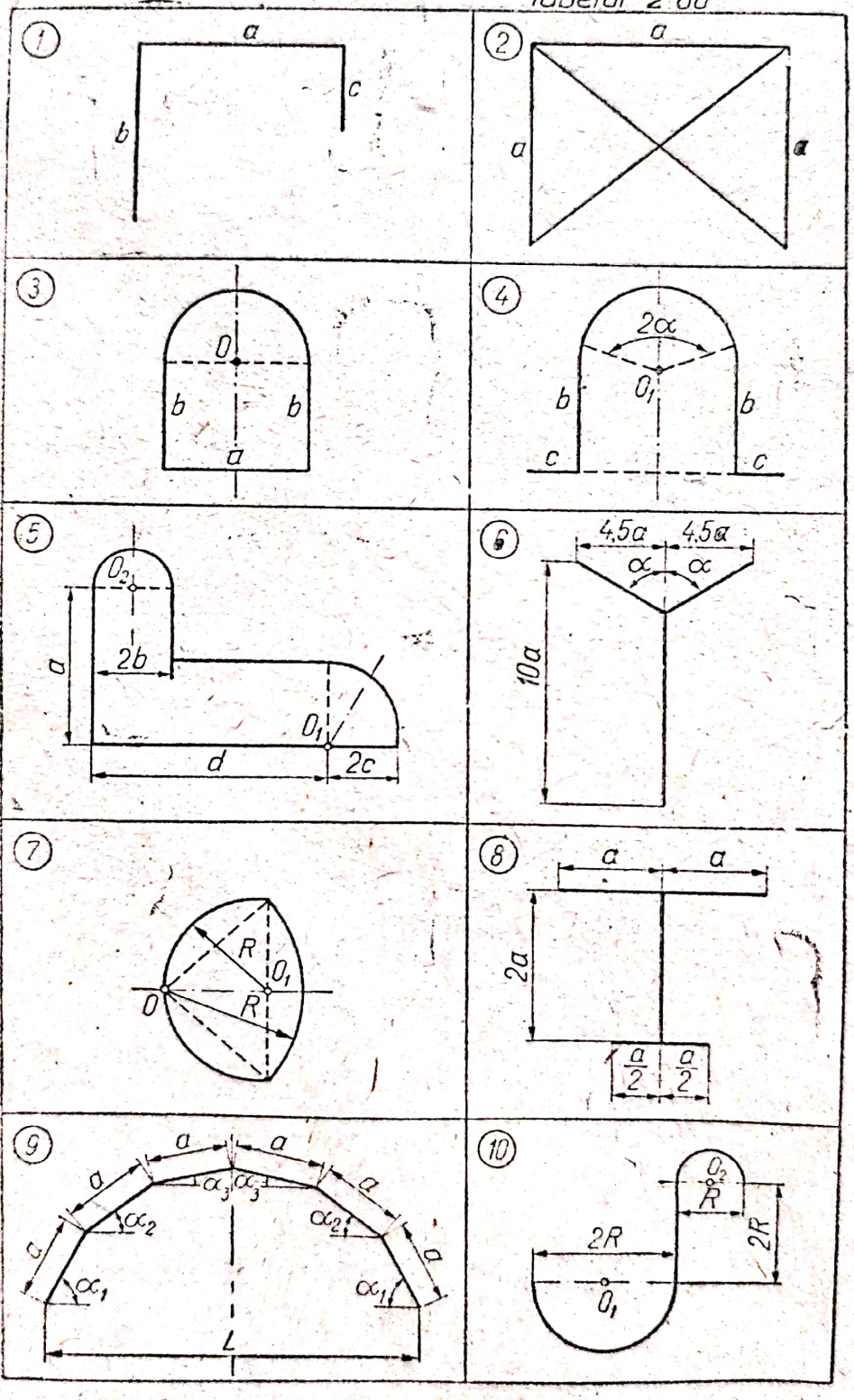
Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
Volume	Calota sferică		$x_G = y_G = 0$ $z_G = \frac{3}{4}\frac{(2R-h)^2}{3R-h}$ Formula este valabilă și pentru elipsoidul de revoluție de axă egală cu diametrul sferei.
	Semisfera		$x_G = y_G = 0$ $z_G = \frac{3}{8}R$
	Semisfera goală		$x_G = y_G = 0$ $z_G = \frac{3}{8}\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$
	Sectorul sferic		$x_G = y_G = 0$ $z_G = \frac{3}{8}(2R - h)$
	Elipsoid octant		$x_G = \frac{3}{8}a$ $y_G = \frac{3}{8}b$ $z_G = \frac{3}{8}c$

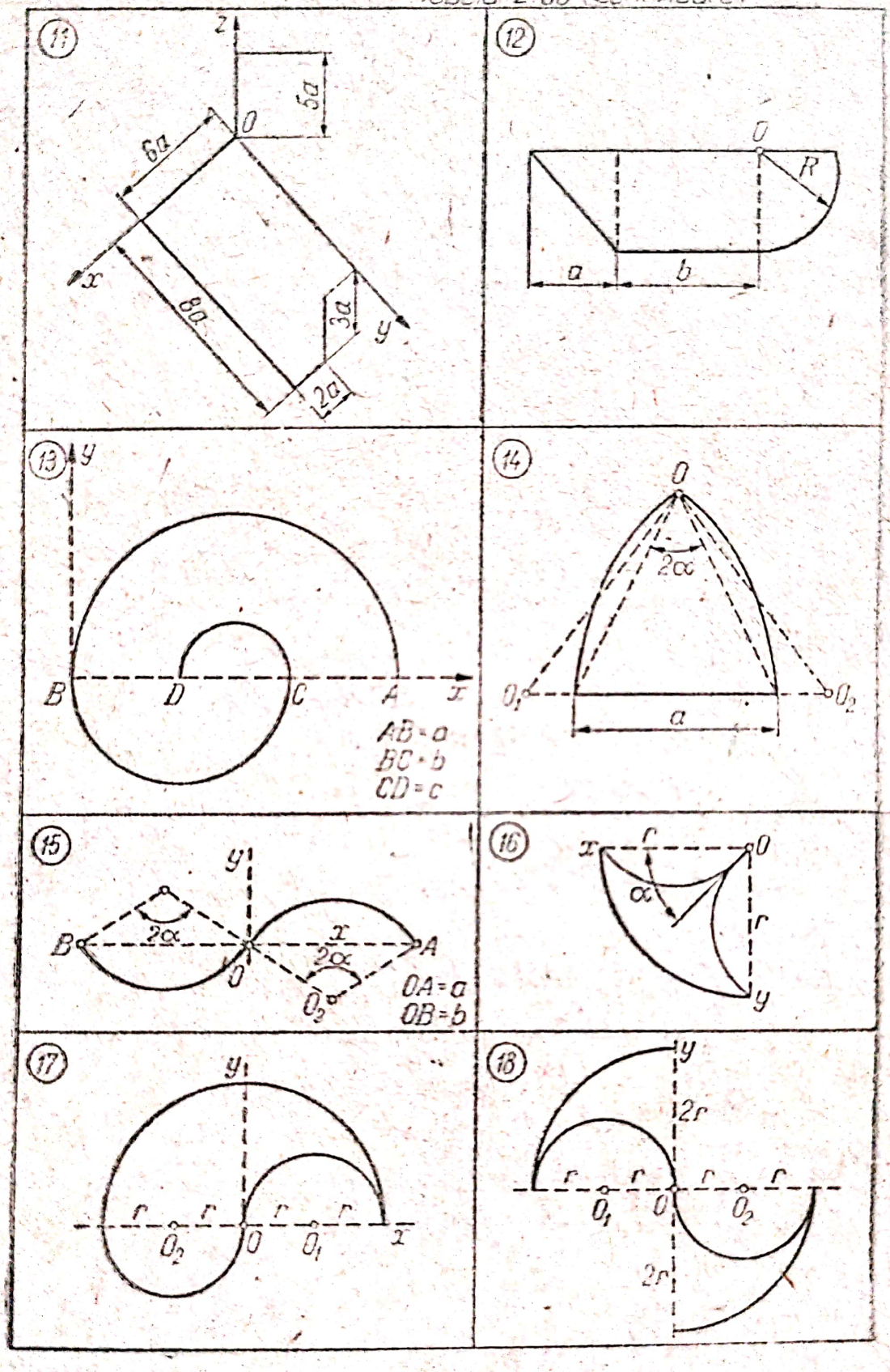
Scanned with OKEN Scanner

2.60. Să se determine centrele de greutate ale liniilor materiale din tabelul 2.60.

Tabelul 2.60

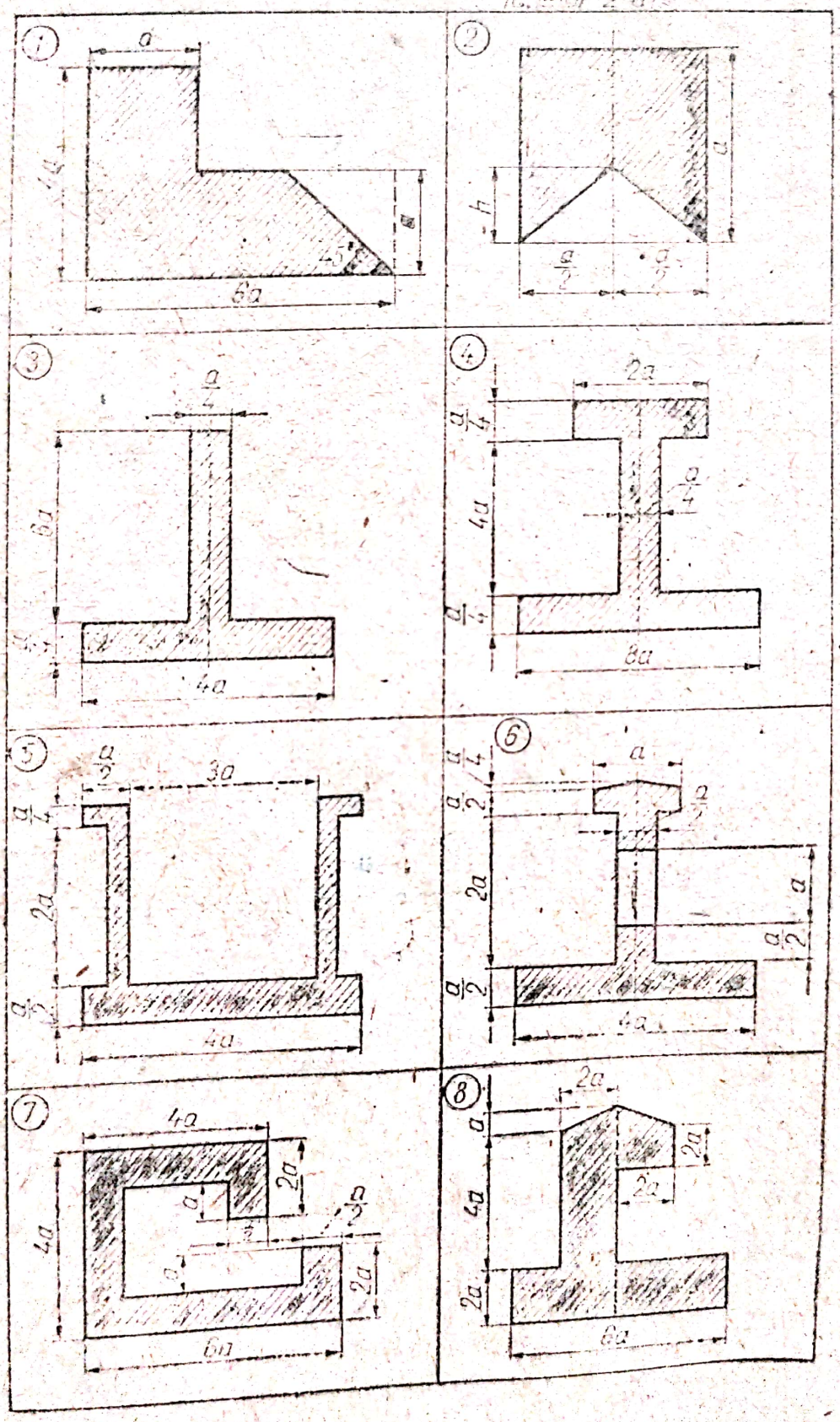


Tabelul 2.60 (continuare)

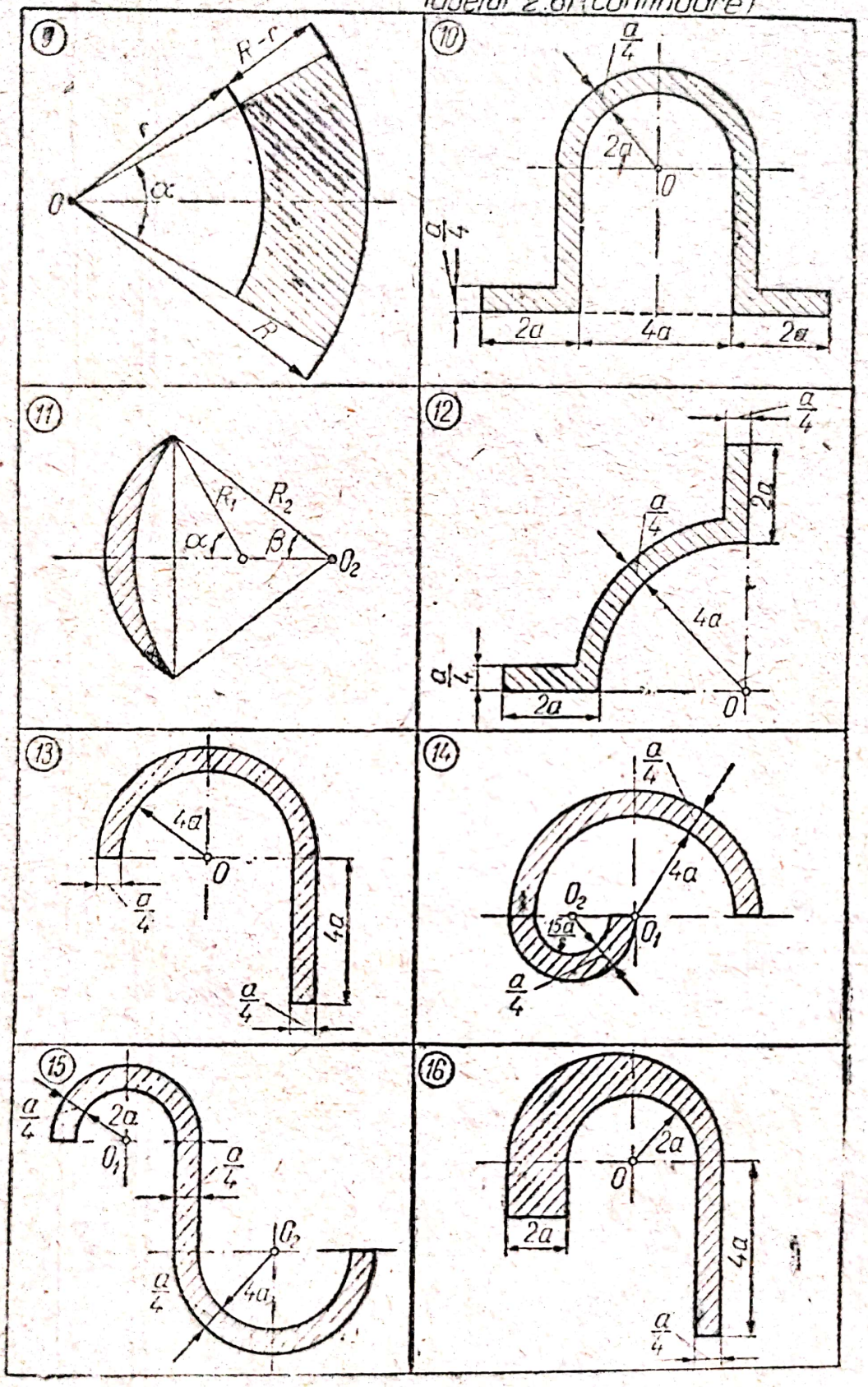


2.61. Să se determine centrele de greutate ale suprafețelor materiale din tabelul 2.61.

Tabelul 2.61

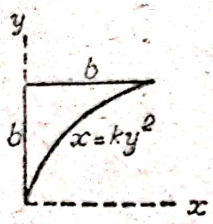
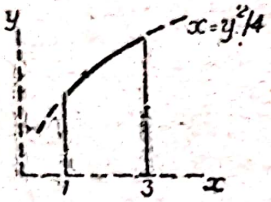
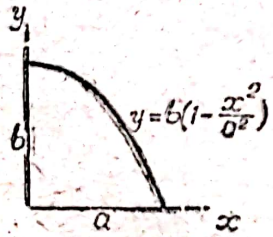
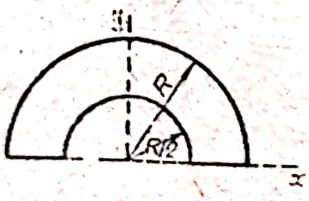
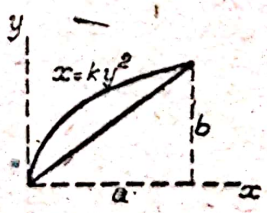
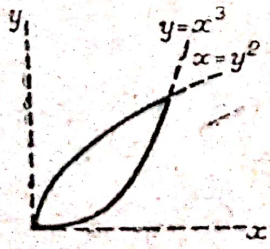


Tabelul 2.61 (continuare)

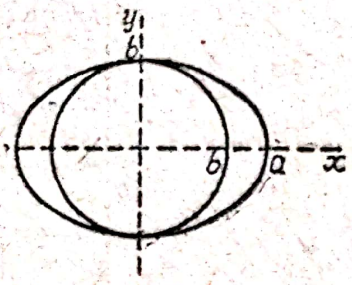
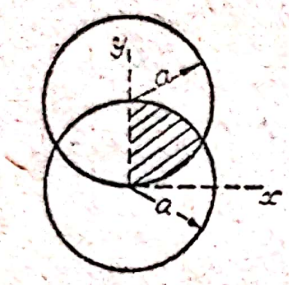
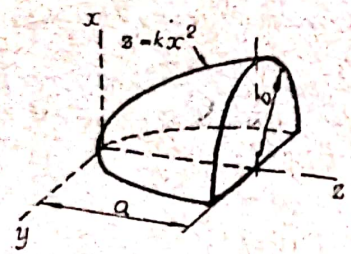
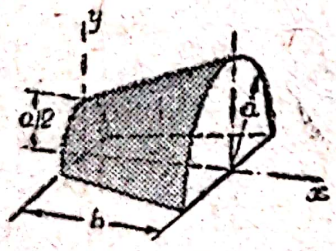
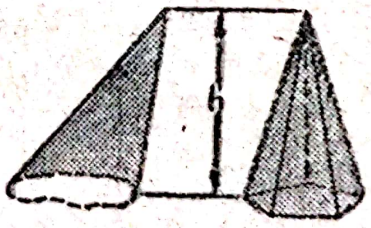
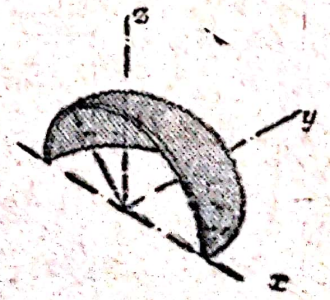


2.62. Să se rezolve problemele recapitulative din tabelul 2.62.

Tabelul 2.62

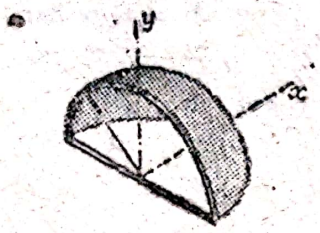
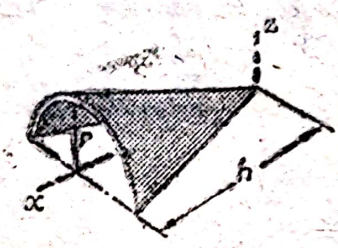
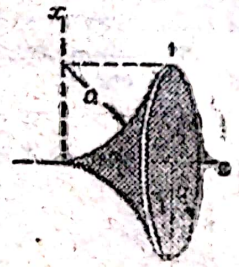
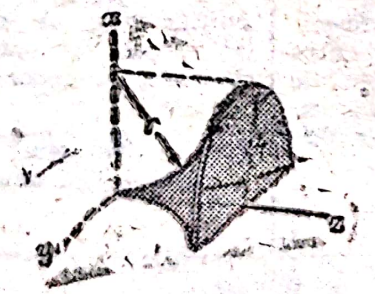
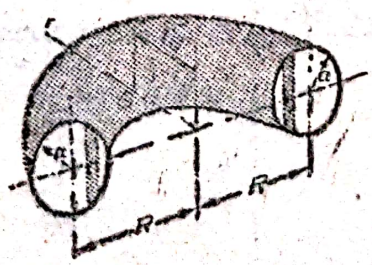
Nr. crt.	Figura	Se cunoaște	Să se determine
0	1	2	3
1		$x = ky^2$	Coordonatele c.d.g. al ariei din figură. R. $x_G = 3b/10$, $y_G = 3b/4$.
2		$x = y^2/4$	c.d.g. al ariei de sub curbă. R. $x_G = 2{,}09$ $y_G = 1{,}43$
3		$y = b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$	Coordonatele c.d.g. al ariei de sub curbă. R. $x_G = 3a/8$ $y_G = 2b/5$
4		Raza exterioară R și raza interioară $R/2$.	Ordonata y_G pentru c.d g al ariei semiinelului prin integrare directă. R. $y_G = 14\ R/(9\pi)$.
5		$x = ky^2$	Coordonatele c.d.g. al ariei din figură. R. $x_G = 2\ a/5$ $y_G = b/2$.
6		$x = y^2$ $y = x^2$	Coordonatele c.d.g. al ariei cuprinsă între cele două curbe. R. $x_G = \frac{12}{25}$, $y_G = \frac{3}{7}$

Scanned with OKEN Scanner

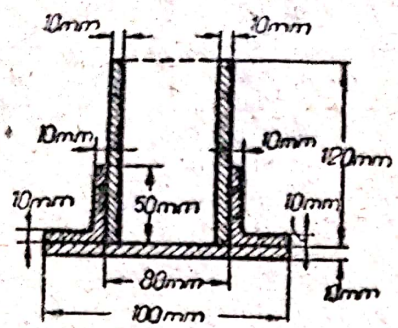
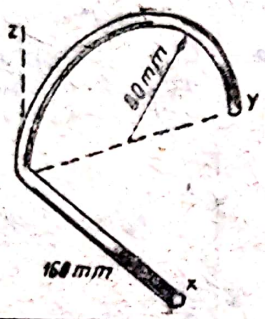
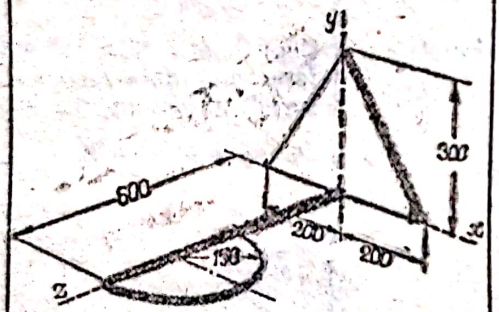
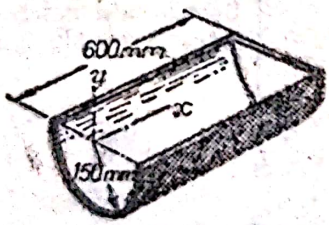
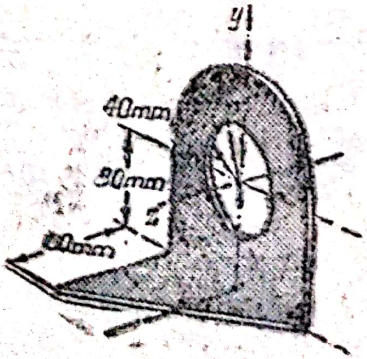
0	1	2	3
7		Cercul de rază b și elipsa cu semiaxele a, b.	Abscisa c.d.g. al suprafeței dintre semielipsă și semicerc. R. $x_G = 4(a + b)/(3\pi)$.
8		Cercurile de rază a	Coordonatele c.d.g. al suprafeței haşurate din figură. R. $x_G = \dfrac{5R}{2(4\pi - 3\sqrt{2})}$, $y_G = \dfrac{R}{2}$
9		$z = kx^2$	Cota c.d.g. al volumului obținut prin rotirea ariei de sub parabolă, cu 180° în jurul axei z. R. $z_G = 2a/3$.
10		a și h	Ordonata c.d.g. al volumului obținut prin rotirea ariei trapezului, cu 180° în jurul axei x. R. $y_G = 15a/(14\pi)$.
11		Înălțimea h.	Cota c.d.g. al volumului oricărui con sau oricărei piramide de înălțime h și bază oarecare. R. $z_G = h/4$.
12		Raza sferei r.	Cota c.d.g. al suprafeței materiale omogene din figură. R. $z_G = r/2$

Scanned with OKEN Scanner

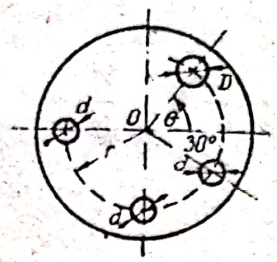
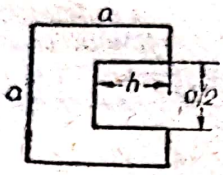
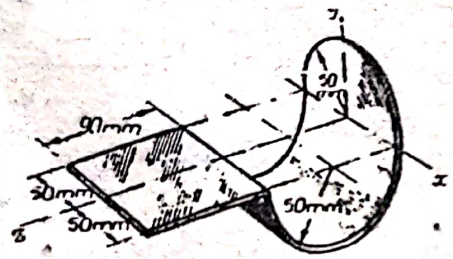
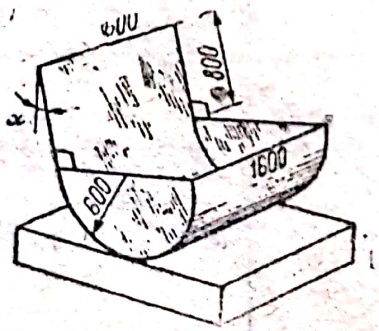
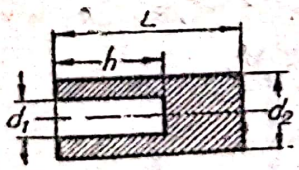
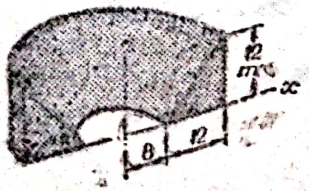
Tabelul 2.62 (continuare)

0	1	2	3
13		Raza sferei r	Coordonatele x_G și y_G ale c.d.g. al suprafeței materiale omogene formată dintr-un sfert de sferă și o bază semicirculară. R. $x_G = (3\pi + 4)r/(9\pi)$. $y_G = r/3$.
14		Raza r și înălțimea h.	Coordonatele x_G și z_G ale c.d.g. al suprafeței materiale omogene în formă de semicon. R. $x_G = 2h/3$ $z_G = 4r/(3\pi)$.
15		Razele clopotului.	Coordonata c.d.g. al suprafeței materiale omogene, în formă de clopot, din figură. R. $z_G = a/(\pi - 2)$.
16		Razele semiclopotului.	Coordonata c.d.g. al suprafeței materiale omogene de forma unui semiclopot. R. $x_G = \frac{a}{\pi}\left(\frac{3\pi - 8}{\pi - 2}\right)$
17		Razele a și R ale jumătății unui tor omogen din oțel.	Poziția c.d.g. pentru jumătatea de tor. R. $r_G = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$

Scanned with OKEN Scanner

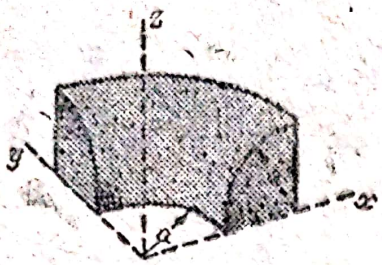
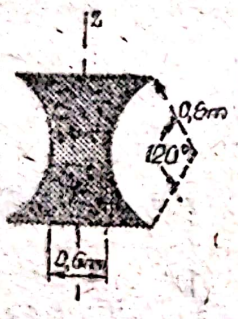
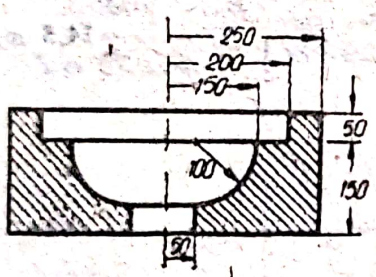
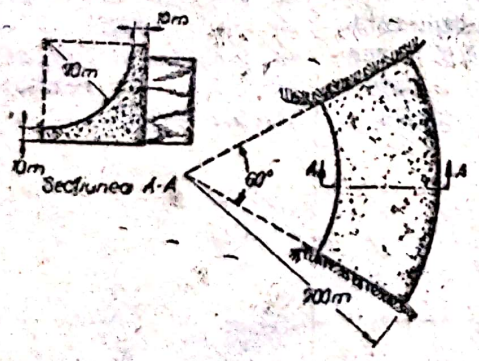
0	1	2	3
18		Dimensiunile structurii din figură.	Distanța H de la bază la c.d.g. al structurii. R. $H = 39{,}3$ mm.
19		Dimensiunile barei omogene de secțiune constantă.	Coordonatele c.d.g. R. $x_G = 31{,}1$ mm $y_G = 48{,}9$ mm $z_G = 31{,}1$ mm
20		Masele celor trei corpuri asamblate prin sudură: 4,2 kg — placa triunghiulară; 2,2 kg-bara; 2,5 kg-placa semicirculară.	Coordonatele c.d.g. al ansamblului format din cele trei corpuri. R. $x_G = 17{,}9$ mm $y_G = 47{,}2$ mm $z_G = 200{,}6$ mm
21		Masele specifice: 24 kg/m² pentru vana de tablă; 36 kg/m² pentru capacul semicircular.	Poziția c.d.g. al ansamblului format din vana semicilindrică și capacul semicircular. R. $x_G = 348$ mm; $y_G = -90{,}5$ mm.
22		Consola executată din tablă omogenă de grosime constantă.	Coordonatele c.d.g. ale consolei din figură. R. $x_G = -8{,}3$ mm $y_G = -31{,}4$ mm $z_G = 10{,}3$ mm.

Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
23		Discul circular are trei găuri de acelaşi diametru d poziţionate ca în figură.	Diametrul necesar D al noii găuri şi poziţia sa unghiulară astfel ca c.d.g. să fie în punctul O. R. $D = 1{,}227\,d$; $\theta = 84{,}9°$.
24		Piesa din figură este executată din tablă omogenă de grosime constantă.	Să se determine valoarea lui h astfel ca decupajul din stînga să treacă prin c.d.g. al plăcii rămase. R. $h = 0{,}586\,a$.
25		Suportul din figură este executat din tablă subţire omogenă şi de grosime constantă.	Poziţia c.d.g. R. $x_G = 0$ $y_G = -14{,}5$ mm $z_G = 73$ mm
26		Containerul din figură este executat din aceeaşi tablă omogenă şi se reazemă pe o suprafaţă orizontală.	Unghiul α făcut de speteză cu verticala astfel ca c.d.g. al containerului să se afle în planul vertical ce trece prin linia de reazem. R. $\alpha = 39{,}6°$
27		Un cilindru omogen are lungimea L, diametrul d_2 şi o degajare centrală de diametru d_1 şi adîncime h.	Valoarea lui h astfel ca c.d.g. al corpului să se afle la sfîrşitul degajării centrale. R. $h = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 L\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2}\right]$
28		Dimensiunile triunghiului dreptunghic şi distanţa la axa z.	Volumul obţinut prin rotirea cu 180° a triunghiului în jurul axei z. R. $V = 3619$ mm^3

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.62 (continuare)

0	1	2	3
29		Raza sfertului de cerc (a), egală cu distanța la axa z.	Volumul generat prin rotirea sfertului de cerc în jurul axei Oz, cu un unghi de 90°. R. $V = \frac{\pi a^3}{12}(3\pi - 2)$
30		Arcul de cerc de rază 0,8 m și deschidere unghiulară 120°.	Aria laterală generată prin rotirea completă a arcului de cerc din figură. R. $A = 4{,}62$ m².
31		Secțiunea prin matrița pentru ambutisarea vaselor sferice (ghiarelor).	Volumul matriței, din metal omogen, indicată în figură. R. $V = 27{,}2 \cdot 10^6$ mm³
32		Forma și dimensiunile barajului din figură.	Masa de beton necesară pentru construcția barajului dacă densitatea betonului este 2400 kg/m³ R. $m = 1{,}126 \cdot 10^9$ kg.

Scanned with OKEN Scanner

3

Echilibrul punctului material şi al rigidului

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

3.1. Grade de mobilitate

Parametrii geometrici independenţi cu ajutorul cărora se defineşte poziţia unui corp reprezintă gradele de mobilitate ale corpului considerat (punct material, solid rigid).

Vom spune că punctul material sau rigidul este liber, dacă sub acţiunea unui sistem spaţial de forţe poate ocupa orice poziţie în spaţiu, iar sub acţiunea unui sistem de forţe coplanare, poate ocupa orice poziţie în planul forţelor.

Poziţia punctului material liber în spaţiu se defineşte cu ajutorul a trei parametrii independenţi ; prin urmare punctul material liber în spaţiu are trei grade de mobilitate.

Cei trei parametrii geometrici independenţi pot fi, de exemplu, coordonatele carteziene ale punctului A (fig. 3.a), coordonate sferice (φ, r, θ) ale punctului A (fig. 3.b), sau coordonate cilindrice (θ, ρ, z) ale punctului A (fig. 3.c).

Poziţia punctului material liber în plan se defineşte cu ajutorul a doi parametri independenţi ; ca urmare, punctul material liber în plan are două grade de mobilitate.

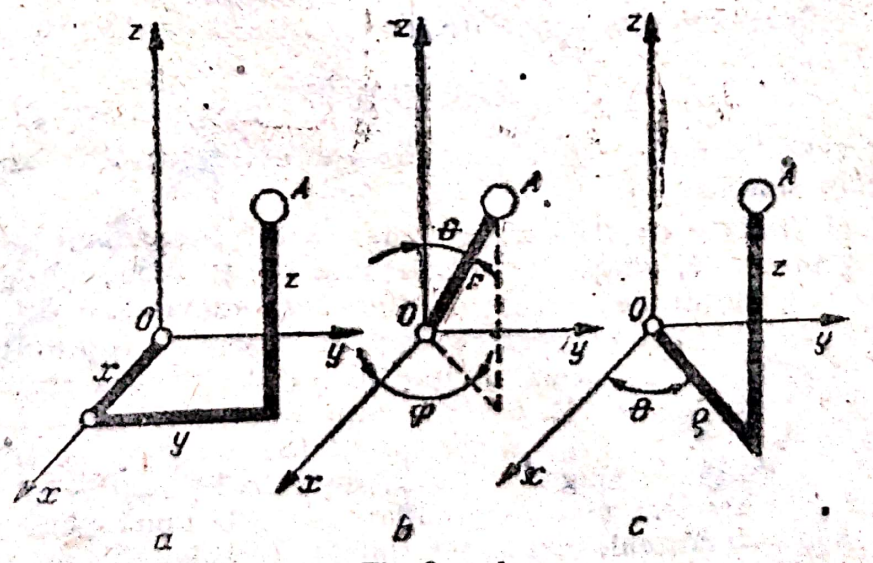


Fig. 3 a, b, c

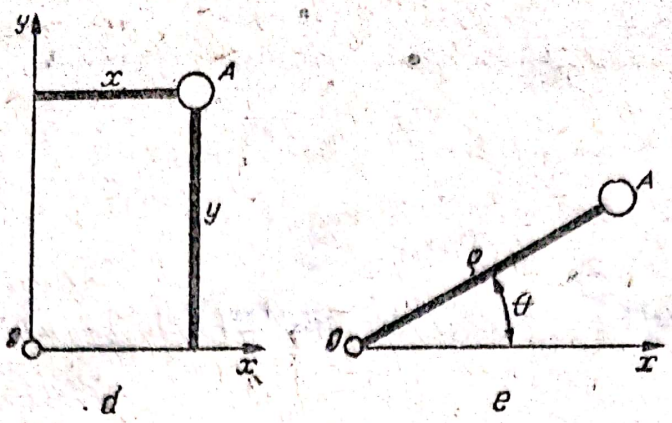


Fig. 3 d, e

Cei doi parametrii geometrici independenți pot fi, de exemplu coordonatele carteziene (x, y) ale punctului A (fig. 3.d), sau coordonatele polare (θ, ρ) ale lui A (fig. 3.e).

3.2. Legături mecanice

Legătura mecanică este o formă de interacțiune care impune anumite restricții parametrilor de poziție ai rigidului, respectiv ai punctului material, uneori și derivatelor în raport cu timpul, ale acestor parametri.

Din punct de vedere al modului de realizare tehnică, în practica inginerească, legăturile mecanice se grupează în două categorii:

— legături pasive, realizate cu elemente rigide;

— legături active, realizate prin intermediul unor elemente elastice.

Din punct de vedere al forțelor rezistente, legăturile mecanice se clasifică în:

— legături ideale, în care nu apar rezistențe la deplasarea, sau tendința de deplasare, a corpurilor componente;

— legături reale, în care apar rezistențe la deplasarea sau tendința de deplasare a unui corp față de altul din componența legăturii.

Reazemul simplu. Este legătura care constrînge rigidul (S_1) să rămînă, cu un punct al său A (fig. 3.f) pe o suprafață (Σ) a altui rigid (S). Suprafața (Σ) se exprimă, în reprezentarea carteziană, prin ecuația:

$$f(x, y, z) = 0, \tag{8.1}$$

care „este condiția de legătură" sau „ecuația de legătură" corespunzătoare unui reazem simplu.

În conformitate cu cele arătate mai înainte, reazemul simplu este o legătură geometrică, staționară (scleronomă) și olonomă (integrabilă).

Dacă în punctul de reazem A (fig. 3.g) numai una din suprafețele în contact are un plan tangent determinat și anume suprafața (Σ_1) care mărginește corpul (S_1), atunci suportul reacțiunii din reazem va avea direcția normalei $(n - n)$ la această suprafață, iar forțele de legătură $\mathbf{N}$ și $-\mathbf{N}$ vor acționa pe (S_1) și pe corpul (S) mărginit de suprafața (Σ) care are în A un punct singular. Dacă, însă, ambele suprafețe în contact au cîte un plan tangent bine determinat, dar cele două plane nu coincid, suportul reacțiunii normale este nedeterminat. În aplicațiile practice această

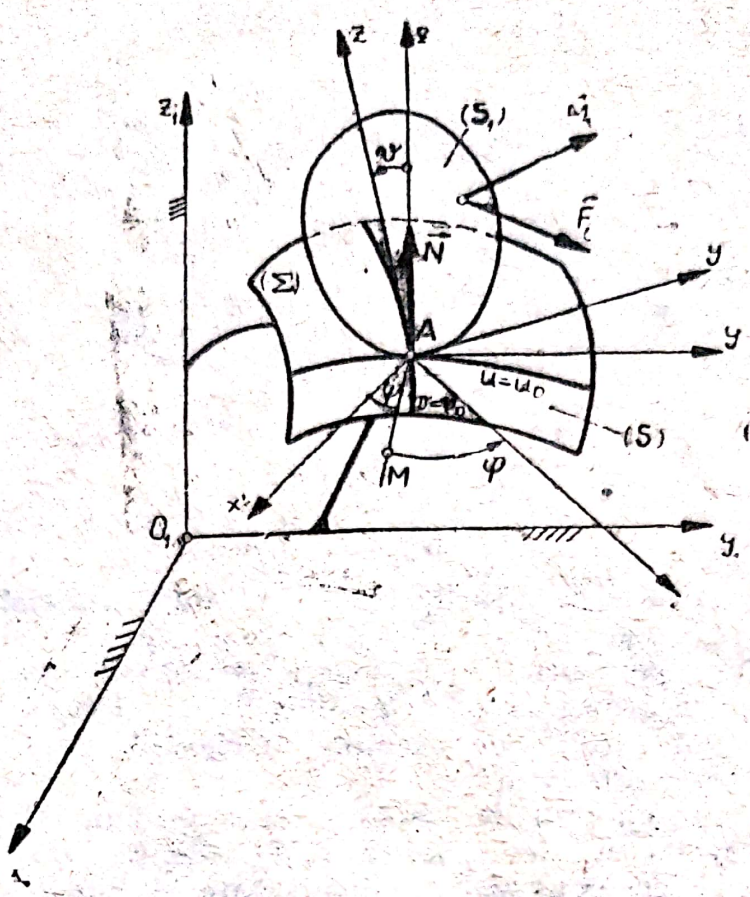


Fig. 3 f

nedeterminare se ridică prin construirea profilelor 1 și 2 (fig. 3.h), care admit în toate punctele de contact A, cîte o normală comună $(n - n)$. Reazemul simplu blochează un grad de mobilitate al rigidului.

Articulația. Legătura care constrînge solidul rigid să rămînă, cu un punct al său, în permanent contact cu un punct fix din spațiu se numește articulație sferică (fig. 3.i), iar legătura care constrînge solidul rigid să rămînă cu o axă a sa în permanent contact cu o axă fixă din spațiu se

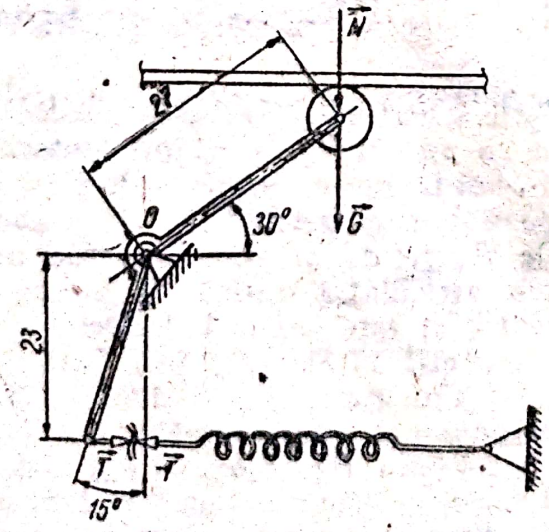


Fig. 3 g

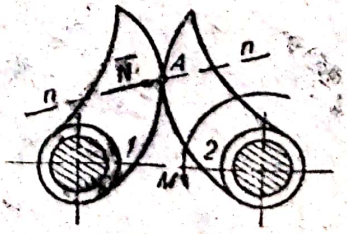


Fig. 3 h

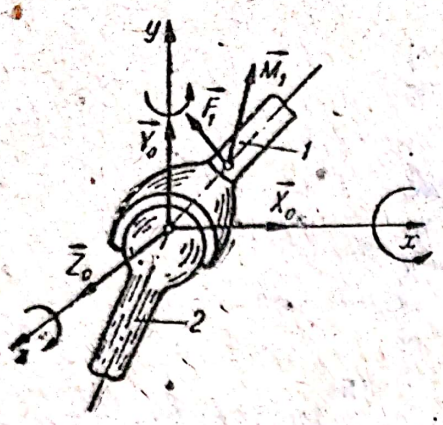


Fig. 3 i

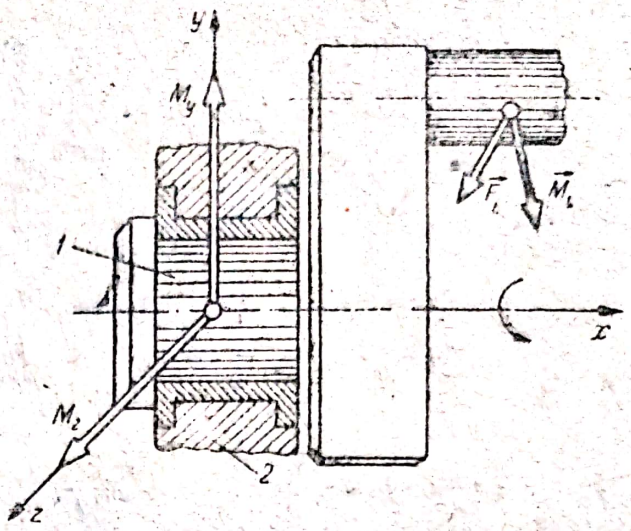


Fig. 3 j

numeşte articulaţie cilindrică. În figura (3.j) se arată o astfel de articulaţie sub forma unui lagăr axial de la un arbore cotit.

Un rigid liber, legat printr-o articulaţie sferică are numai trei grade de mobilitate; rezultă deci că articulaţia blochează trei grade de mobilitate rigidului, acestea fiind, de exemplu, deplasările după cele trei axe ale unui R.O. (reper ortonormat).

În conformitate cu principiul acţiunii şi reacţiunii, într-o articulaţie sferică se vor dezvolta reacţiunile $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_0$ şi $\mathbf{Z}_0$, orientate după axele reperului ortonormat în sens opus gradelor de libertate blocate (fig. 3.i). Punctul de aplicaţie, direcţia şi sensul reacţiunilor fiind cunoscute, rezultă că articulaţia sferică introduce trei necunoscute scalare: X_0, Y_0 şi Z_0.

Articulaţia cilindrică asigură solidului rigid o axă fixă în spaţiu. Poziţia unui rigid cu axă fixă (fig. 3.j) este determinată de un singur parametru scalar, unghiul de rotaţie în jurul axei Ox. Prin urmare, un solid rigid legat printr-o articulaţie cilindrică are numai un grad de mobilitate.

În aplicaţiile practice, se întîlneşte adesea cazul cînd solidul rigid este acţionat de forţe coplanare $\mathbf{F}_i$, $i = \overline{1,n}$ (fig. 3.1, e) conţinute într-un plan normal la axa de rotaţie. Descopmunînd forţa de reacţiune $\mathbf{R}_0$ după axele unui reper Oxy, se obţin componentele X_0 şi Y_0 (fig. 3.1,) care corespund gradelor de libertate blocate de către articulaţia cilindrică în acest caz.

Legătura prin fir sau bară. Dacă un rigid (S_1) sub acţiunea solicitărilor active $\{\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i\}$ $i = \overline{1,n}$, interacţionează cu un alt rigid (S_2) prin intermediul unui fir mereu întins, sau prin intermediul unei bare rigide cu extremităţile fixate de cele două rigide prin cîte o articulaţie sferică, se spune că rigidul (S_1) este supus la legătură prin fir, respectiv la legătură prin bară rigidă. Dacă lungimea firului AB (fig. 3.n) este constantă, atunci legătura prin fir sau prin bară rigidă constrînge rigidul (S_1) să se menţină cu un punct al său în permanent contact cu o suprafaţă

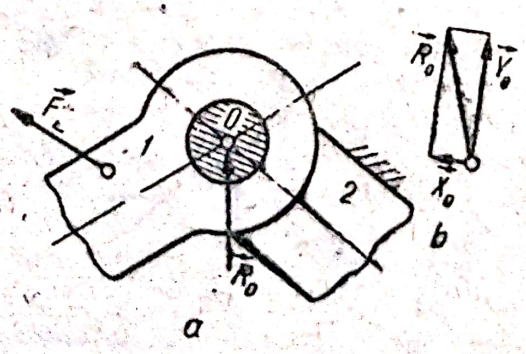


Fig. 3 l

sferică. Din acest motiv, legătura cu fir sau bară este considerată un caz particular al reazemului simplu.

Forţa de legătură **N** este orientată de-a lungul firului, respectiv barei şi reprezintă reacţiunea rigidului (S_2) asupra rigidului (S_1), egală şi direct opusă acţiunii lui (S_1) asupra lui (S_2).

Incastrarea. Este legătura care constrînge rigidul să rămînă cu o extremitate a sa fixată într-un alt corp rigid (fig. 3.o). Din punct de vedere geometric, încastrarea blochează toate gradele de mobilitate ale rigidului; deci rigidul încastrat este imobil.

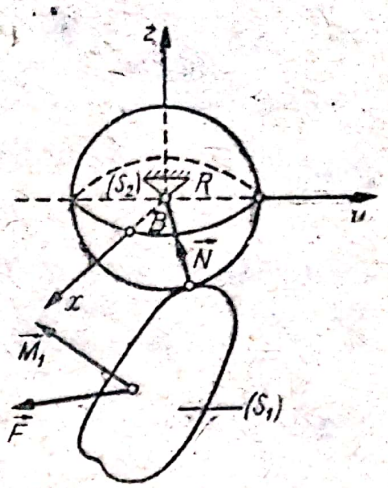


Fig. 3 n

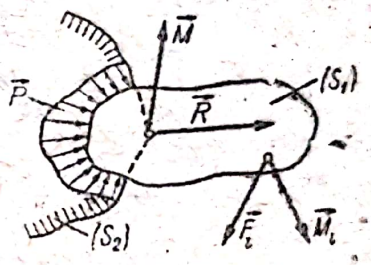


Fig. 3 o

Dacă rigidul se află sub acţiunea solicitărilor active $\{\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i\}$ $i = \overline{1,n}$, în zonele de contact dintre corpuri se dezvoltă distribuţii de reacţiuni elementare, acţionînd asupra rigidului încastrat şi care se reduc în punctul teoretic de încastrare O la un torsor al reacţiunilor încastrării, format dintr-o reacţiune rezultantă $\mathbf{R}_o$ şi un moment rezultant al reacţiunilor elementare $\mathbf{M}_o$. Descompunînd vectorii $\mathbf{R}_o$ şi $\mathbf{M}_o$ după axele reperului cartezian cu originea în O, se obţin componentele (X_o, Y_o, Z_o) ale lui $\mathbf{R}_o$ şi (M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}) ale lui $\mathbf{M}_o$. Prin urmare, o încastrare introduce într-o problemă de mecanică şase necunoscute scalare.

În cazul în care sistemul de forţe este conţinut în acelaşi plan, spre exemplu planul xOy, încastrarea introduce într-o problemă de mecanică trei necunoscute scalare: componentele (X_o, Y_o) ale reacţiunii $\mathbf{R}_o$ şi componenta $M_{oz} = M_o$ a momentului rezultant $\mathbf{M}_o$ al reacţiunilor elementare.

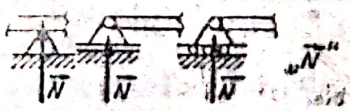
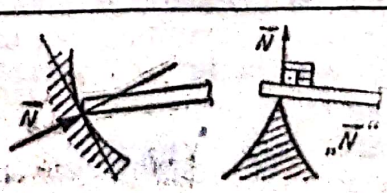
Axioma legăturilor. Arată că legăturile aplicate rigidului sau punctului material pot fi înlocuite prin forţe şi momente de legătură, orientate după direcţiile translaţiilor şi respectiv rotaţiilor blocate de către aceste legături.

Axioma legăturilor se mai numeşte şi „principiul forţelor de legătură".

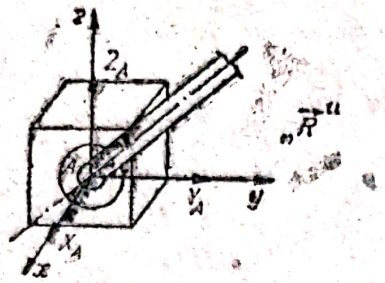
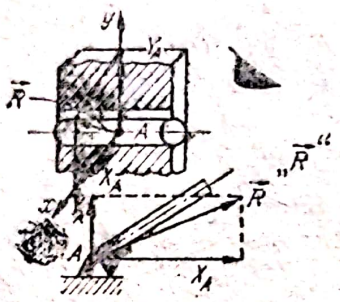
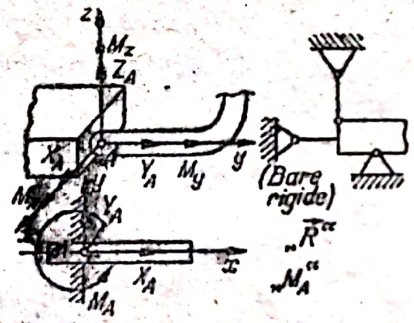
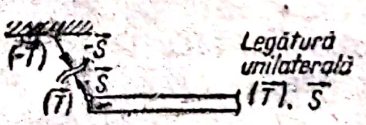
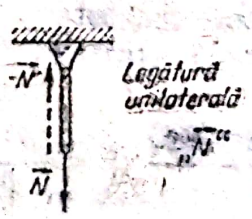
În virtutea acestui principiu, rigidul, respectiv punctul material, poate fi eliberat de legături şi considerat liber dacă acestea sînt înlocuite prin reacţiunile din legături. În tabelul 3.a este prezentată o sinteză a legăturilor mecanice.

Tabelul 3.a

Legături mecanice

	Denumirea legăturii		Simbol (cu ce se înlocuieşte)	Reacţiuni ce se cunosc	Necunoscute ce se vor afla	
					în plan	în spaţiu
1	Rezemarea	pe suprafaţa plană		Reacţiunea **N** este normală la suprafaţa de reazem	1 mărimea reacţiunii normale	1 mărimea reacţiunii normale
		pe suprafaţa curbă				

Tabelul 3, a (continuare)

	Denumirea legăturii		Simbol (cu ce se înlocuieşte)	Reacţiuni ce se cunosc	Necunoscute ce se vor afla	
					în plan	în spaţiu
2	Articulaţia	Sferică		Reacţiunea R trece prin punctul fix, dar are direcţie necunoscută	2 două proiecţii scalare ale reacţiunii	2 cele trei proiecţii scalare ale reacţiunii
		Cilindrică		Reacţiunea este perpendiculară pe axa de rotaţie	2 două proiecţii scalare ale reacţiunii	2 două proiecţii scalare ale reacţiunii
3	Încastrarea			Încastrarea corespunde cu un torsor $\tau_A(R, M_A)$ egal şi opus torsorului forţelor exterioare	6 Pentru reacţiunea R, 3 proiecţii scalare, iar pentru moment 3 proiecţii scalare	3 două proiecţii scalare ale reacţiunii şi o proiecţie pentru moment
4	Legătura cu fir			Efortul din fir T, are direcţia de-a lungul firului	1 mărimea efortului	1 mărimea efortului
5	Legătura cu bară rigidă			Efortul din bară N, are direcţia barei	1 mărimea efortului	1 mărimea efortului

3.2. Ecuaţiile de echilibru ale rigidului

Un rigid este în echilibru dacă sistemul de forţe care acţionează asupra lui este în echilibru. Prin urmare, condiţia necesară şi suficientă pentru ca un rigid, liber sau supus la legături, să fie în echilibru este ca într-un punct arbitrar din spaţiu, torsorul sistemului de forţe care acţionează asupra lui să fie nul

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}_i = 0\,; \quad \mathbf{M} = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = 0. \tag{3.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Proiectînd aceste expresii pe axele reperului cartezian, se obţin ecuaţiile de echilibru ale solidului rigid liber sau supus la legături

$$\begin{bmatrix} \Sigma X_i \\ \Sigma Y_i \\ \Sigma Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \Sigma M_{ix} \\ \Sigma M_{iy} \\ \Sigma M_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Dacă sistemul de forţe care acţionează asupra solidului rigid, liber sau supus la legături, este cuprins într-un singur plan, fie de exemplu planul Oxy al triedrului de referinţă, ecuaţiile de echilibru (3.3) se reduc la

$$\begin{bmatrix} \Sigma X_i \\ \Sigma Y_i \\ \Sigma M_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

În cazul unui sistem de forţe paralele cu axa Oz a triedrului de referinţă, ecuaţiile de echilibru (3.3) se vor scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} \Sigma Z_i \\ \Sigma M_{ix} \\ \Sigma M_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

3.3. Ecuaţiile de echilibru ale punctului material

Un punct material este în echilibru dacă sistemul de forţe concurente ce acţionează asupra lui este în echilibru.

Fie $\mathbf{F}_i$ $(i = \overline{1, n})$ sistemul de forţe concurente într-un punct material A. Condiţia de echilibru a punctului material este

$$\Sigma \mathbf{F}_i = 0, \tag{3.6}$$

din care se obţin ecuaţiile de echilibru ale punctului material

$$\begin{bmatrix} \Sigma X_i \\ \Sigma Y_i \\ \Sigma Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

3.4. Legături mecanice reale

Forţa de frecare. Forţele de rezistenţă care se opun deplasării, sau tendinţei de deplasare, a unui corp în raport cu altul, din componenţa aceleiaşi legături mecanice sînt forţe de interacţiune a suprafeţelor corpurilor, numite forţe de frecare.

În mecanica rigidului se menţin valabile următoarele legi, cu privire la fenomenul frecării, atribuite lui C. A. Coulomb:

1. forţa maximă de frecare nu depinde de mărimea suprafeţei de contact;

2. forţa maximă de frecare este direct proporţională cu modulul reacţiunii normale N; coeficientul de proporţionalitate poartă numele de coeficient de frecare şi el depinde de natura corpurilor în contact şi de gradul de netezime al suprafeţelor în contact (tabelul 3.1);

Scanned with OKEN Scanner

Valori ale coeficientului de frecare μ.

Tabelul 3.b

Natura corpului	Starea supra. în contact	Val. coeficientului		Temp. admisă °C
		aderentă	alunec. cu vit. obis	
Oţel pe oţel	— uscate	0,25—0,15	0,15—0,09	
	— uns cu ulei	0,15—0,08	0,08—0,03	
	— unse cu seu			
	sau unsoare	0,08—0,07	—	
Bandă de oţel pe fontă	— uscate	0,2 —0,15	—	
	— unse uşor	0,15—0,10		
Oţel sau fontă pe ţesătură	— uscate	0,5—0,3		
de azbest cu bachelită	— unse uşor cu	—		300—200
	unsoare	0,35—0,15		
	— unse cu ulei	0,2—0,1		
Oţel sau fontă pe azbest	— uscat	0,4—0,2		
cu bachelită presat hidraulic	— unse cu	0,35—0,15	—	500—250
	unsoare			
	— unse cu ulei	0,15—0,10		
Oţel pe textolit	— unse uşor	0,1		
	— unse cu ulei	0,12		
Oţel pe gheaţă	—	0,027—	0,01	
		0,014		
Fontă pe fontă (sau bronz)	— uscate	0,25—0,15		
	— unse uşor	0,16—0,15	0,15	
	— unse cu ulei	0,1 —0,02		
	— umede	0,31—0,25		
Bronz pe bronz	— uscate sau	—	0,2	
	puţin unse			
Bronz pe fontă	— puţin unse	—	0,21	
Fier forjat pe fier forjat	— uscate	—	0,44	
Fier pe stejar (în lungul	— umede	0,65	—	160—100
fibrelor)				
Stejar pe stejar				
— în lungul fibrelor	— uscate	0,62	0,48	160—100
— normal pe fibre		0,43	0,34—0,19	
Curea de piele pe fontă	— uscate	0,50—0,34	0,56	
	— puţin unse	—	0,28	
	— umede	—	0,36	
Curea de piele pe stejar	— uscate	0,60—0,50	0,33—0,24	
	— puţin unse	—	0,47	
	— umede	0,79	0,29	
Frînghie de cînepă pe lemn				
aspru	— uscate	0,80—0,50	0,50	
Frînghie de cînepă pe lemn				
neted	— uscate	0,33	—	
Roată de cauciuc netedă pe				
asfalt	— uscate	0,49	0,28	
Roată de cauciuc crestată				
pe asfalt	— uscate	0,76	0,55	
Piuă pe metal	— uscate cu			
	uşor unse	0,35	0,3	

Scanned with OKEN Scanner

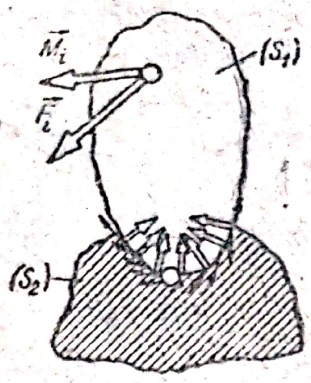


Fig. 3 p

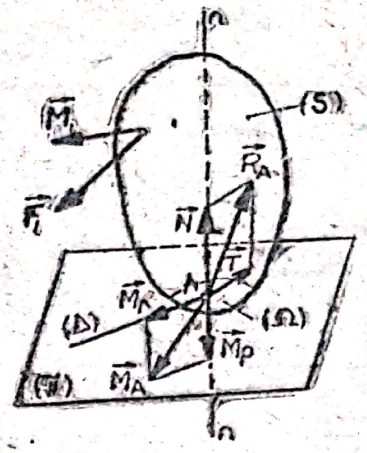


Fig. 3 r

3. pentru viteze mici de alunecare, forţa maximă de frecare este independentă de viteza de alunecare.

Condiţiile de echilibru ale solidului rezemat cu frecare. Să considerăm un solid (S_1) care are un reazem simplu în zona de contact, cu solidul (S_2) (fig. 3.p). Sub acţiunea solicitărilor active $\{\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i\}$, $i = \overline{1, n}$, în zona de contact dintre corpuri se dezvoltă distribuţii de reacţiuni elementare $d\mathbf{F}$, de direcţii oarecare, acţionînd asupra solidului rezemat (S_1). Se poate admite cu aproximaţie că suprafaţa de contact Ω aparţine unui plan (π) (fig. 2.r).

Fie $\{\mathbf{R}_A, \mathbf{M}_A\}$ torsorul reacţiunilor elementare $d\mathbf{F}$ în raport cu centrul de greutate A al suprafeţei Ω. Elementele torsorului se descompun după o direcţie normală în A la planul (π) avînd componentele $\mathbf{N}$, respectiv $\mathbf{M}_p$ şi după o direcţie conţinută în planul (π) avînd componentele $\mathbf{T}$, respectiv $\mathbf{M}_r$.

Reacţiunea normală $\mathbf{N}$ se opune deplasării corpului (S_1) pe direcţia $n - n$, forţa de frecare de alunecare $\mathbf{T}$ se opune alunecării, sau tendinţei de alunecare a corpului în planul (π), momentul de frecare de pivotare $\mathbf{M}_p$ se opune rotirii, sau tendinţei de rotire a corpului în jurul normalei $n - n$ la planul (π), iar momentul de frecare de rostogolire $\mathbf{M}_r$ se opune rotirii, sau tendinţei de rotire, a corpului în jurul axei (Δ) conţinute în planul (π).

În virtutea legilor lui Coulomb rezultă expresiile

$$T \leqslant \mu N; \; M_p \leqslant \nu N; \; M_r \leqslant sN, \tag{3.8}$$

în care μ este coeficientul de frecare de alunecare; ν — coeficientul de frecare de pivotare (tabelul 3.c); s — coeficientul de frecare de rostogolire (tabelul 3.d).

Relaţiile (3.8) reprezintă condiţiile de echilibru ale solidului rigid, rezemat cu frecare.

În cazul în care corpul este reductibil la un punct material, se obţine

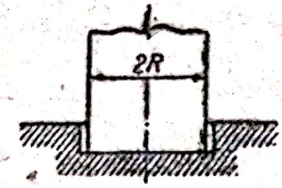
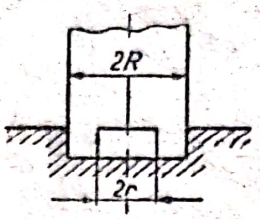
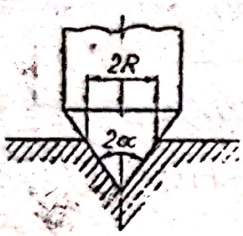
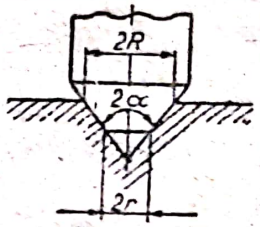
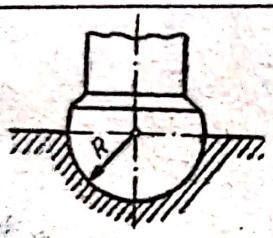
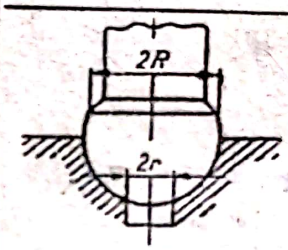
$$T \leqslant \mu N; \tag{3.9}$$

expresia (3.9) reprezintă condiţia necesară de echilibru a punctului material supus la legături cu frecare.

Condiţia (3.9) nu este suficientă pentru echilibrul punctului. Notînd prin φ unghiul dintre reacţiunea totală $\mathbf{R}$, a planului pe care se găseşte

Tabelul 3.c

Formule ale coeficienților frecării de pivotare

Suprafața de pivotare	ν	Suprafața de pivotare	ν
 Circulară	$\frac{2}{3}\mu R$	 Inelară	$\frac{2}{3}\mu\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}$
 Conică	$\frac{2}{3}\mu\frac{R}{\sin\alpha}$	 Tronconică	$\frac{2}{3}\mu\frac{R^3-r^3}{(R^2-r^2)\sin\alpha}$
 Semisferică	$\frac{1}{3}\mu R$	 Lună sferică	$\frac{1}{3}\mu\frac{R(R^3-r^3)}{\sqrt{(R^2-r^2)^3}}$

Tabelul 3.d

Valorile coeficientului de frecare la rostogolire s

Natura materialelor în contact	Coeficientul s [cm]	Observații
Fier pe fier	0,005	
Oțel moale pe oțel moale	0,005	
Lemn pe lemn	0,05—0,06	
Lemn pe oțel	0,03—0,04	
Fontă pe lemn	0,046	esențe tari
Bilă de oțel călit pe oțel	0,001	palier plat
	0,0005	palier sferic
Roți de vagoane pe șine (la frînare în stare normală)	0,05—0,1	în funcție de raza roții $s = 0{,}0065$
Roți de cauciuc pe pavaj	1,8 —2,5	
Roți decauciuc pe beton	0,315	la viteza obișnuită

Scanned with OKEN Scanner

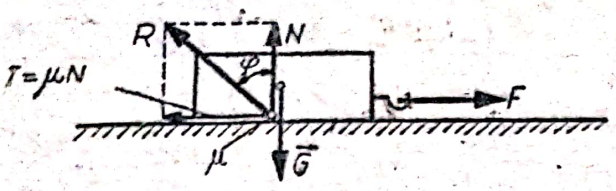


Fig. 3 s

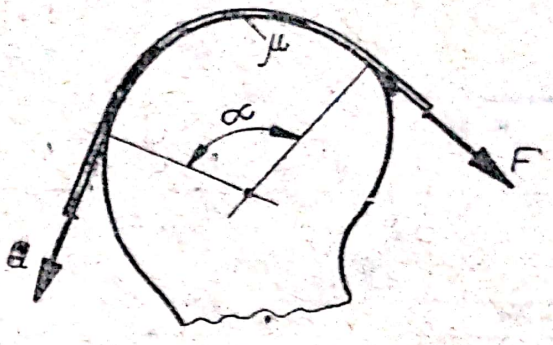


Fig. 3 t

punctul material, şi reacţiunea normală **N** (fig. 3.s), se observă că se poate scrie

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{T}{N}.$$

Ţinînd seama de (3.9), rezultă unghiul φ purtînd denumirea de unghi de frecare.

Prin urmare, condiţia necesară şi suficientă de echilibru a unui punct material pe un plan aspru este ca suportul rezultantei forţelor active să facă cu normala la plan un unghi α mai mic, sau cel mult egal, cu unghiul de frecare φ, adică

$$\alpha \leqslant \varphi. \tag{3.10}$$

Frecarea de înfăşurare (frecarea firelor). Formula lui Euler. Fie un cilndru fix, peste care se înfăşoară un fir la extremităţile căruia acţionează forţele **F** şi **Q** (fig. 3.t). Pentru ca mişcarea să nu se efectueze în sensul forţei **F**, adică pentru ca firul să stea în echilibru cu frecare, trebuie îndeplinită condiţia

$$e^{-\mu\alpha} \leqslant \frac{Q}{F} \leqslant e^{\mu\alpha}. \tag{3.11}$$

În cazul în care firul se deplasează în sensul forţei **F** rezultă relaţia

$$F = Qe^{\mu\alpha}, \tag{3.12}$$

denumită formula lui Euler ; dacă firul se mişcă în sensul forţei **Q**, formula lui Euler devine

$$F = Qe^{-\mu\alpha}.$$

În tabelul 3.e sînt date valori pentru $e^{\mu\alpha}$.

Dacă cilindrul se roteşte în jurul axei sale, sub acţiunea forţelor **F** şi **Q**, relaţia dintre aceste două forţe devine

$$F = \lambda Q, \tag{3.13}$$

λ purtînd denumirea de coeficient de frecare şi rigiditate. In practică această situaţie apare în cazul scripeţilor, unde $\lambda = 1{,}02 \sim 1{,}05$ în funcţie de sistemul de ungere al scripeţilor.

Tabelul 3.a

Valoarea lui $e^{\alpha\mu}$

$\frac{\alpha}{2\pi}$	μ								
	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
0,1	1,00	1,1	1,13	1,17	1,21	1,25	1,29	1,33	1,37
0,2	1,13	1,21	1,29	1,37	1,46	1,55	1,65	1,76	1,87
0,3	1,21	1,32	1,45	1,60	1,76	1,93	2,13	2,34	2,57
0,4	1,29	1,46	1,65	1,87	2,12	2,41	2,73	3,10	3,51
0,425	1,31	1,49	1,70	1,95	2,23	2,55	2,91	3,33	3,80
0,45	1,33	1,53	1,76	2,03	2,34	2,69	3,10	3,57	4,11
0,475	1,35	1,65	1,82	2,11	2,45	2,84	3,30	3,83	4,45
0,5	1,37	1,60	1,87	2,19	2,57	3,00	3,51	3,51	4,81
0,525	1,39	1,64	1,93	2,28	2,69	3,17	3,74	3,74	5,20
0,55	1,41	1,68	2,00	2,37	2,82	3,35	3,98	3,98	5,63
0,6	1,46	1,76	2,13	2,57	3,10	3,74	4,52	4,52	6,59
0,7	1,55	1,93	2,41	3,00	3,74	4,66	5,81	6,81	9,02
0,8	1,65	2,13	2,73	3,51	4,52	5,81	7,47	7,47	12,35
0,9	1,76	2,34	3,10	4,11	5,45	7,24	9,60	9,60	16,90
1,0	1,86	2,57	3,51	4,81	6,59	9,02	12,35	12,35	23,14
1,5	2,57	4,11	6,59	10,55	16,90	27,08	43,38	43,38	111,32
2,0	3,51	6,59	12,35	23,14	43,38	81,31	152,40	285,68	535,49
2,5	4,81	10,55	23,14	50,75	111,15	244,15	535,49	1174,50	25575,9
3,0	6,59	16,90	43,38	111,32	285,69	733,14	1881,5	4828,5	12391,0
3,5	9,02	27,08	81,31	244,15	733,14	2199,90	6610,7	19851,0	59608,0
4,0	12,35	43,38	152,40	535,40	1881,5	6610,7	23227,0	81610,0	286744,0

B. PROBLEME REZOLVATE

3.1. Să se determine mărimea forţelor N_1 şi N_2 astfel ca nodul 1 să fie în echilibru (fig. 3.1).

Rezolvare. Se scriu ecuaţiile de echilibru

$$\Sigma X_i = 0 : 8 + N_1 \cos 40° + N_2 \sin 20° - 10 = 0$$

$$0{,}766\, N_1 + 0{,}342\, N_2 = 2$$

$$\Sigma Y_i = 0 : N_1 \sin 40° - N_2 \cos 20° = 0$$

$$0{,}643\, N_1 - 0{,}940\, N_2 = 0$$

din care rezultă:

$$N_1 = 1{,}997 \text{ kN}, \quad N_2 = 1{,}368 \text{ kN}.$$

3.2. O bară de secţiune constantă, lungă de 7 m şi avînd masa $m = 200$ kg, este articulată sferic în punctul A şi rezemată cu extremitatea sferică din B pe doi pereţi verticali netezi (fig. 3.2,a). Să se calculeze reacţiunea din A, respectiv B ($g = 9{,}81$ ms^{-2}).

Scanned with OKEN Scanner

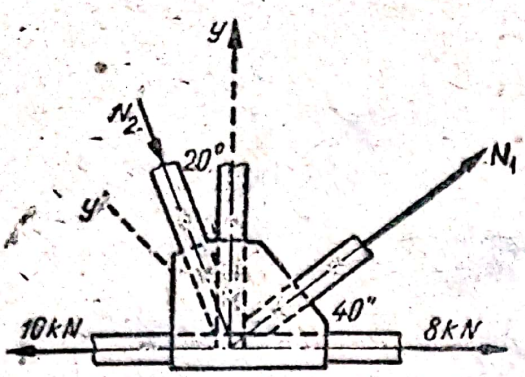
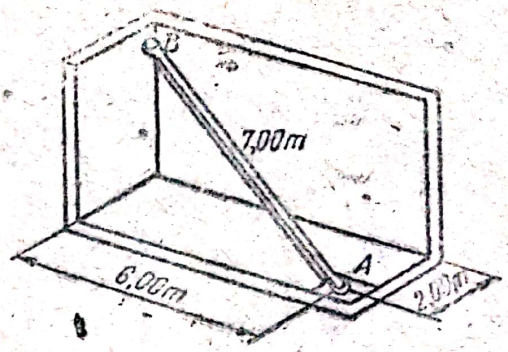


Fig. 3.1



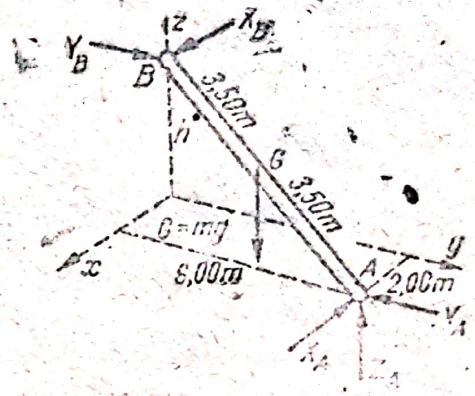


Fig. 3.2

Rezolvare. Se determină greutatea barei $G = mg = 200 \cdot 9{,}81 = 1962$ N, şi cota h (fig. 3.2,b) cu relaţia: $7 = \sqrt{2^2 + 6^2 + h^2} \Rightarrow h = 3$ m. Scriem apoi ecuaţiile de echilibru ale barei AB

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_B - X_A = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_B - Y_A = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad -1962 + Z_A = 0$$

$$\Sigma M_{xi} = 0: \quad -3Y_B - 3 \cdot 1962 + 6 \cdot Z_A = 0$$

$$\Sigma M_{yi} = 0: \quad 3X_B + 2 \cdot 1962 - 2Z_A = 0$$

din care rezultă reacţiunile:

$$Z_A = 1962 \text{ N}; \; X_B = 654 \text{ N}; \; Y_B = 1962 \text{ N}$$

$$X_A = 654 \text{ N}; \; Y_A = 1962 \text{ N}$$

care verifică ecuaţia de momente

$$\Sigma M_{zi} = 0: \; 6X_A - 2Y_A = 0; \; 6 \cdot 654 - 2 \cdot 1962 = 0$$

3.3. Stîlpul AB, care susţine un cablu aerian, este ancorat cu doi tiranţi AC şi AD, la care $\sphericalangle CBD = 90°$. Să se determine efortul în stîlp şi în tiranţi, în funcţie de unghiul format de una dintre cele două ramuri

Scanned with OKEN Scanner

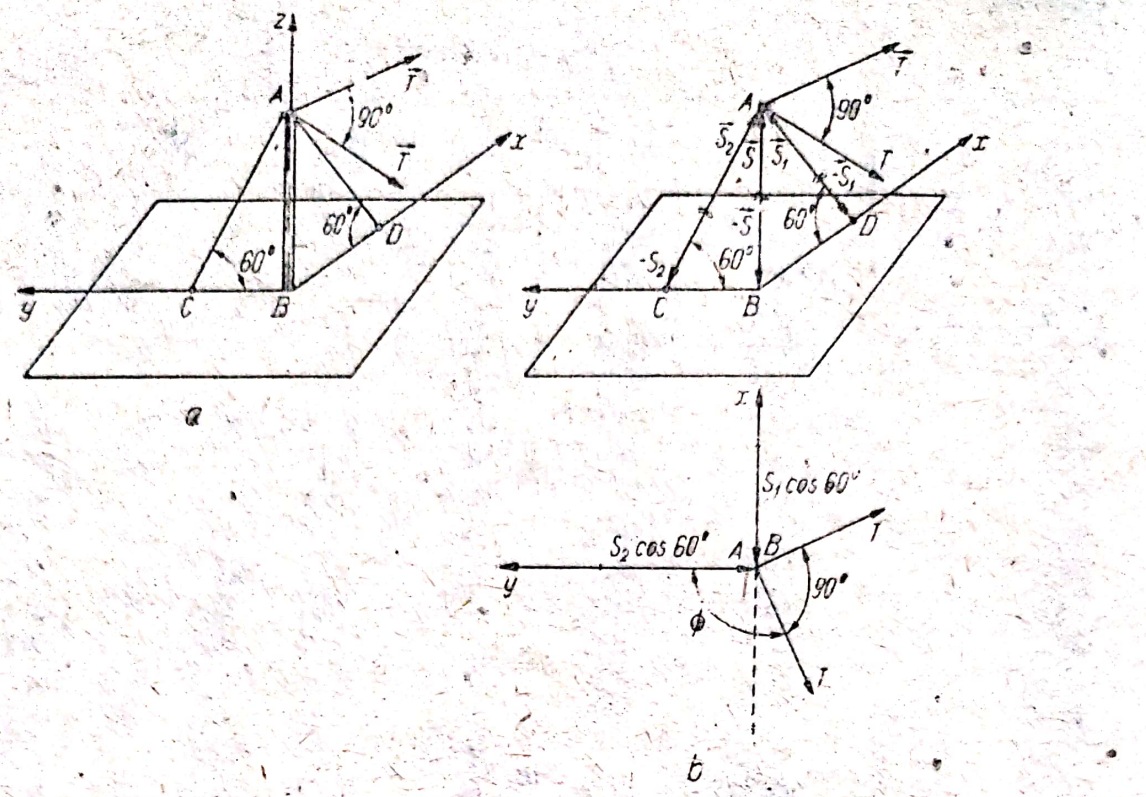


Fig. 3.3 a, b

ale cablului cu suprafaţa CBA. Ramurile cablului sînt orizontale şi perpendiculare între ele; forţele lor de tracţiune sînt fiecare egale cu T (fig. 3.3,a).

Rezolvare. Notînd cu S efortul în stîlp şi cu S_1, respectiv S_2, eforturile din tiranţi, ecuaţiile de echilibru pentru sistemul de forţe concurente astfel obţinut, sînt (fig. 3.3,b):

$$\Sigma X_i = 0: \quad -S_1 \cos 60° - T \sin (\Phi - 90°) - T \cos (\Phi - 90°) = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_2 \cos 60° + T \cos (\Phi - 90°) + T \sin (\Phi - 90°) = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad S + S_2 \sin 30° + S_1 \sin 30° = 0.$$

Rezolvînd sistemul celor trei ecuaţii, rezultă eforturile din stîlp şi din tiranţi

$$S_1 = -2T(\sin \Phi + \cos \Phi)$$

$$S_2 = -2T(\sin \Phi - \cos \Phi)$$

$$S = 2T \sin \Phi.$$

3.4. O grindă AB se reazemă pe tijele a două pistoane de diametre $2d$ şi d, care apasă pe un lichid într-un vas închis (fig. 3.4). La ce distanţă $AC = x$ trebuie aşezată o greutate G, pe grinda AB, pentru a rămîne în poziţie orizontală?

Rezolvare. În conformitate cu principiul lui Pascal, presiunea p, pe suprafaţa fiecărui piston este aceeaşi. În această situaţie greutatea G este

$$G = \frac{\pi d^2}{4} p + \frac{\pi (2d)^2}{4} \cdot p = \frac{5\pi d^2 p}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

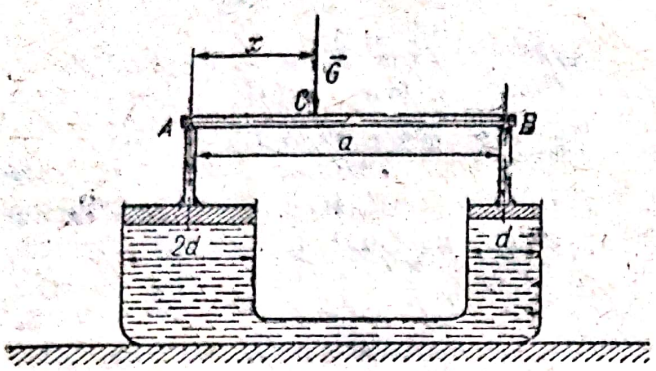


Fig. 3.4

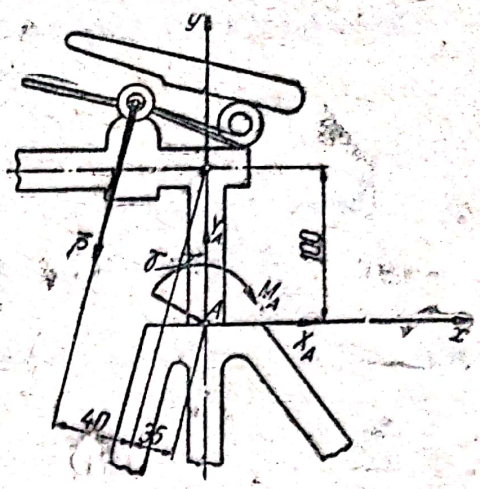


Fig. 3.5

Ecuaţia de momente în raport cu punctul A se scrie

$$\frac{\pi d^2}{4} pa - \frac{5\pi d^2}{4} px = 0.$$

Rezultă:

$$x = \frac{a}{5}.$$

3.5. Să se determine reacţiunile din punctul de încastrare al tubului de susţinere cu cadrul pentru bicicleta din fig. 3.5, dacă $P = 80$ daN.

Rezolvare. Alegem sistemul de axe ca în figură şi scriem ecuaţiile de echilibru; avem:

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A - P \sin \gamma = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A - P \cos \gamma = 0$$
$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad M_A - 75P = 0.$$

Rezultă

$$X_A = \frac{80 \cdot 35}{100} = 28 \text{ daN}; \quad Y_A = \frac{80\sqrt{100^2 - 35^2}}{100} = 75 \text{ daN}$$

$$M_A = 600 \text{ daN} \cdot \text{cm}.$$

3.6. Se dă greutatea de zbor a unui avion $G = 3000$ daN şi forţa de tracţiune $P = 500$ daN, care trece prin centrul de greutate al avionului. Se mai dau distanţele $a = 0{,}1$ m, $b = 0{,}06$ m şi $l = 5$ m. Se cere să se determine forţa de sustentaţie Y, rezistenţa la înaintare Q şi forţa F care solicită ampenajul orizontal, cînd avionul se găseşte în echilibru (fig. 3.6).

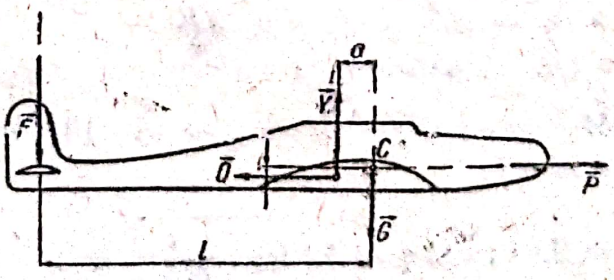


Fig. 3.6

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru ale avionului sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad P - Q = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad -F + Y - G = 0$$
$$\Sigma M_{(i)} = 0: \quad lF - aY - bQ = 0.$$

În urma rezolvării sistemului, se obține

$$Q = 500 \text{ daN}; \; F = 67{,}3 \text{ daN}; \; Y = 3067{,}3 \text{ daN}.$$

3.7. Să se determine cu ce unghi φ trebuie să îndepărtăm vîrfurile unui compas, pentru ca piciorul AB, care este rezemat pe un vîrf ascuțit în D, să stea orizontal. Greutatea piciorului AB este de 16 N și este aplicată în punctul E. Greutatea piciorului CB este de 12 N, aplicată în F. Distanțele sînt: $EB = 8$ cm, $ED = 1$ cm și $BF = 10$ cm (fig. 3.7).

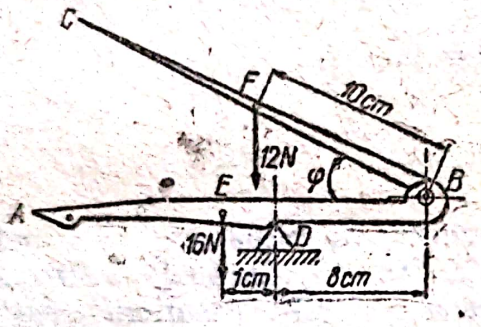


Fig. 3.7

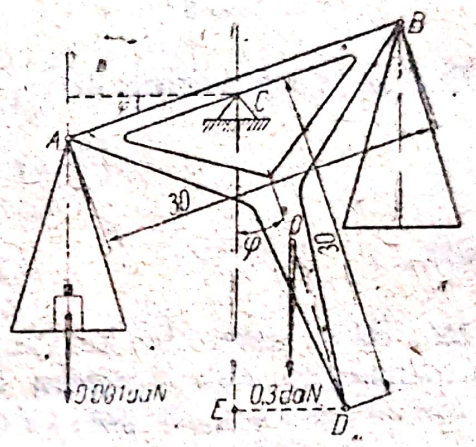


Fig. 3.8

Rezolvare. Compasul poate avea o mișcare de rotație în jurul punctului D; vom scrie ecuația de momente în raport cu punctul D

$$\Sigma M_{(D)} = 0: \; 1 \cdot 16 + 12(10 \cos\varphi - 8) = 0;$$

efectuînd calculele, se obține

$$4 + 30 \cos\varphi - 24 = 0,$$

de unde $\cos\varphi = \frac{2}{3}$

și deci $\varphi = \arccos\frac{2}{3} = 40°10'$.

3.8. Pîrghia unui cîntar, avînd lungimea $AB = 30$ cm și greutatea 0,3 daN, poartă pe unul din platanele suspendate la extremitățile sale o suprasarcină de 10^{-3} daN. Cunoscînd că devierea acului față de verticală este $DE = 3$ mm, se cere poziția centrului de greutate al pîrghiei prin distanța sa de la prisma C (fig. 3.8).

Rezolvare. Ecuația de momente față de punctul C se scrie

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \; \overline{CO} \cdot 0{,}3 \sin\varphi - 15 \cdot 10^{-3} \cos\varphi = 0.$$

Ținînd seama că:

$$\sin\varphi = \frac{0{,}3}{30} = 0{,}01; \; \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{10\,000}} \simeq 1,$$

rezultă

$$\overline{CO} = \frac{15 \cdot 10^{-3}}{0{,}01 \cdot 0{,}3} = 5 \text{ cm}.$$

3.9. Troleul unui tramvai exercită asupra cablului presiunea $N = 5{,}2$ daN. Greutatea rolei troleului este $G = 3$ daN. Cunoscînd că troleul este articulat în punctul O, să se determine forţa cu care este întins arcul troleului (fig. 3.9).

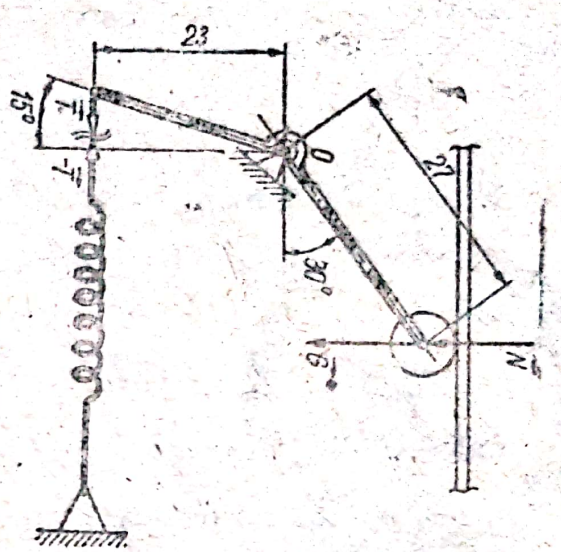


Fig. 3.9

R e z o l v a r e. Cablul acţionează asupra rolei cu o forţă egală cu N. Ecuaţia de momente în raport cu punctul O se scrie:

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \; -27 \cos 30° \cdot (N + G) + 23 \cos 15° \cdot T = 0;$$

rezultă

$$T = \frac{27 \cos 30° \cdot (N + G)}{23 \cos 15°} = \frac{27 \cdot 0{,}855 \cdot (5{,}2 + 3)}{23 \cdot 0{,}965} = 8{,}6 \text{ daN}.$$

3.10. Un ventil cu diametrul de 40 mm este manevrat de o bară de comandă cu ajutorul unei pîrghii, cum se poate vedea în figura 3.10. Ridicarea ventilului este de 9 mm, iar presiunea în cilindru, $p = 35$ at. Să se afle tensiunea din bara de comandă.

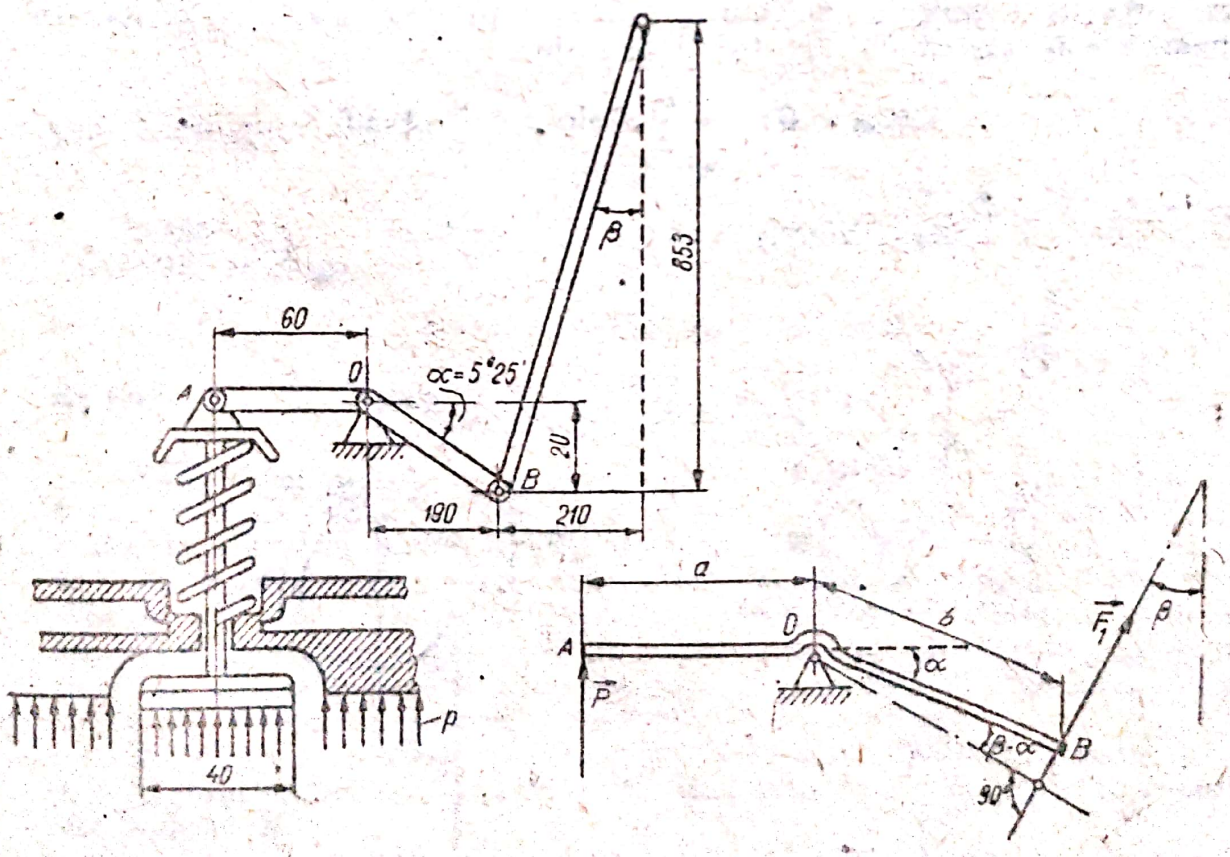


Fig. 3.10

Rezolvare. Vom nota cu **P** forţa care solicită ventilul şi cu $\mathbf{F}_1$ forţa din bara de comandă BC.

$$F = p\frac{\pi d^2}{4} = 35\frac{\pi 4^2}{4} = 437 \text{ daN}.$$

Ecuaţia de momente faţă de punctul O se scrie

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \quad -aF + b\cos(\beta - \alpha) \cdot F_1 = 0.$$

Rezultă

$$F_1 = \frac{a}{b\cos(\beta - \alpha)} F.$$

Calculăm unghiurile α şi β; avem:

$$\sin\alpha = \frac{20}{190} = 0{,}105; \quad \alpha = 6°; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{210}{853} = 0{,}246; \quad \beta = 13°50'.$$

Substituind unghiurile în expresia lui F_1, se obţine

$$F_1 = \frac{60 \cdot 437}{190\cos(13°50' - 6°)} = 140 \text{ daN}.$$

3.11. Un troliu are o roată de diametru d_1, cu un clichet A. Pe tamburul cu diametrul d_2, prins fix de roată, este înfăşurat un fir ce susţine greutatea Q (fig. 3.11). Să se determine presiunea **R** (reacţiunea) din axul B al clichetului, dacă se cunosc: $Q = 50$ daN, $d_1 = 420$ mm, $d_2 = 240$ mm, $h = 50$ mm, $a = 120$ mm şi se neglijează greutatea clichetului.

Rezolvare. Presiunea (reacţiunea) din axul clichetului este egală cu forţa de acţiune a clichetului asupra roţii, (fig. 3.11,b). Ecuaţia de momente în raport cu punctul O se scrie

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \quad -\frac{d_1}{2}R\sin\alpha + \frac{d_2}{2}Q = 0,$$

de unde $R = \dfrac{d_2}{d_1}\dfrac{Q}{\sin\alpha}$.

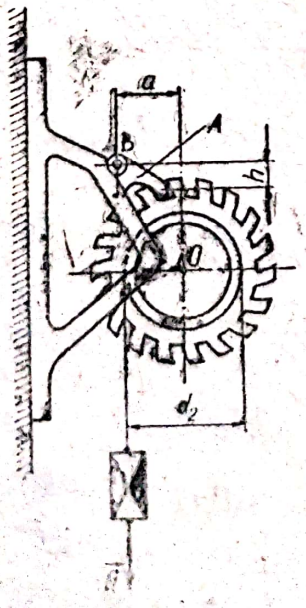


Fig. 3.11 a

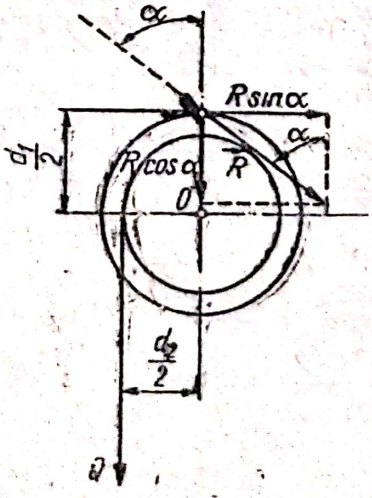


Fig. 3.11 b

Observînd că: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{h}$, avem

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Înlocuind această valoare în expresia lui R, se obține

$$R = \frac{d_2}{d_1}\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}Q.$$

Cu valori numerice, rezultă:

$$R = \frac{240}{420}\frac{\sqrt{120^2+50^2}}{120}50 = 31 \text{ daN}.$$

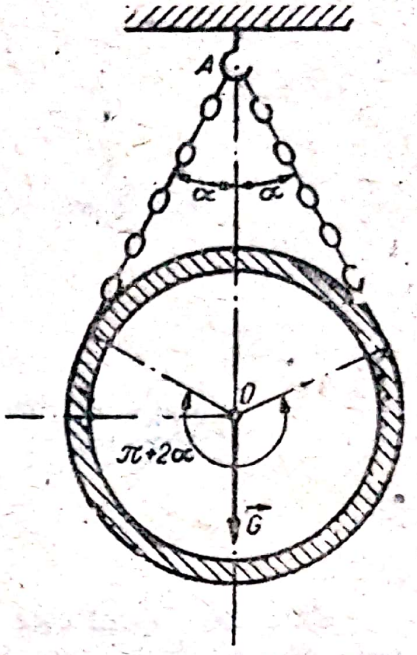


Fig. 3.12

3.12. Un cazan de diametru $D = 1600$ mm și greutate $G = 2500$ daN este ridicat cu macaraua, cu ajutorul unui lanț, care are lungimea $L = 5{,}60$ m. Se cere să se determine forța care lucrează în inelele lanțului (fig. 3.12).

Rezolvare. Determinăm, mai întîi, unghiul α; lungimea lanțului va fi

$$L = 2R\operatorname{ctg}\alpha + (\pi + 2\alpha)R$$

de unde $$\frac{L}{R} = \pi + 2\alpha + \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{560}{80} = 7.$$

Vom rezolva ecuația transcendentă

$$\alpha + \operatorname{ctg}\alpha - \frac{7-\pi}{2} = 0;$$

prin încercări se găsește

$$\alpha = 38°30'.$$

Notînd cu T tensiunea din lanț și scriind ecuația de proiecții pe verticală, se obține

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -2T\cos\alpha + G = 0,$$

de unde $$T = \frac{G}{2\cos\alpha} = \frac{2500}{2 \cdot 0{,}78261} = 1600 \text{ daN}.$$

3.13. Greutatea unei macarale-portal fără contragreutate este de $5 \cdot 10^4$ daN, aplicată în punctul C situat la o distanță de 1,5 m de la verticala șinei din dreapta (fig. 3.13). Se cunoaște că sarcina maximă ce poate fi ridicată de cărucior este de $2{,}5 \cdot 10^4$ daN și că brațul macaralei este de 10 m de la vreticala șinei din dreapta. Să se determine minimul sarcinii Q și maximul distanței x a contragreutății, astfel încît macaraua să nu se răstoarne pentru orice poziție a căruciorului, atît încărcat cît și descărcat. Greutatea proprie a căruciorului se va neglija.

Rezolvare. Cînd căruciorul este neîncărcat, tendința de răsturnare este în jurul punctului B; se va scrie, deci, ecuația de momente în raport cu punctul B

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad xQ - 4{,}5 \cdot 5 \cdot 10^4 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

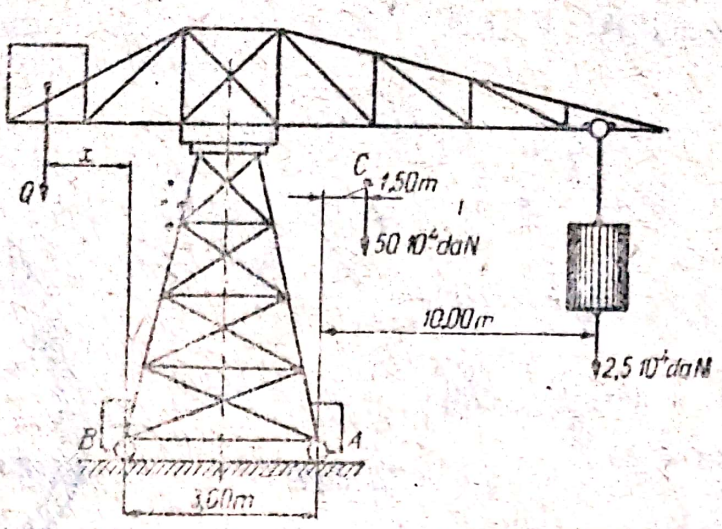


Fig. 3.13

Cînd cărucioru l este încărcat şi la capătul cursei, tendinţa de răsturnare este în jurul punctului A; ecuaţia de momente faţă de punctul A se scrie

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad (3 + x)Q - 1{,}5 \cdot 5 \cdot 10^4 - 10 \cdot 2{,}5 \cdot 10^4 = 0.$$

Rezolvînd sistemul celor două ecuaţii obţinute, deducem

$$Q = 3{,}33 \cdot 10^4 \text{ daN şi } x = 6{,}75 \text{ m}.$$

3.14. O placă omogenă în formă de paralelipiped (fig. 3.14,a) de dimensiuni $l > h > b$ este articulată în mijlocul O al unei muchii aşa fel încît punctul O se află la distanţa $OO_1 = d < \frac{b \cdot h}{\sqrt{b^2 + h^2}}$ de un perete vertical, pe care placa se reazemă fără frecare, în A şi B. Se cere:

— să se arate că în poziţia de echilibru latura AB este orizontală;

— în acest caz, să se determine presiunile pe perete în punctele A şi B.

Rezolvare. Eliminînd legăturile mecanice şi scriind ecuaţiile de momente în raport cu axele sistemului de referinţă $Oxyz$, se obţine:

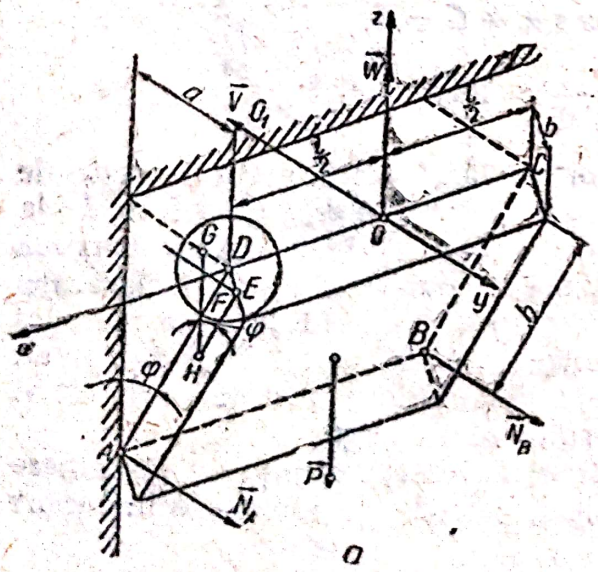


Fig. 3.14 a

$$\Sigma M_x = 0: \; 2\frac{d}{\operatorname{tg}\varphi} N_A - \left(\frac{b}{2}\cos\varphi - \frac{h}{2}\sin\varphi\right) P = 0$$

$$\Sigma M_y = 0:$$

$$\Sigma M_z = 0: \quad \frac{l}{2} N_A - \frac{l}{2} N_B = 0$$

presupunîndu-se că muchia AB a plăcii este orizontală. Din ecuaţia a treia rezultă

$$N_A = N_B.$$

Ţinînd seama că

$$\sin\varphi = \frac{d}{h},$$

Scanned with OKEN Scanner

înlocuind în prima ecuație, aceasta devine:

$$2hN_A \cos\varphi - \left(\frac{b}{2}\cos\varphi - \frac{dh}{2h}\right) P = 0.$$

Din această ecuație rezultă, în urma înlocuirii lui $\cos\varphi$ prin

$$\cos\varphi = \frac{1}{h}\sqrt{h^2 - d^2},$$

reacțiunile

$$N_A = N_B = \frac{b\sqrt{h^2 - d^2}}{4h\sqrt{h^2 - d^2}} - \frac{d \cdot h}{4h\sqrt{h^2 - d^2}} = \frac{b\sqrt{h^2 - d^2} - d \cdot h}{4h\sqrt{h^2 - d^2}}.$$

Pentru ca echilibrul să fie posibil, trebuie ca

$$N_A = N_B > 0,$$

adică

$$b^2(h^2 - d^2) > d^2h^2,$$

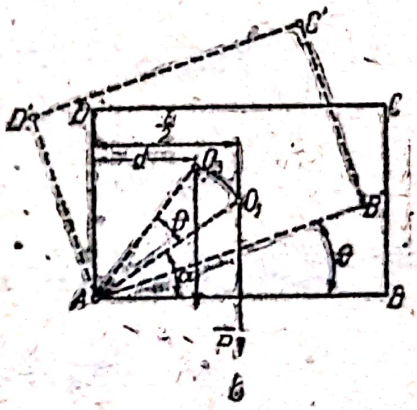
de unde rezultă:

$$d < \frac{b \cdot h}{\sqrt{h^2 + b^2}},$$

ceea ce corespunde exact cu condiția dată în enunțul problemei.

În cazul în care muchia AB nu este orizontală (fig. 3.14,b), greutatea P a plăcii dă un moment în raport cu axa Oy, care în cazul neglijării forțelor de frecare trebuie să fie nul. Rezultă astfel ecuația

$$\left(\frac{l}{2} - d\right) P = 0.$$



b

Fig. 3.14 b

Din figura 3.14,b, se deduce

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + h^2}\cos(\alpha + \theta)$$

unde θ este unghiul muchiei AB cu orizontala. Înlocuind expresia lui d în relația de mai sus, rezultă

$$P\left[\frac{l}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + h^2}(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)\right] = 0.$$

Ținînd seama că

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}}; \quad \cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}}$$

și împărțind ecuația obținută prin $P \neq 0$, deducem ecuația trigonometrică

$$\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\theta + \frac{h}{2}\sin\theta = 0$$

care se mai scrie sub forma

$$\frac{1}{4}(l^2 + h^2)\cos^2\theta - \frac{l^2}{2}\cos\theta - \frac{1}{4}(h^2 - l^2) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd ecuaţia obţinută, rezultă:

$$\cos\theta_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{r^2 - h^2}{r^2 + h^2}. \end{cases}$$

Soluţia care convine problemei este

$$\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0.$$

3.15. O masă rotundă de rază r are trei picioare ale căror capete formează un triunghi echilateral ABC, cu latura a. Greutatea mesei este egală cu $\mathbf{P}$ şi aplicată în punctul G, aflat pe axa mesei. Pe marginea din faţă a mesei în punctul D se află greutatea $\mathbf{Q}$, OD' fiind perpendiculară pe AC (fig. 3.15). Să se afle presiunea picioarelor mesei pe podea. Pentru ce valoare a lui $\mathbf{Q}$ se va răsturna masa?

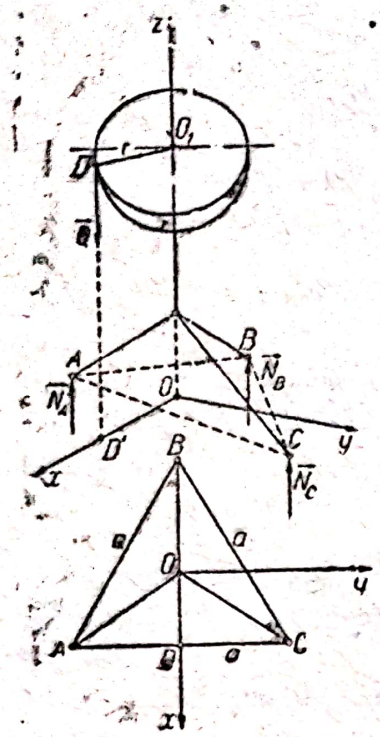


Fig. 3.15

R e z o l v a r e. În punctele de reazem A, B şi C cu podeaua apar reacţiunile $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{N}_B$ şi $\mathbf{N}_C$. Ecuaţiile de echilibru ale forţelor ce acţionează asupra mesei sînt:

$$\Sigma Z_i = 0: \quad N_A + N_B + N_C - P - Q = 0$$

$$\Sigma M_x = 0: \quad \frac{a}{2} N_C - \frac{a}{2} N_A = 0$$

$$\Sigma M_y = 0: \quad rQ + \frac{a\sqrt{3}}{3} N_B - \frac{a\sqrt{3}}{6} N_A - \frac{a\sqrt{3}}{6} N_C = 0.$$

Rezolvăm sistemul de ecuaţii şi obţinem

$$N_A = N_C = \frac{P+Q}{3} + \frac{rQ}{a\sqrt{3}}; \quad N_B = \frac{P+Q}{3} - \frac{2rQ}{a\sqrt{3}}.$$

Pentru a determina valoarea lui Q la limita echilibrului vom scrie ecuaţia de momente în raport cu punctul D'; rezultă

$$\Sigma M_{(D')} = 0: \quad \left(r - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) Q - \frac{a\sqrt{3}}{6} P = 0$$

Rezultă, în cazul echilibrului

$$Q = \frac{aP}{2r\sqrt{3} - a}.$$

Masa se răstoarnă cînd

$$Q \geqslant \frac{aP}{2r\sqrt{3} - a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.16. O macara constă dintr-un tambur de rază r şi o roată R, care se roteşte pe acelaşi arbore AB. Pe tambur este înfăşurat cablul D, la capătul căruia atîrnă greutatea Q. Pe roată este, de asemenea înfăşurat un cablu, la al cărui capăt se aplică o forţă orizontală P(fig. 3.16). Să se afle relaţia dintre mărimile P şi Q în poziţia de echilibru şi reacţiunile din lagărele A şi B, dacă $AB = l$, $AC = a$ şi $AD = b$.

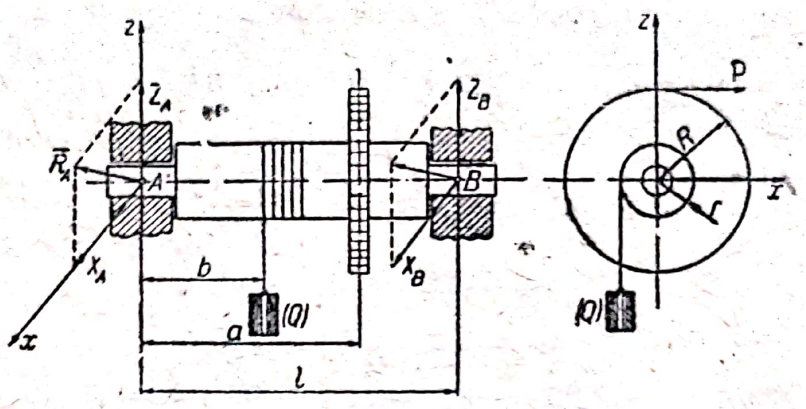


Fig. 3.16

Rezolvare. Înlocuim legăturile cu reacţiunile corespunzătoare, şi scriem cele şase ecuaţii de echilibru; avem

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + X_B + P = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0:$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad Z_A + Z_B - Q = 0$$

$$\Sigma M_x = 0: \quad bQ - lZ_B = 0$$

$$\Sigma M_z = 0: \quad lX_B + aP = 0.$$

Relaţia dintre forţele P şi Q se deduce din ecuaţia de momente în raport cu axa Oy; rezultă

$$\Sigma M_y = 0; \quad rQ - RP = 0; \quad P = \frac{r}{R} Q.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii obţinut, rezultă expresiile reacţiunilor

$$X_A = -\frac{l-a}{l} P; \quad Z_A = \frac{l-b}{l} Q;$$

$$X_B = -\frac{a}{l} P; \quad Z_B = \frac{b}{l} Q.$$

Observaţie. Ecuaţiile de momente în raport cu axele sistemului de referinţă se pot obţine cu ajutorul determinanţilor, scrilnd că suma vectorială a momentelor forţelor R_A, R_B, P şi Q este nulă, faţă de oricare punct din spaţiu.

Considerînd momentele faţă de punctul A, putem scrie

$$\mathbf{M}_{(A)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & l & 0 \\ X_B & 0 & Z_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & a & R \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r & b & 0 \\ 0 & 0 & -Q \end{vmatrix} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însumînd determinanţii minori ai versorilor i, j şi k, obţinem:

$$lZ_B - bQ = 0$$

$$RP - rQ = 0$$

$$-lX_B - aP = 0$$

3.17. O placă orizontală de formă dreptunghiulară, de dimensiuni a, b şi greutate P, este prinsă în A şi B cu articulaţii cilindrice şi susţinută cu o bară $CD = l$. Să se determine reacţiunile din articulaţii şi efortul din bara CD (fig. 3.17).

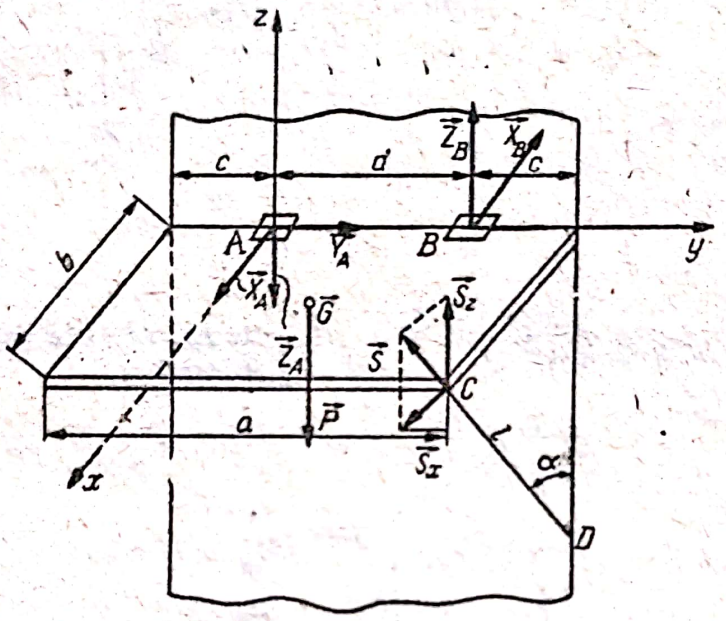


Fig. 3.17

Rezolvare. Componentele forţelor care acţionează asupra plăcii, precum şi coordonatele punctelor lor de aplicaţie în raport cu sistemul de axe ales, cu originea în A, sînt:

$$\mathbf{P}(0,\ 0,\ -P);\ G\left(\frac{b}{2},\ \frac{d}{2},\ 0\right);\ \mathbf{R}_A(X_A,\ Y_A,\ Z_A);\ A(0,\ 0,\ 0);$$

$$\mathbf{R}_B(X_B,\ 0,\ Z_B);\ B(0,\ d,\ 0);\ \mathbf{S}(S_x,\ 0,\ S_z);\ C(b,\ d+c,\ 0).$$

Din ecuaţiile de echilibru

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + X_B + S_x = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad Z_A + Z_B + S_z - P = 0$$

$$\Sigma M_x = 0: \quad -\frac{d}{2}P + dZ_B + (c+d)S_z = 0$$

$$\Sigma M_y = 0: \quad \frac{b}{2}P - bS_z = 0$$

$$\Sigma M_z = 0: \quad -dX_B - (c+d)S_x = 0,$$

știind că $\frac{S_x}{S_z} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{\sqrt{l^2 - b^2}}$ rezultă reacțiunile

$$X_A = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{\sqrt{l^2 - b^2}} \frac{P}{2}; \quad X_B = \frac{d+c}{d} \frac{b}{\sqrt{l^2 - b^2}} \frac{P}{2}; \quad Z_A = -\frac{P}{2} \cdot \frac{c+d}{d};$$

$$Z_B = -\frac{P}{2} \cdot \frac{c}{d}; \quad S_x = \frac{P}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{l^2 - b^2}}; \quad S_z = \frac{P}{2}.$$

3.18. Cu ajutorul troliului reprezentat schematic în fig. 3.18 se efectuează o ridicare uniformă a sarcinii $Q = 100$ daN. Se cunoaște: raza tamburului $R = 5$ cm, lungimea manivelei $KD = 40$ cm, $DA = 30$ cm, $AC = 40$ cm și $CB = 60$ cm. Firul ce se înfășoară pe tambur formează cu orizontala un unghi de 60°. Să se determine forța P, aplicată la manivelă, și reacțiunile din reazemele A și B ,pentru poziția troliului, cînd manivela KD este orizontală.

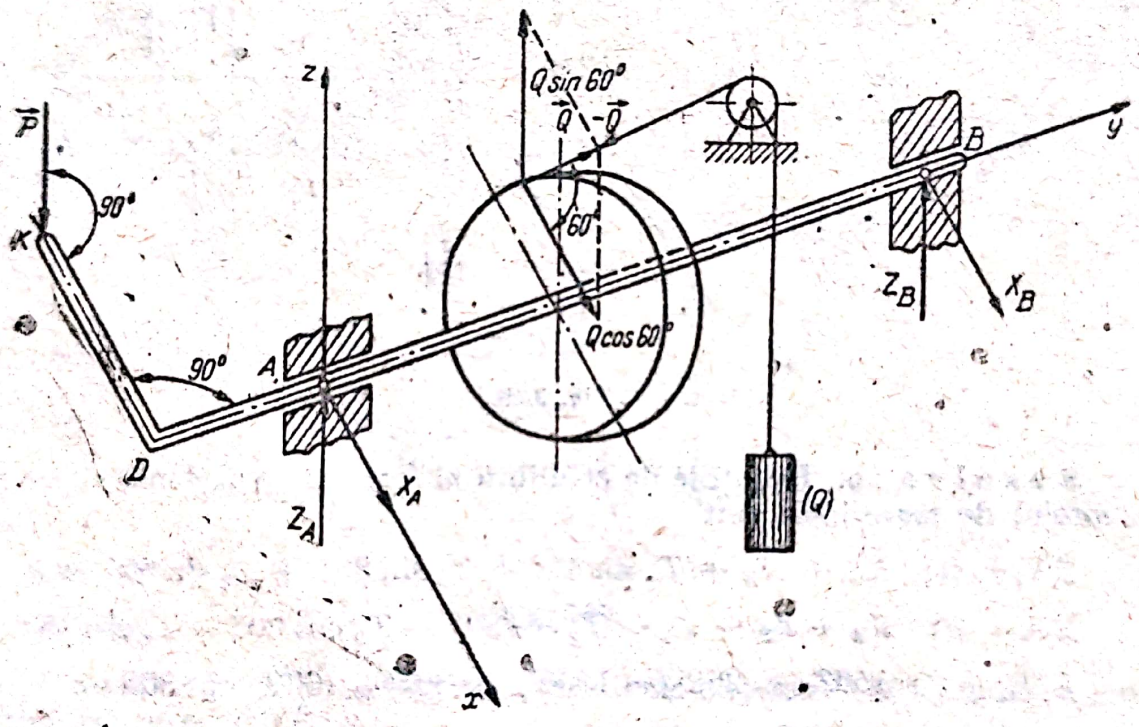


Fig. 3.18

Rezolvare. Înlocuind legăturile cu reacțiunile corespunzătoare se pot scrie următoarele ecuații de echilibru

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + X_B + Q\cos 60° = 0$$
$$\Sigma Z_i = 0: \quad -P + Z_A + Q\sin 60° + Z_B = 0$$
$$\Sigma M_x = 0: \quad 30P + 40 \cdot 86{,}6 + 100Z_B = 0$$
$$\Sigma M_y = 0: \quad 40P - 5 \cdot 100 = 0$$
$$\Sigma M_z = 0: \quad 100X_B + 40 \cdot 50 = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține

$$X_A = -30 \text{ daN}; \quad X_B = -20 \text{ daN}; \quad Z_A = -39 \text{ daN}; \quad Z_B = -35 \text{ daN}$$
$$P = 12{,}5 \text{ daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.19. De un arbore de transmisie orizontal (fig. 3.19) sînt fixate solidar două şaibe de raze $R = 0{,}4$ m şi $r = 0{,}2$ m. Tensiunile din extremităţile curelei sînt respectiv: $T_1 = 340$ daN şi $T_2 = 200$ daN. Primul capăt al curelei este vertical ,iar unghiul pe care-l face al doilea capăt cu verticala este de 45°. Tensiunile din extremităţile curelei, care este trecută peste a doua şaibă, sînt T_3 şi T_4, extremităţile fiind paralele şi formînd cu verticala unghiul de 30°. Să se determine reacţiunea lagărelor A şi B şi tensiunile T_3 şi T_4, ştiind că $T_3 = 2T_4$ şi că forţele de tensiune din curele şi reacţiunile lagărelor se echilibrează între ele (arborele se mişcă uniform, iar rezistenţele se neglijează).

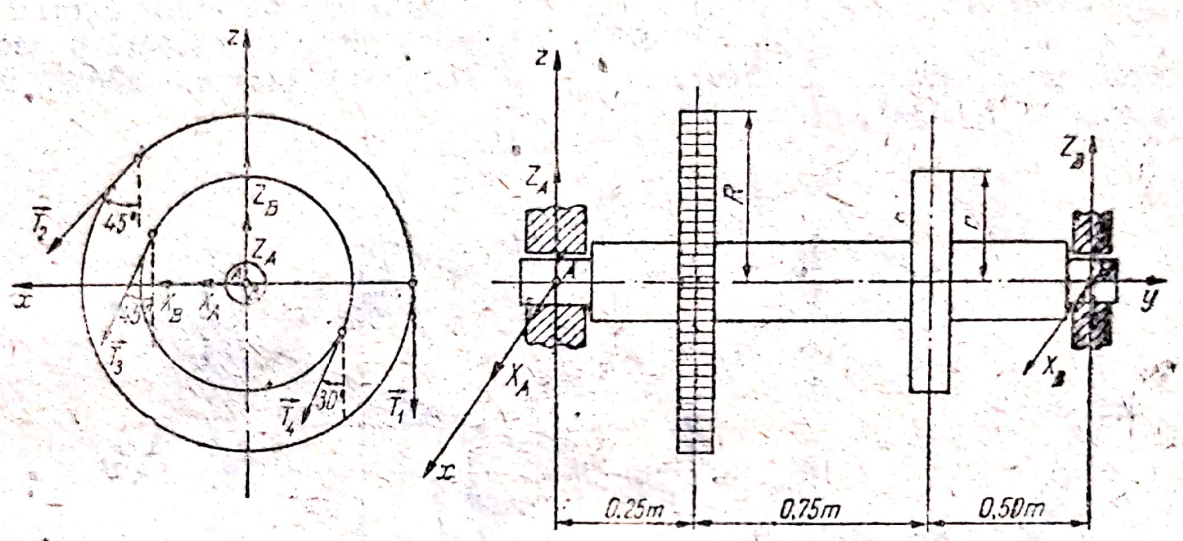


Fig. 3.19

Rezolvare. Ecuaţiile de echilibru al forţelor ce acţionează asupra arborelui de transmisie sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + X_B + T_2 \sin 45° + T_3 \sin 30° + T_4 \sin 30° = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad Z_A + Z_B - T_1 - T_4 \cos 30° - T_3 \cos 30° - T_2 \cos 45° = 0$$

$$\Sigma M_x = 0: \quad 150Z_B - 25T_1 - 100T_4 \cos 30° - 100T_3 \cos 30° - 25T_2 \cos 45° = 0$$

$$\Sigma M_y = 0: \quad 40T_1 + 20T_4 - 20T_3 - 40T_2 = 0$$

$$\Sigma M_z = 0: \quad 150X_B + 25T_2 \sin 45° + 100T_3 \sin 30° + 100T_4 \sin 30° = 0$$

Ţinînd seama că $T_3 = 2T_4$ şi rezolvînd sistemul de ecuaţii obţinut, rezultă

$$X_A = -257 \text{ daN}; \quad X_B = -304 \text{ daN}; \quad Z_A = 643 \text{ daN}; \quad Z_B = 565 \text{ daN};$$

$$T_3 = 560 \text{ daN}; \quad T_4 = 280 \text{ daN}.$$

3.20. Forţa de presiune a bielei unui motor cu ardere internă, concentrată în mijlocul manetonului D este $P = 2000$ daN şi face cu orizontala un unghi de 10°. Planul ODO_1 ce trece prin axa arborelui şi manetonului D formează cu verticala un unghi de 30°. De la volant, forţele se transmit prin cablu, ale cărui ramuri sînt paralele şi înclinate faţă de orizontală cu 30°. Acţiunea forţei **P** este echilibrată de tensiunile **T** şi **t**, din ramurile cablului şi de reacţiunile din lagărele A şi B. Greu-

Scanned with OKEN Scanner

tatea volantului este de 1300 daN, iar diametrul $d = 2$ m. Suma tensiunilor din cablu, $T + t = 750$ daN. Distanţele indicate pe desen ale punctului D, de la axa OO_1, sînt: $r = 125$ mm; $l = 250$ mm; $a = 300$ mm $b = 450$ mm (fig. 3.20). Se cere să se determine reacţiunile din lagărele A şi B şi tensiunile T şi t.

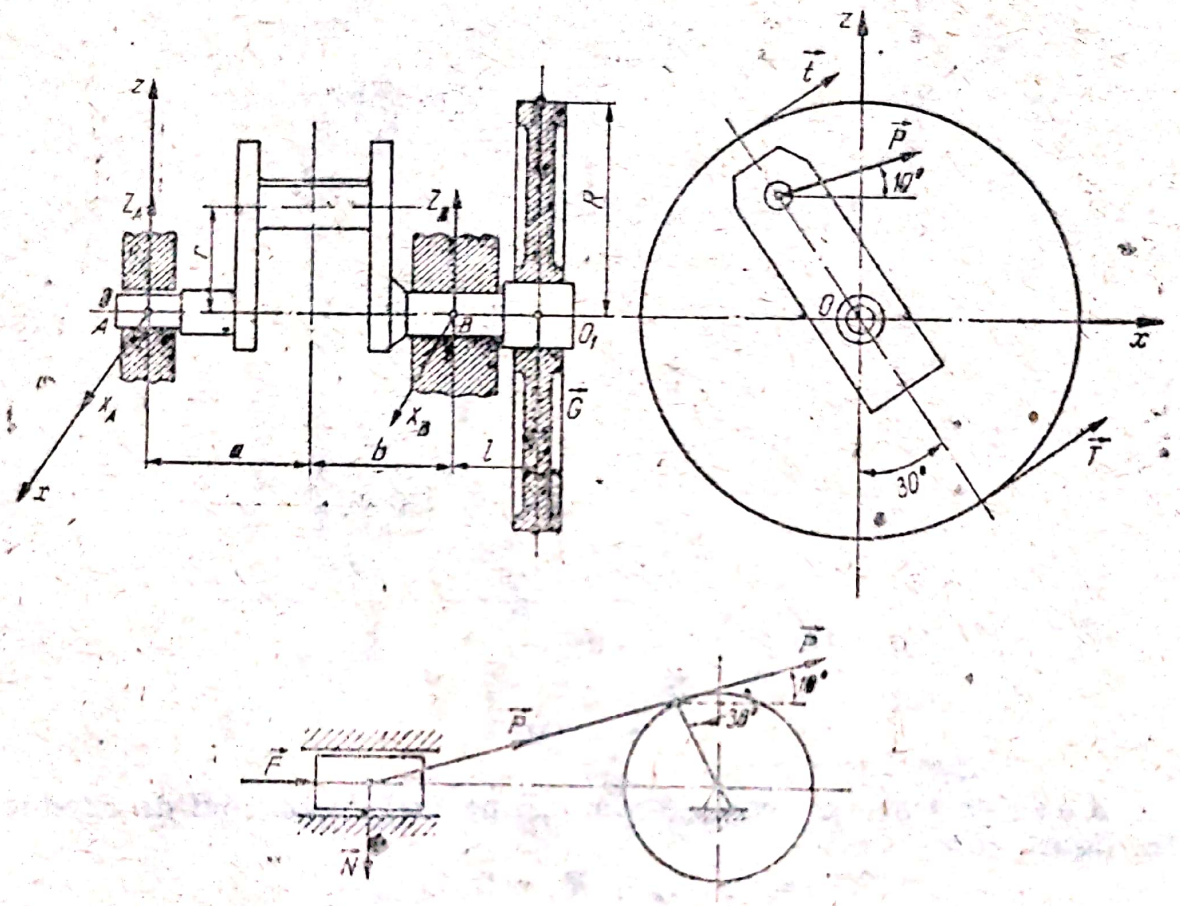


Fig. 3.20

Rezolvare. Ecuaţiile de echilibru ale forţelor ce acţionează asupra sistemului mecanic sînt:

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + X_B + T\cos 30° + t\cos 30° + P\cos 10° = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad Z_A + Z_B - G + P\sin 10° + t\sin 30° + T\sin 30° = 0$$

$$\Sigma M_x = 0: \quad 75Z_B - 100G + 100t\sin 30° + 100T\sin 30° + 30P\sin 10° = 0$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad 12{,}5P + 100t - 100T = 0$$

$$\Sigma M_z = 0: \quad 75X_B + 100T\cos 30° + 100t\cos 30° + 30P\cos 10° = 0.$$

Asociind relaţia: $T + t = 750$ şi rezolvînd sistemul de ecuaţii obţinut, rezultă

$$X_A = -965 \text{ daN}; \quad Z_A = -517 \text{ daN}; \quad X_B = -1654 \text{ daN};$$

$$Z_B = 1094 \text{daN}; \quad T = 500 \text{ daN}; \quad t = 250 \text{ daN}.$$

3.21. Cuplul de forţe T, avînd momentul de 120 daN · m se echilibrează prin presiunea pe dintele B al roţii conice OB şi prin reacţiunile din reazeme (fig. 3.21). Presiunea pe dinte este perpendiculară pe raza

Scanned with OKEN Scanner

$OB = 0{,}6$ m şi face cu orizontala unghiul $\alpha = 15°$. Să se determine reacţiunea din originea C şi lagărul A, dacă greutatea turbinei cu abur şi rotor este de 1200 daN şi este îndreptată după OC, iar distanţa $AC = 3$ m şi $AO = 1$ m.

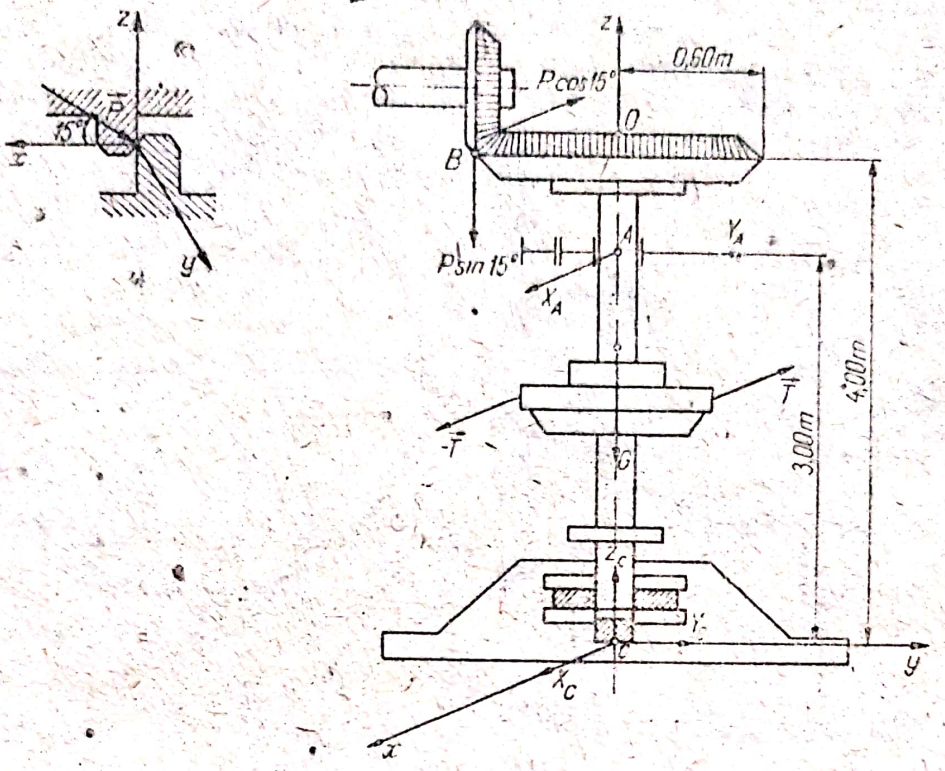


Fig. 3.21

Rezolvare. Ecuaţia de proiecţii pe axele sistemului de referinţă din figură sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + X_C = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A + Y_C = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad Z_C - G - P \sin 15° = 0$$

Momentul sistemului de forţe faţă de punctul C se scrie

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ X_A & Y_A & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -0{,}6 & 4 \\ -P\cos 15° & 0 & -P\sin 15° \end{vmatrix} + 120\mathbf{k}$$

Punînd condiţia ca suma momentelor forţelor în raport cu axele sistemului de referinţă să fie nulă, rezultă sistemul

$$\Sigma M_{xi} = 0: \quad -3Y_A + 0{,}6P \sin 15° = 0$$

$$\Sigma M_{yi} = 0: \quad 3X_A - 4P \cos 15° = 0$$

$$\Sigma M_{zi} = 0: \quad -0{,}6P \cos 15° + 120 = 0.$$

În urma rezolvării sistemului obţinut se deduce

$$P \approx 207 \text{ daN}; \; X_A \approx 266{,}6 \text{ daN}; \; Y_A \approx 10{,}7 \text{ daN}; \; X_C \approx -2266{,}6 \text{ daN};$$

$$Y_C \approx -10{,}7 \text{ daN}; \; Z_C \approx 1254 \text{ daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.22. O bară omogenă de greutate G și lungime l este prevăzută la extremități cu bile ca în fig. 3.22. Cele două bile pot glisa în ghidaje de formă cilindrică unul vertical și altul orizontal, distanța dintre ghidaje fiind a. Să se determine forța $\mathbf{F}$ care menține bara în echilibru astfel încît distanța de la punctul A_1 pînă la axa Ox să fie u_1, precum și reacțiunile din A_1 și A_2.

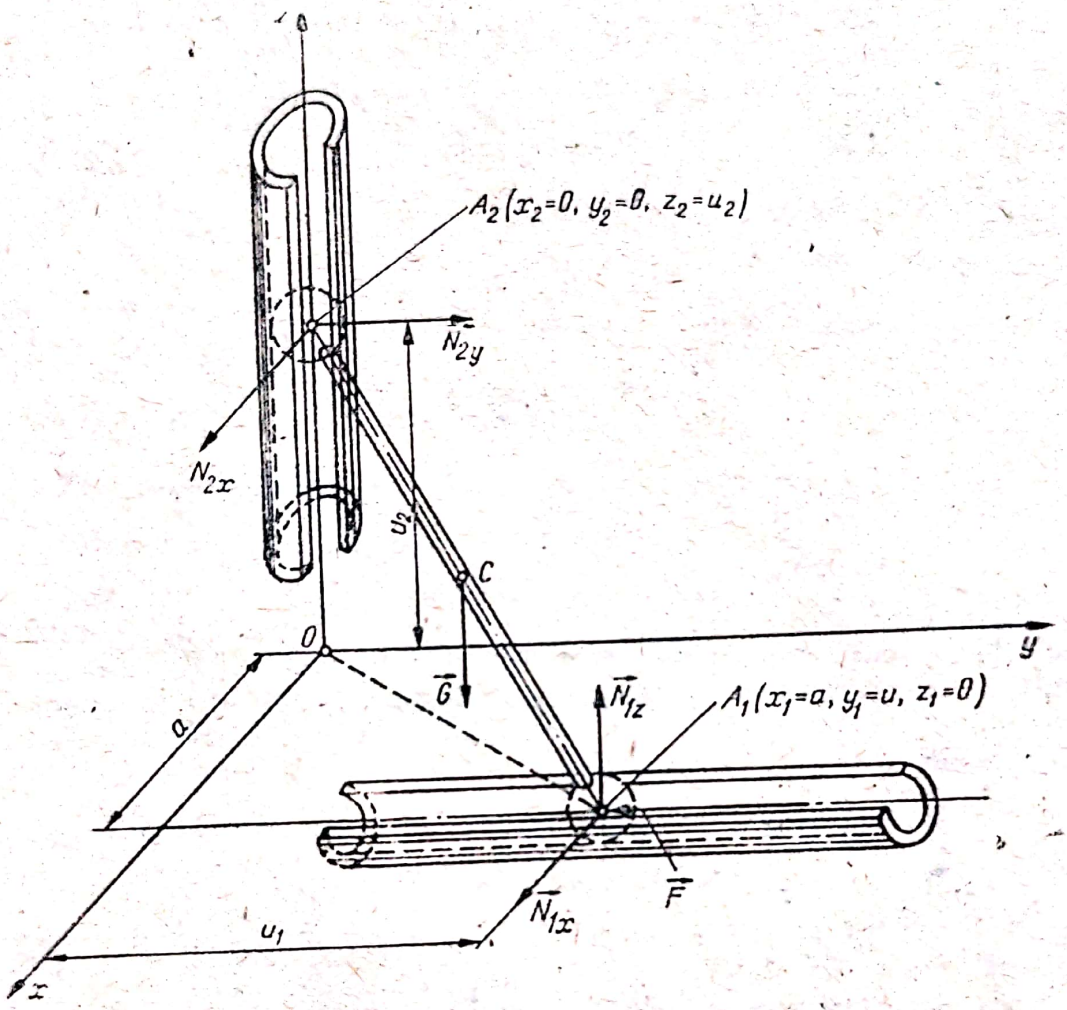


Fig. 3.22

Rezolvare. Din figură se observă că:

$$u_2 = \sqrt{l^2 - (a^2 + u_1^2)}$$

Coordonatele celor două puncte A_1 și A_2 sînt respectiv:

$$A_1(a,\ u_1,\ 0);\quad A_2(0,\ 0,\ \sqrt{l^2 - (a^2 + u_1^2)}).$$

Coordonatele centrului de greutate C vor fi:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a}{2};\quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{u_1}{2};$$

$$z_c = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{u_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - (a^2 + u_1^2)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile de echilibru raportate la sistemul de referință $Oxyz$ sînt:

$$\Sigma X_i = 0:\ N_{1x} + N_{2x} = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0:\ N_{2y} - F = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0:\ N_{1z} - G = 0;$$

$$\Sigma M_x = 0:\ -N_{2y} \cdot u_2 + N_{1z} \cdot u_1 - G\frac{u_1}{2} = 0$$

$$\Sigma M_y = 0:\ N_{2x} \cdot u_2 + \frac{a}{2}G - a \cdot N_{1z} = 0;$$

$$\Sigma M_z = 0:\ -N_{1x} \cdot u_1 - aF = 0.$$

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$N_{1z} = G;\quad N_{2x} = \frac{aG}{2\sqrt{l^2 - (a^2 + u_1^2)}}$$

$$N_{1x} = -\frac{aG}{2\sqrt{l^2 - (a^2 + u_1^2)}}$$

$$N_{2y} = \frac{u_1 G}{2\sqrt{l^2 - (a^2 + u_1^2)}};\quad F = \frac{u_1 G}{2\sqrt{l^2 - (a^2 + u_1^2)}}$$

$$N_1 = \sqrt{N_{1x}^2 + N_{1z}^2};\quad N_2 = \sqrt{N_{2x}^2 + N_{2y}^2}.$$

3.23. Ușa $ABCD$ se deschide cu ajutorul greutății Q, atîrnată de firul AEE_1, care trece peste scripeții E și E_1. Ușa fiind deschisă cu unghiul α, se menține în echilibru prin forța P, aplicată în punctul K și perpendiculară pe planul ușii (fig. 3.23). Să se determine relația între mărimile P și Q.

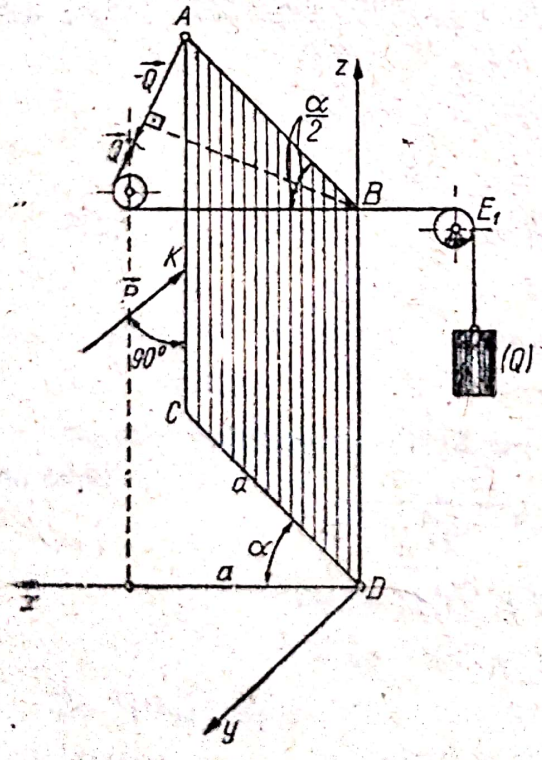


Fig. 3.23

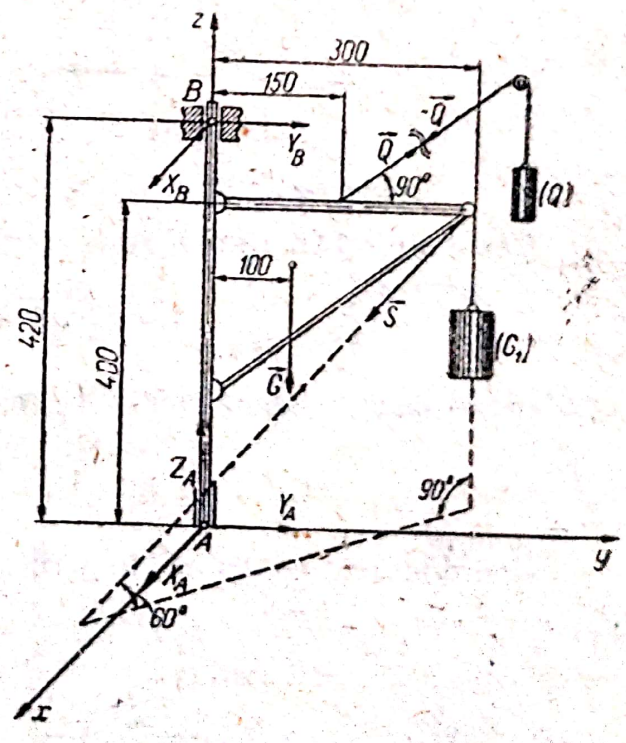


Fig. 3.24

Rezolvare. Deoarece mișcarea ușii este o rotație în jurul axei z, vom scrie ecuația de momente față de axa z; avem:

$$\Sigma M_z = 0: \quad aQ \cos \frac{\alpha}{2} - aP = 0$$

de unde se obține relația dintre forțele P și Q

$$P = Q \cos \frac{\alpha}{2}.$$

3.24. Să se găsească reacțiunile din lagărul B, crapodina A și tensiunea S din cablul macaralei din figura 3.24, acționată de cablul care trece peste scripete, încărcată cu forța $Q = 100$ daN. Unghiul cablului cu orizontala este de 60°. Greutatea macaralei este $G = 2000$ daN; greutatea încărcăturii, $G_1 = 4000$ daN. Dimensiunile sînt date în figură. Frecarea din scripeți se neglijează.

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru pentru forțele care solicită macaraua sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + X_B + S \cos 60° - Q = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A + Y_B = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad Z_A - G - G_1 - S \sin 60° = 0$$

$$\Sigma M_x = 0: \quad -100G - 300S \sin 60° - 300G_1 - 420Y_B = 0$$

$$\Sigma M_y = 0: \quad 400S \cos 60° - 400Q + 420X_B = 0$$

$$\Sigma M_z = 0: \quad 150Q - 300S \cos 60° = 0.$$

În urma rezolvării sistemului de ecuații de mai sus, rezultă

$$X_A = 2{,}4 \text{ daN}; \quad X_B = 47{,}6 \text{ daN}; \quad Y_A = -Y_B = 3334 \text{ daN};$$

$$Z_A = 6086 \text{ daN}; \quad S = 100 \text{ daN}.$$

3.25. Cuțitul unui strung este solicitat de forțele $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{P}_y$ și $\mathbf{P}_z$, care au valorile: 15 daN, 30 daN și 80 daN și care acționează ca în fig. 3.25,a. Considerînd cuțitul încastrat în suportul său, să se determine reacțiunile din încastrare.

Rezolvare. Reacțiunile din încastrare sînt $\mathbf{R}(R_x, R_y, R_z)$ și $\mathbf{M}(M_x, M_y, M_z)$ (fig. 3.25, b). Se pot scrie următoarele ecuații de echilibru

$$\Sigma X_i = 0: \quad R_x - P_x = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad R_y - P_y = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad R_z - P_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0: \quad M_x + 0{,}4P_y - 0{,}2P_z = 0$$

$$\Sigma M_y = 0: \quad M_y + 6P_z - 0{,}4P_x = 0$$

$$\Sigma M_z = 0: \quad M_z - 6P_y + 0{,}2P_z = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține

$$R_x = 15 \text{ daN}; \quad R_y = 30 \text{ daN}; \quad R_z = 80 \text{ daN}.$$

$$M_x = 4 \text{ cm} \cdot \text{daN}; \quad M_y = -474 \text{ cm} \cdot \text{daN}; \quad M_z = 164 \text{ cm} \cdot \text{daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

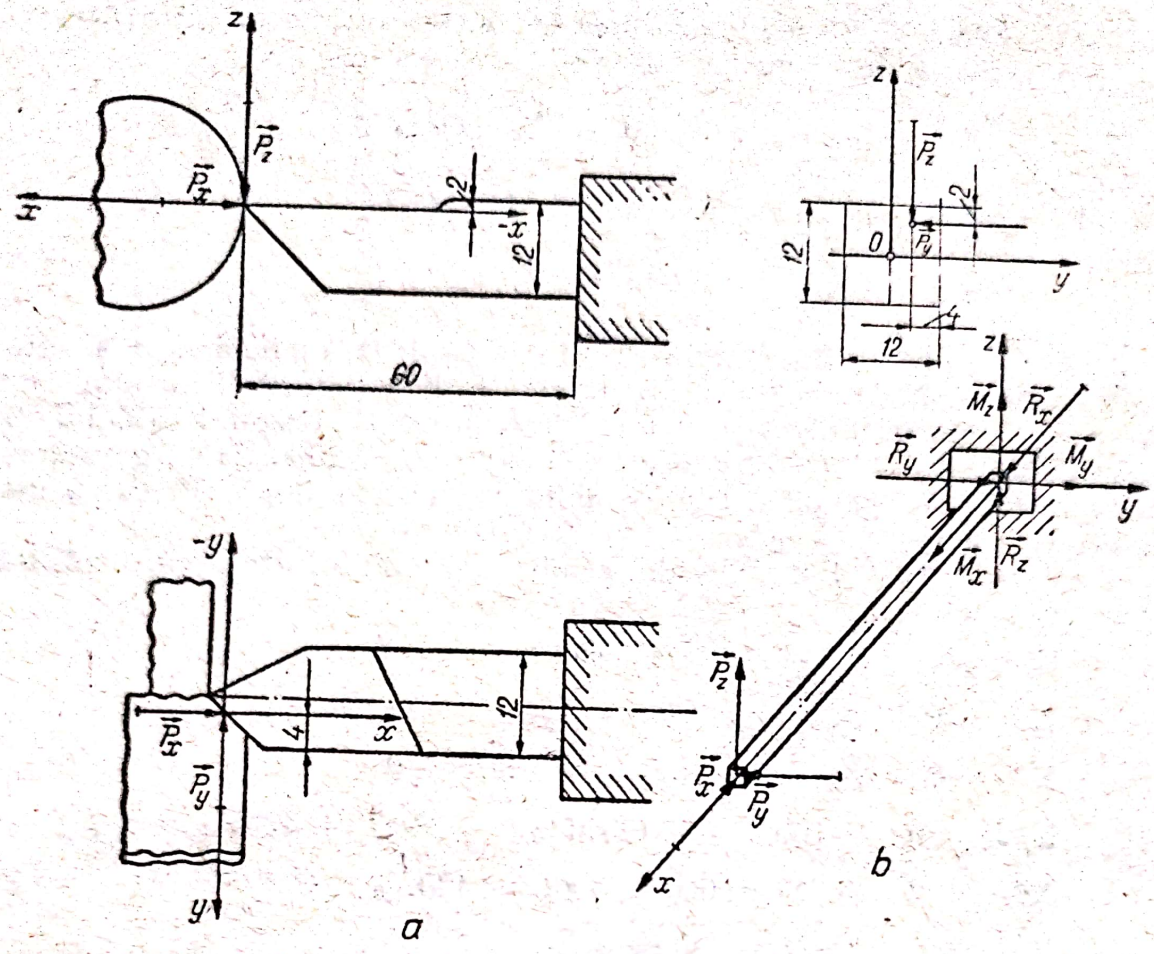


Fig. 3.25 a, b

Valorile numerice ale forței rezultante și momentului rezultant, din încastrare sînt respectiv

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{15^2 + 30^2 + 80^2} = 86{,}7 \text{ daN}$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{4^2 + 474^2 + 164^2} = 502 \text{ cm} \cdot \text{daN}.$$

3.26. Arborele V al unui strung transmite o putere $N = 8{,}8$ C.P., arborelui principal, la turația minimă de $n = 7$ rot/min (fig. 3.26). Se cunosc forțele: $P_{t_1} = 840$ daN; $P_{n_1} = 306$ daN; $P_{t_2} = 1510$ daN; $P_{n_2} = 586$ daN; $P_{a_2} = 564$ daN.

Se mai dau: $\sphericalangle\gamma = 24°40'$; $r_2 = 10$ cm; $r_3 = 5{,}54$ cm.

Se cere să se determine reacțiunile din lagărele A și B.

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A - P_{t_1}\cos\gamma - P_{n_1}\sin\gamma + X_B = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A - P_{a_2} = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad Z_A - P_{t_2} + P_{t_1}\sin\gamma - P_{n_1}\cos\gamma + Z_B = 0$$

$$\Sigma M_x = 0: \quad -5P_{t_2} + 8{,}4P_{t_1}\sin\gamma - 8{,}4P_{n_1}\cos\gamma + 20Z_B = 0$$

$$\Sigma M_y = 0: \quad r_2P_{t_1} - r_3P_{t_2} = 0;$$

$$\Sigma M_z = 0: \quad 5P_{n_2} - r_3P_{a_2} + 8{,}4P_{t_1}\cos\gamma + 8{,}4P_{n_1}\sin\gamma + 20Z_B = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

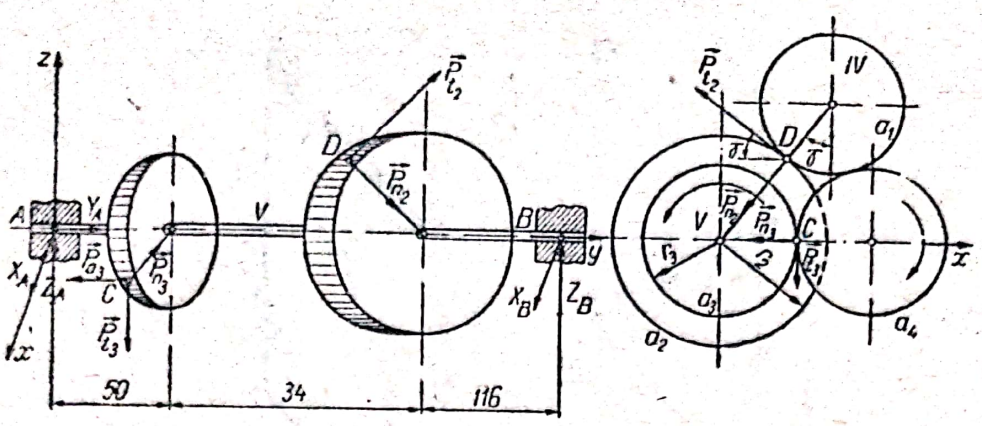


Fig. 3.26

Rezultă

$$X_A = 1111{,}25 \text{ daN}; \; Y_A = 564 \text{ daN}; \; Z_A = 1095{,}5 \text{ daN}$$
$$X_B = 360{,}75 \text{ daN}; \; Z_B = 346{,}5 \text{ daN}.$$

Reacţiunile totale din lagăre vor fi

$$R_A = \sqrt{1111{,}25^2 + 564^2 + 1095{,}5^2} = 1660 \text{ daN}$$

$$R_B = \sqrt{360{,}75^2 + 346{,}5^2} = 500 \text{ daN}.$$

Observaţie. Pentru calculul momentelor în raport cu axele sistemului de referinţă se pot utiliza expresiile analitice ale momentelor, putîndu-se scrie

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_3 & 50 & 0 \\ -P_{n_3} & -P_{a_3} & -P_{t_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin\gamma & 8{,}4 & \cos\gamma \\ -P_{t_2}\cos\gamma - P_{n_2}\sin\gamma & 0 & P_{t_2}\sin\gamma - P_{n_2}\cos\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 20 & 0 \\ X_B & 0 & Z_B \end{vmatrix}.$$

Momentul sistemului de forţe în raport cu axa Ox se obţine însumînd minorii versorului $\mathbf{i}$; analog se procedează pentru determinarea momentelor sistemului în raport cu axele Oy şi Oz. Avem

$$M_x = -5P_{t_3} - 8{,}4P_{n_2}\cos\gamma + 8{,}4P_{t_2}\sin\gamma + 20Z_B = 0;$$

$$M_y = -[-r_3P_{t_3} + r_2\sin^2\gamma\, P_{t_2} - r_2P_{n_2}\sin\gamma\cos\gamma + r_2\cos^2\gamma \cdot P_{t_2} + r_2\sin\gamma\cos\gamma \cdot P_{n_2}] = 0;$$

$$M_z = -r_3P_{a_3} + 50P_{n_3} + 8{,}4P_{t_2}\cos\gamma + 8{,}4P_{n_2}\sin\gamma - 20X_B = 0.$$

3.27. O placă omogenă de greutate G este susţinută de barele 1, ...6, ca în fig. 3.27. Asupra plăcii acţionează forţele $\mathbf{F}_1$ şi $\mathbf{F}_2$. Se cere să se determine eforturile din bare, fiind date: $G = 10^3$ N, $F_1 = 2 \cdot 10^3$ N, $F_2 = 10^3$ N, $a = 4$ m, $b = 4$ m şi $c = 3$ m.

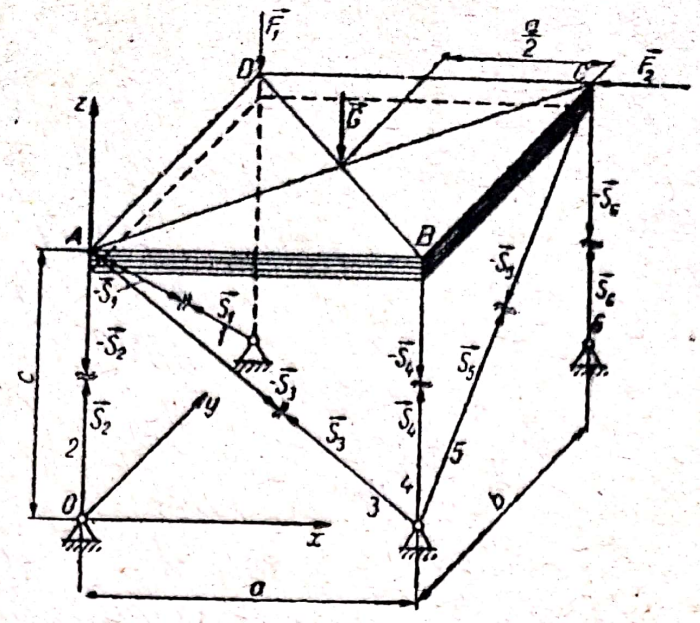


Fig. 3.27

Rezolvare. Secționăm barele și punem în ele eforturile $S_1, \ldots, S_6$ dirijate pe direcțiile barelor. Ecuațiile de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad -\frac{4}{5} S_3 - F_2 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad \frac{4}{5} S_1 - \frac{4}{5} S_5 = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad -F_1 - G + \frac{3}{5} S_1 + S_2 + \frac{3}{5} S_3 + S_4 + \frac{3}{5} S_5 + S_6 = 0$$

$$\Sigma M_x = 0: \quad \frac{4}{5} cS_1 + bS_6 - bF_1 - \frac{b}{2} G = 0$$

$$\Sigma M_y = 0: \quad \frac{4}{5} cS_3 + aS_4 + aS_6 - \frac{a}{2} G + cF_2 + \frac{3}{5} aS_5 = 0$$

$$\Sigma M_z = 0: \quad \frac{4}{5} aS_5 + bF_2 = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, rezultă cele șase eforturi din bare

$$S_1 = -1{,}25 \cdot 10^3 \text{ N}; \; S_2 = 4 \cdot 10^3 \text{ N}; \; S_3 = -1{,}25 \cdot 10^3 \text{ N};$$

$$S_4 = -2 \cdot 10^3 \text{ N}; \; S_5 = -1{,}25 \cdot 10^3 \text{ N}; \; S_6 = 3{,}25 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

3.28. Corpul de greutate G din fig. 3.28 se sprijină, prin bilele de la extremități, în puncte[illegible] și A_2 respectiv pe axele OX și OY și în punctul A_3 pe planul fix OXZ. [illegible]oscindu-se distan[illegible]ele $A_1A_2 = x_2 = a$, $A_1A_3' = x_3 = b = \frac{a}{2}$, $A_3A_3' =$ [illegible] c, [illegible]oziția centrului de greutate aflat la distanța $CA_3' = \frac{}{3}$ d[illegible]um [illegible] se determine forța orizontală $\mathbf{F}$ care menține corpul în echilibru [illegible]ziția [illegible]gură, determinată de distanța $OA_1 = u_1$, precum și reacț[illegible] [illegible], A_2 și A_3.

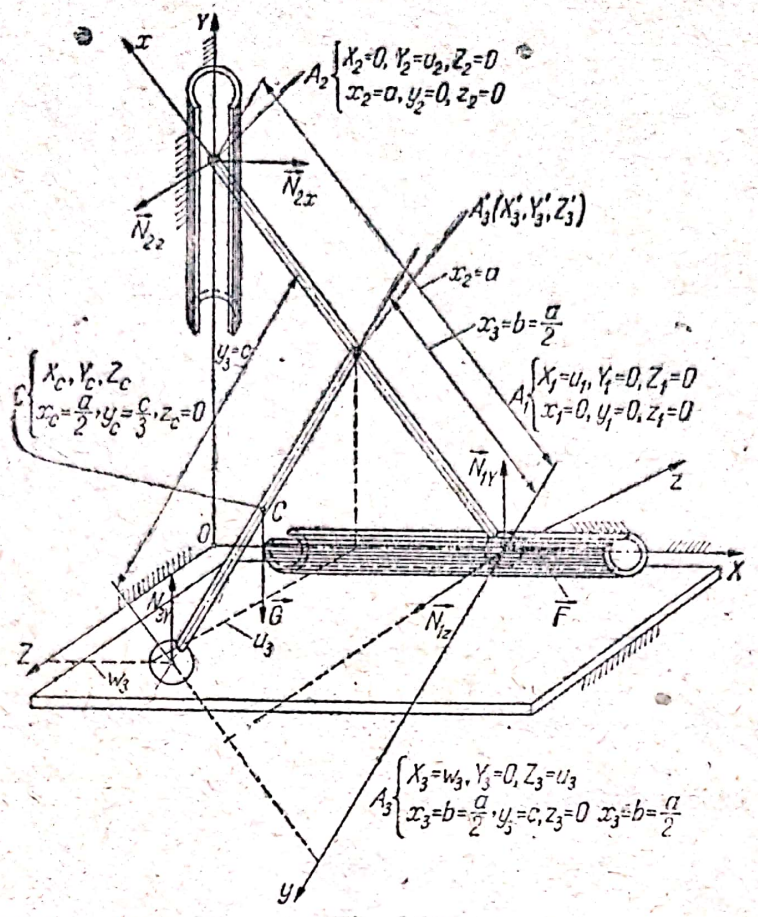


Fig. 3.28

R e z o l v a r e. Din figură rezultă coordonatele carteziene ale celor trei puncte

$$A_1(u_1,\ 0,\ 0)\ ;\ A_2(0,\ u_2,\ 0)\ ;\ A_3(w_3,\ 0,\ u_3).$$

Distanțele dintre cele trei puncte sînt

$$r_{12} = x_2,\ r_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_3^2},\ r_{31} = \sqrt{x_3^2 + y_3^2}$$

sau ținînd seama că $x_3 = \frac{1}{2}\, x_2$,

$$r_{12} = x_2,\ r_{23} = \sqrt{\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + y_3^2},\ r_{31} = \sqrt{\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + y_3^2}.$$

Punînd condiția ca distanțele dintre cele trei puncte să fie constante se obțin relațiile

$$\begin{aligned}(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2 - r_{12}^2 &= 0\\(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2 + (Z_3 - Z_2)^2 - r_{23}^2 &= 0\\(X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2 + (Z_1 - Z_3)^2 - r_{13}^2 &= 0\end{aligned}$$

care, în urma înlocuirii coordonatelor punctelor, devin

$$\begin{aligned}u_1^2 + u_2^2 - r_{12}^2 &= 0\\w_3^2 + u_2^2 + u_3^2 - r_{23}^2 &= 0\\(u_1 - w_3)^2 + u_3^2 - r_{31}^2 &= 0\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde se deduc necunoscutele u_2, u_3 și w_3, care determină poziția celor două puncte A_2 și A_3

$$u_2 = \pm\sqrt{r_{12}^2 - u_1^2}\,; \quad w_3 = \frac{u_1^2 - u_2^2 + (r_{23}^2 - r_{31}^2)}{2u_1}$$

$$u_3 = \pm\sqrt{r_{23}^2 - u_2^2 - w_3^2}.$$

Aceste relații permit determinarea mărimilor u_2, u_3 și w_3 în funcție de u_1 în cazul general în care punctele A_2 și A_3 sînt determinate în raport cu sistemul A_1xyz de coordonate x_2, x_3, y_3.

În cazul particular, în care $x_3 = \frac{1}{2}\,x_2$, se obține

$$u_2 = \pm\sqrt{x_2^2 - u_1^2}\,; \quad w_3 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2u_1} = \frac{2u_1^2 - x_2^2}{2u_1}\,;$$

$$u_3 = \pm\sqrt{r_{23}^2 - (x_2 - u_1^2) - \frac{2u_1^2 - x_2^2}{2u_1}}\,.$$

Coordonatele carteziene ale punctului A_3' sînt

$$X_3' = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{u_1}{2}\,; \quad Y_3' = \frac{Y_1 + Y_2}{2} = \frac{u_2}{2}\,; \quad Z_3' = 0.$$

Punctul C se află pe segmentul A_3A_3' determinat de raportul

$$\lambda = \frac{A_3C}{CA_3'} = 2.$$

Coordonatele punctului C vor fi deci

$$X_C = \frac{X_3 + \lambda X_3'}{1 + \lambda}\,; \quad Y_C = \frac{Y_3 + \lambda Y_3'}{1 + \lambda}\,; \quad Z_C = \frac{Z_3 + \lambda Z_3'}{1 + \lambda}$$

sau

$$X_C = \frac{u_1 + w_3}{3}\,; \quad Y_C = \frac{u_2}{3}\,; \quad Z_C = \frac{u_2}{3} \qquad (*)$$

Ecuațiile de echilibru raportate la sistemul de referință $OXYZ$ sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad N_{2X} - F = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_{1Y} + N_{3Y} - G = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad N_{1Z} + N_{2X} = 0$$

$$\Sigma M_X = 0: \quad N_{2Z}u_2 + GZ_c - N_{3Y}u_3 = 0$$

$$\Sigma M_Y = 0: \quad -N_{1Z}u_1 = 0$$

$$\Sigma M_Z = 0: \quad N_{1Y}u_1 - N_{2X}u_2 + N_{3Y}w_3 - GX_c = 0$$

de unde, ținînd seama de (*),

$$N_{1Z} = 0\,; \quad N_{2Z} = 0\,; \quad N_{3Y} = \frac{1}{3}\,G\,; \quad N_{1Y} = \frac{2}{3}\,G\,; \quad F = N_{2X} = \frac{1}{3}\cdot\frac{u_1}{u_2}\,G.$$

3.29. În figura 3.29 este reprezentată o placă orizontală în formă de triunghi dreptunghic, încărcată cu o sarcină uniform distribuită p. Vîrful drept al plăcii este articulat în O, iar vîrfurile ascuțite sînt simplu reze-

Scanned with OKEN Scanner

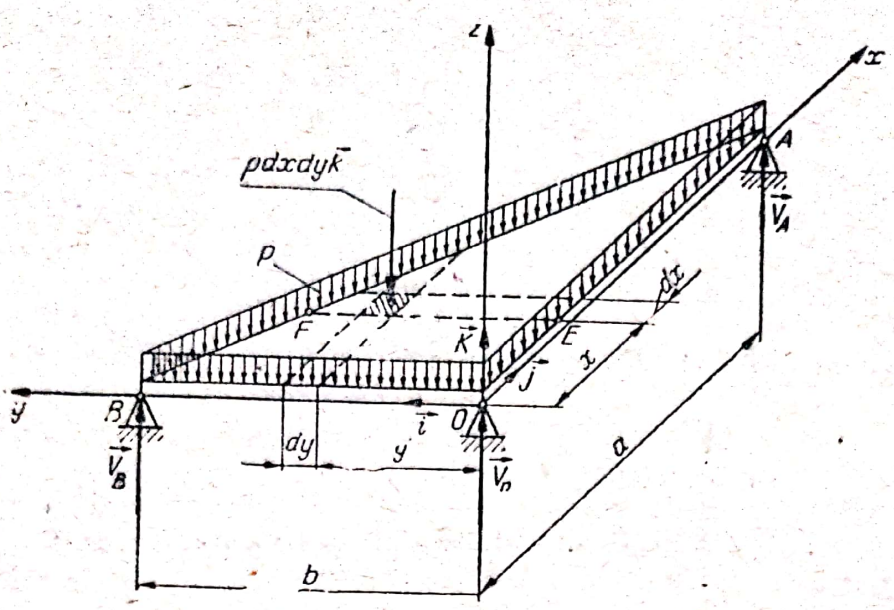


Fig. 3.29

mate în A şi B pe role fără frecare. Să se determine reacţiunile ce iau naştere în punctele de sprijin ale plăcii.

Rezolvare. Datorită modului de încărcare a plăcii, reacţiunea orizontală din articulaţia O va fi nulă.

Pentru determinarea reacţiunilor V_A, V_B şi V_o, considerăm un element de arie de dimensiuni dx şi dy, asupra căruia acţionează forţa $p\,dx\,dy\,\mathbf{k}$, care trebuie considerată ca o forţă concentrată în punctul $M(x, y)$.

Din asemănarea triunghiurilor AEF şi AOB rezultă

$$y = b - \frac{b}{a}x$$

ecuaţia dreptei ce constituie limita superioară de integrare cînd x parcurge întreaga suprafaţă a plăcii.

Ecuaţia vectorială de momente în raport cu articulaţia O va fi

$$a\mathbf{i} \times V_A\mathbf{k} + b\mathbf{j} \times V_B\mathbf{k} = \int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}x} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times p\mathbf{k}\,dx\,dy$$

sau

$$-aV_A\mathbf{j} + bV_B\mathbf{i} = \int_0^a \int_0^{(a-x)\frac{b}{a}} (-px\mathbf{j} + py\mathbf{i})\,dx\,dy.$$

Proiectînd această egalitate pe axele versorilor $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{j}$ se obţine

$$V_A = \frac{p}{a}\int_0^a \int_0^{(a-x)\frac{b}{a}} x\,dx\,dy = \frac{p}{a}\int_0^a xy\Big|_0^{\frac{b}{a}(x-a)}dx = \frac{pb}{a^2}\int_0^a x(a-x)\,dx = \frac{1}{6}pab;$$

$$V_B = \frac{p}{a}\int_0^a \int_0^{(a-x)\frac{b}{a}} y\,dx\,dy = \frac{p}{a}\int_0^a \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\frac{b}{a}(a-x)}dx = \frac{pb^2}{2ba^2}\int_0^a (a-x)^2\,dx = \frac{1}{6}pab.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația vectorială de echilibru a forțelor care acționează asupra plăcii este

$$\mathbf{V}_o + \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B + \frac{1}{2} pab\mathbf{k} = 0,$$

sau, în proiecție pe axa versorului $\mathbf{k}$,

$$V_A + V_B + V_o = \frac{1}{2} pab.$$

Înlocuind expresiile de mai sus ale lui V_A și V_B se obține V_o; rezultă

$$V_o = \frac{1}{6} pab.$$

3.30. Un cilindru de rază r și greutate P este legat de un plan orizontal fix prin cablu $ACDB$, în care se produce tensiunea $\mathbf{T}$. Să se determine reacțiunea $\mathbf{N}$ din punctul E, dacă distanța $AE = EB = a$ (fig. 3.30).

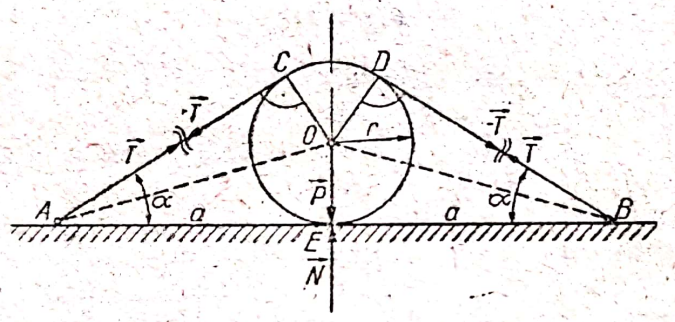


Fig. 3.30

Rezolvare. Scriem ecuația de proiecții pe verticală a celor patru forțe, rezultă

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N - P - 2T \sin \alpha = 0,$$

de unde $N = P + 2T \sin \alpha$.

Din ΔAOE rezultă

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{a};$$

însă

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\frac{r}{a}}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}}} = \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Prin urmare,

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2ar}{a^2 + r^2}.$$

Cu aceasta reacțiunea N devine

$$N = P + \frac{4a^2}{a^2 + a^2} T.$$

3.31. Sarcina $Q = 100$ daN este susținută de bara AO, articulată în punctul A, înclinată cu un unghi de 45° față de planul orizontal și de două lanțuri BA și CA de lungimi egale, așezate orizontal; $\sphericalangle CBA = \sphericalangle ACB = 45°$. Se cere să se determine eforturile din bara AO și din cele două lanțuri (fig. 3.31).

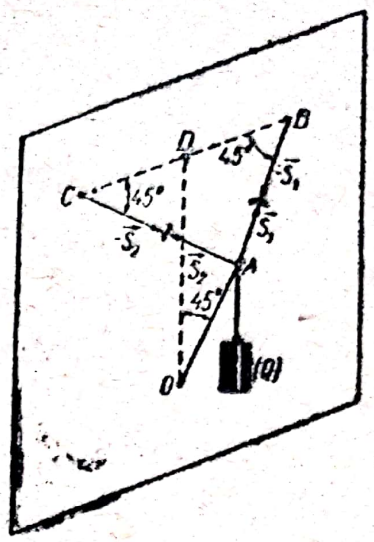


Fig. 3.31

Rezolvare. Vom nota cu S_1 și S_2 tensiunile din cele două lanțuri și cu S_3 efortul din bara AO.

Ecuațiile de proiecții pe cele trei axe de coordonate sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad S_1 \cos 45° + S_2 \cos 45° - S_3 \sin 45° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_1 \sin 45° - S_2 \sin 45° = 0$$
$$\Sigma Z_i = 0: \quad -Q + S_3 \cos 45° = 0.$$

Din ecuația a doua deducem $S_1 = S_2$, iar din ecuația a treia $S_3 = \frac{Q}{\cos 45°} = \sqrt{2}Q = 141$ daN. Din prima ecuație rezultă, în urma simplificării cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $2S_1 = S_3$ și $S_1 = S_2 = \frac{S_3}{2} = 70{,}5$ daN.

3.32. Sarcina $Q = 10^3$ daN este suspendată în punctul D, ca în figura 3.32. Barele sînt fixate în punctele A, B și C prin atriculații. Se cere să se determine reacțiunile din articulațiile A, B și C.

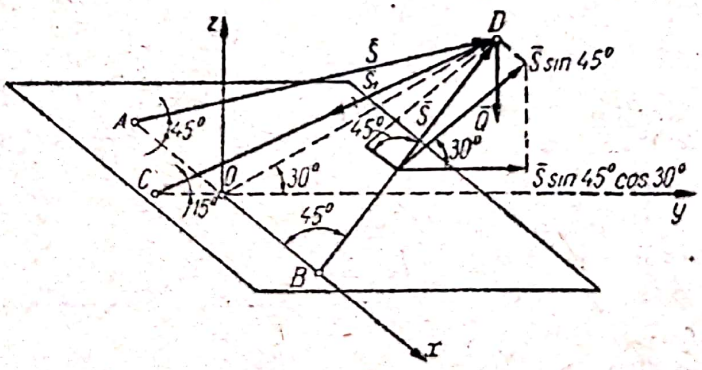


Fig. 3.32

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru ale nodului D sînt

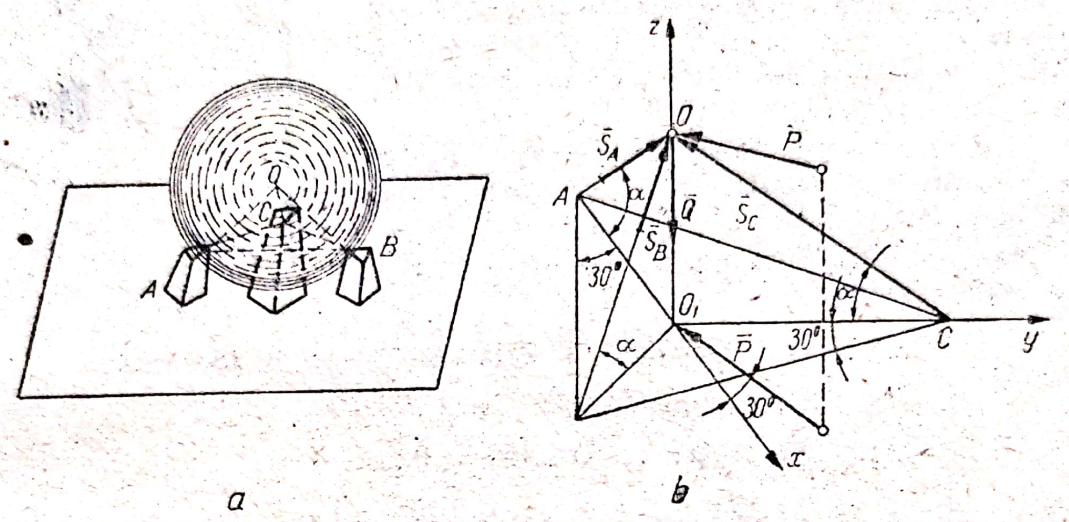
$$\Sigma Y_i = 0: \quad -S_1 \cos 15° + 2S \sin 45° \cos 30° = 0$$
$$\Sigma Z_i = 0: \quad -Q - S_1 \sin 15° + 2S \sin 45° \sin 30° = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține

$$S = 2640 \text{ daN} \text{ și } S_1 = 3350 \text{ daN}$$

Scanned with OKEN Scanner

3.33. Un rezervor sferic de rază $R = 10$ m, plin cu gaz, are o greutate totală $Q = 200 \cdot 10^3$ daN și se sprijină pe trei reazeme A, B și C situate în plan orizontal. Reazemele formează un triunghi echilateral cu latura $a = 10$ m. Suprafețele reazemelor sînt netede și perpendiculare pe razele OB și OC. Să se determine reacțiunile din reazeme, dacă vîntul suflă orizontal, perpendicular pe direcția BC, dinspre BC înspre A, cu o presiune $p = 120$ daN/m² de suprafață de proiecție a sferei. Toate reacțiunile trec prin centrul sferei (fig. 3.33).



a b

Fig. 3.33

Rezolvare. Vom înlocui reazemele cu reacțiuni și vom calcula forța vîntului P; avem

$$P = \frac{\pi d^2 p}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 120}{4} = 37{,}7 \cdot 10^3 \text{ daN}.$$

Se scriu ecuațiile de echilibru

$$\Sigma X_i = 0: \quad S_A \cos\alpha \cos 30° - S_B \cos\alpha \cos 30° - P \cos 30° = 0,$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_A \cos\alpha \sin 30° + S_B \cos\alpha \sin 30° - P \sin 30° - S_C \cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad S_A \sin\alpha + S_B \sin\alpha + S_C \sin\alpha = 0,$$

în care: $\cos\alpha = \frac{5}{\frac{\cos 30°}{10}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Înlocuind valorile lui $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$ în sistem, în urma rezolvării sistemului se obține:

$$S_A = 43{,}6 \cdot 10^3 \text{ daN}; \quad S_B = S_C = -21{,}8 \cdot 10^3 \text{ daN}.$$

3.34. Pentru ridicarea sarcinii P, de greutate 3000 daN, dintr-o mină, se utilizează trepiedul $ABCD$ și troliul E. Să se determine eforturile din picioarele trepiedului, la ridicarea uniformă a sarcinii, dacă triunghiul ABC este echilateral și dacă unghiurile formate de picioare și planul orizontal sînt egale cu 60°. De asemenea, unghiul format de cablul DE și orizontală este de 60°. Poziția troliului față de trepied este reprezentată în figura 3.34, a.

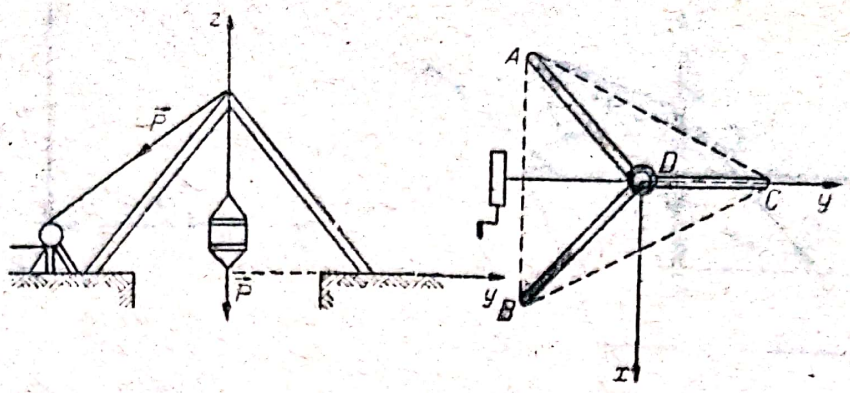


Fig. 3.34 a

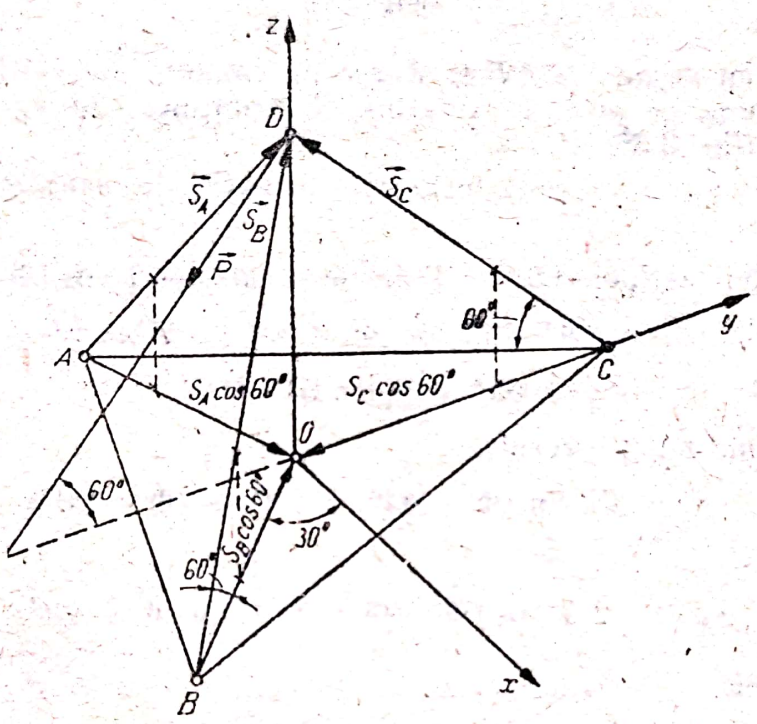


Fig. 3.34 b

R e z o l v a r e. Ecuaţiile de echilibru sînt (fig. 3.34, b)

$$\Sigma X_i = 0: \quad S_A \cos 60° \cos 30° - S_B \cos 60° \cos 30° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_A \cos 60° \sin 30° + S_B \cos 60° \sin 30° - S_C \cos 60° - P \cos 60° = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad S_A \sin 60° + S_B \sin 60° + S_C \sin 60° - P \sin 60° - P = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii se obţine

$$S_A = S_B = 3{,}15 \cdot 10^3 \text{ daN}; \quad S_C = 1{,}5 \cdot 10^2 \text{ daN}.$$

3.35. Stîlpul AB, care susţine cablul aerian este ancorat cu doi tiranţi AC şi AD, la care $\sphericalangle CBD = 90°$. Să se determine efortul din stîlp şi din tiranţi, în funcţie de unghiul format de una din cele două ramuri

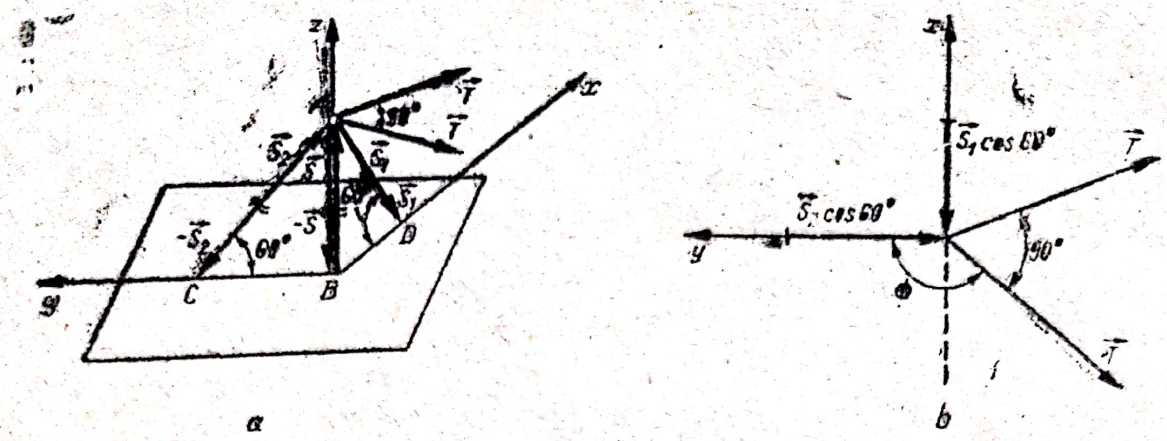


Fig. 3.35

ale cablului cu suprafaţa CBA. Ramurile cablului sînt orizontale şi perpendiculare una pe alta. Forţele lor de tracţiune sînt egale între ele şi egale cu T (fig. 3.35, a).

Rezolvare. Scriem cele trei ecuaţii de echilibru, utilizînd şi fig. 3.35, b,

$$\Sigma X_i = 0: \quad -S_1 \cos 60° + T \sin (\Phi - 90°) - T \cos (\Phi - 90°) = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_2 \cos 60° + T \cos (\Phi - 90°) + T \sin (\Phi - 90°) = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad S + S_2 \sin 60° + S_1 \sin 60° = 0.$$

Din prima ecuaţie rezultă

$$S_1 = 2T \sin (\Phi - 90°) - 2T \cos (\Phi - 90°)$$

din a doua

$$S_2 = -2[T \cos (\Phi - 90°) + T \sin (\Phi - 90°)],$$

iar din a treia

$$S = -\frac{S_1 + S_2}{2}\sqrt{3}.$$

În final se obţine

$$S_1 = -2T(\sin \Phi + \cos \Phi); \; S_2 = -2T(\sin \Phi - \cos \Phi); \; S = 2\sqrt{3}\, T \sin \Phi.$$

3.36. Să se determine, în funcţie de unghiul α, efortul în stîlpul vertical şi în picioarele macaralei reprezentate în figura 3.36, a, dacă se cunoaşte $AB = BC = AD = AE$.

Fixarea în punctele A, B, D şi E se face prin articulaţii, iar unghiul $EAD = 90°$.

Rezolvare. Alegem sistemul de referinţă ca în fig. 3.36, b. Ecuaţiile de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad S_1 \cos 45° \cos 45° + S_2 \cos 45° \cos 45° + P \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -S_1 \cos 45° \sin 45° + S_2 \cos 45° \sin 45° + P \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad S_1 \cos 45° + S_2 \cos 45° + S = 0$$

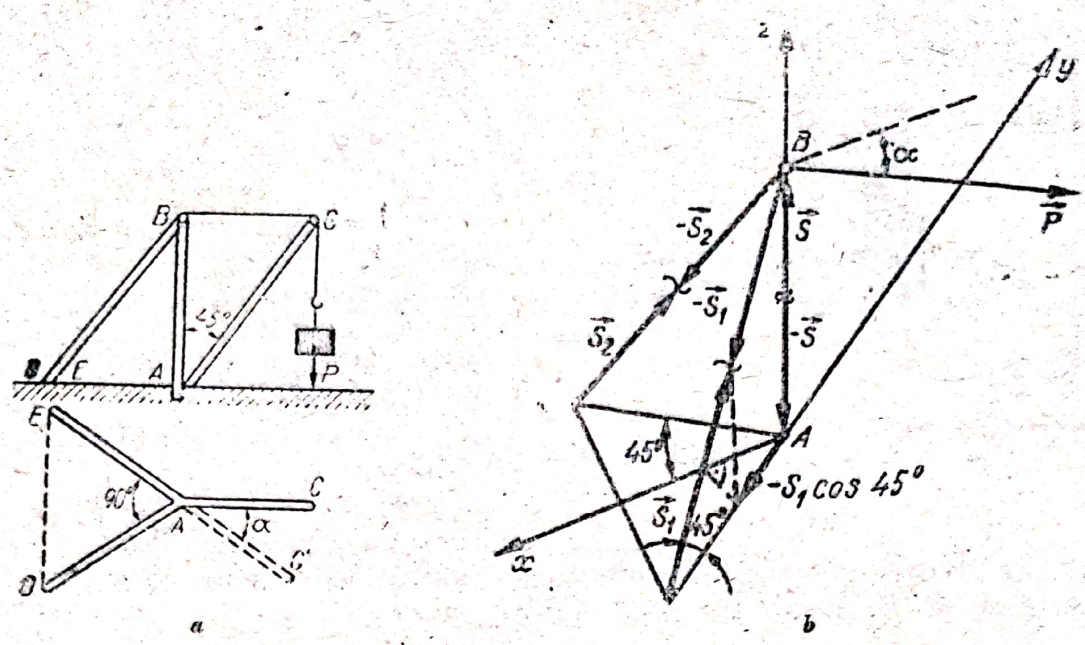


Fig. 3.36

Sistemul se mai scrie

$$S_1 + S_2 + 2P\cos\alpha = 0$$
$$-S_1 + S_2 + 2P\sin\alpha = 0$$
$$S_1 + S_2 + \sqrt{2}S = 0.$$

Rezultă

$$S = \sqrt{2}P\cos\alpha;\ S_1 = -P(\cos\alpha - \sin\alpha);\ S_2 = -P(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

3.37. Un laminor este format din două valțuri cu diametrele de 50 cm care se rotesc în sensuri inverse, conform săgeților din fig. 3.37. Distanța dintre valțuri este $a = 0{,}5$ cm. Ce grosime trebuie să aibă lingoul încălzit, dacă coeficientul de frecare dintre lingou și valțuri este $\mu = 0{,}1$?

Rezolvare. Componentele orizontale ale forțelor de frecare trag tabla între cilindrii, iar componentele orizontale ale reacțiunii normale se opun tendinței de mișcare a acesteia. Pentru a fi posibilă apucarea tablei între valțuri va trebui ca

$$2N\sin\alpha \leqslant 2\mu N\cos\alpha$$

sau

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \mu;\ \operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varphi;\ \alpha \leqslant \varphi$$

Grosimea maximă a lingoului încălzit este egală cu baza mică a trapezului $OAB O_1$; distanța

$$OO_1 = b + 2R\cos\alpha = 2R + a.$$

Rezultă

$$b = a + 2R(1 - \cos\alpha).$$

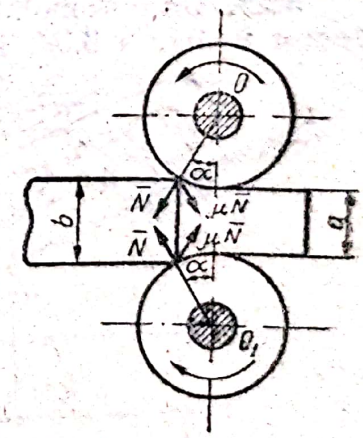


Fig. 3.37

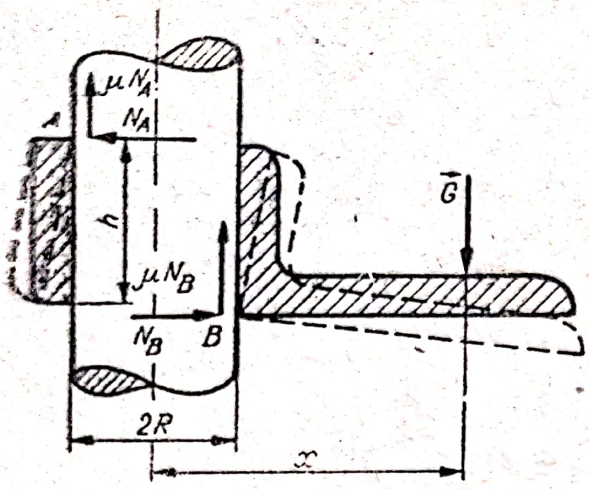


Fig. 3.38

Din $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varphi$, rezultă $\cos\alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$; deci

$$b \leqslant a + 2r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right) \leqslant 0{,}75 \text{ cm}.$$

3.38. Cîrligul de susținere al unui telefonist are forma din figura 3.38. Știind că $h = 18$ cm și coeficientul de frecare dintre cîrlig și stîlp este $\mu = 0{,}3$, să se determine distanța minimă x pînă unde să se sprijine muncitorul pentru a nu aluneca.

Rezolvare. Tendința de mișcare a cîrligului fiind în jos, forțele de frecare sînt orientate în sus. Se vor considera contactele în punctele A și B. Ecuațiile de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_A + N_B = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad \mu N_A + \mu N_B - G = 0$$
$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad hN_B + 2\mu R N_B - (R + x)G = 0.$$

Din prima ecuație rezultă

$$N_A = N_B,$$

iar din a doua

$$N_A = N_B = \frac{G}{2\mu}.$$

Înlocuind aceste valori în ultima ecuație, obținem

$$\frac{hG}{2\mu} + 2\mu R\frac{G}{2\mu} - RG - xG = 0.$$

Simplificînd prin G și efectuînd reducerile, rezultă

$$x = \frac{h}{2\mu} = \frac{18}{0{,}6} = 30 \text{ cm}.$$

3.39. Un automobil, avînd greutatea G și poziția centrului de greutate definit în figura 3.39, se găsește frînat pe o pantă cu unghiul α. Se cere

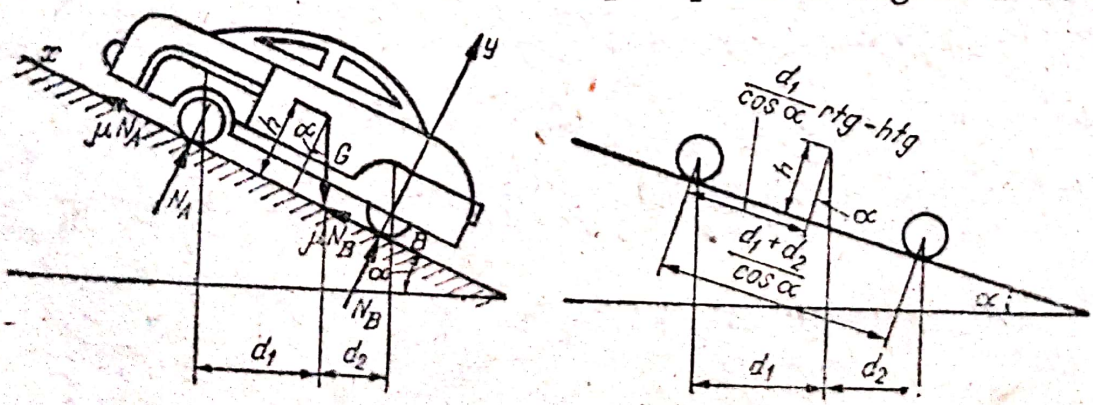


Fig. 3.39

coeficientul de frecare dintre roți și sol, pentru ca automobilul să nu alunece, precum și reacțiunile solului N_A și N_B. Raza roții este r (fig. 3.39).

Rezolvare. Scriem ecuațiile de echilibru

$$\Sigma X_i = 0: \quad \mu N_A + \mu N_B - G \sin \alpha = 0.$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_A + N_B - G \cos \alpha = 0.$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \frac{d_1 + d_2}{\cos \alpha} N_B - hG \sin \alpha - \left(\frac{d_1}{\cos \alpha} + r \operatorname{tg} \alpha - h \operatorname{tg} \alpha \right) G \cos \alpha = 0.$$

Rezultă

$$N_A = \frac{d_2 - r \sin \alpha}{d_1 + d_2} G \cos \alpha,$$

$$N_B = \frac{d_1 + r \sin \alpha}{d_1 + d_2} G \cos \alpha$$

$$\mu = \frac{G \sin \alpha}{N_A + N_B} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \mu \geqslant \operatorname{tg} \alpha.$$

3.40. O scîndură omogenă se sprijină pe două reazeme pe un plan orizontal aspru. Greutatea scîndurii este P, iar coeficienții de frecare dintre reazeme și planul de sprijin sînt μ_1 și μ_2. Să se determine valoarea maximă a forței orizontale Q pentru care echilibrul scîndurii mai este posibil (fig. 3.40).

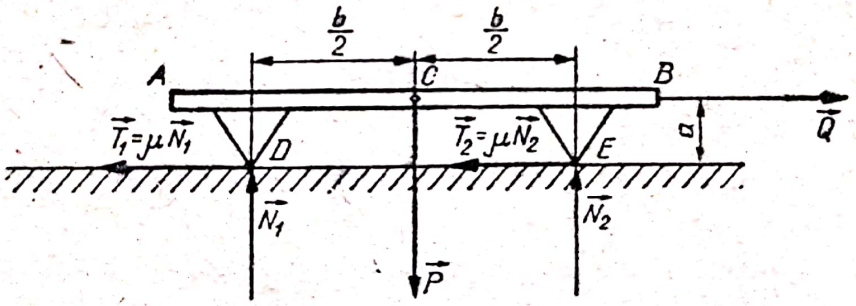


Fig. 3.40

Rezolvare. Ținînd seama că pentru echilibrul la limită

$$T_1 = \mu_1 N_1; \; T_2 = \mu_2 N_2$$

ecuațiile scalare de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad Q - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_1 + N_2 - P = 0$$

$$\Sigma M_{(E)} = 0: \; -aQ + \frac{b}{2} P - bN_1 = 0.$$

Rezolvînd sistemul, se obține

$$N_1 = \frac{P}{2} - \frac{a}{b}Q\,;\quad N_2 = \frac{P}{2} + \frac{a}{b}Q\,;$$

$$Q = \frac{(\mu_1 + \mu_2)b}{2[b + (\mu_1 - \mu_2)a]}\,P.$$

3.41. Pe o tobă fixă se înfășoară, formînd n spire complete, un cablu de care este suspendată sarcina Q. Coeficientul de frecare la alunecare dintre cablu și tobă este μ. Să se determine numărul n de spire astfel încît cablul să rămînă în echilibru sub acțiunea greutății p a porțiunii liber desfășurate (fig. 3.41). Aplicație numerică pentru: $Q = 10$ kN, $p = 20$ N, $\mu = 0{,}1$.

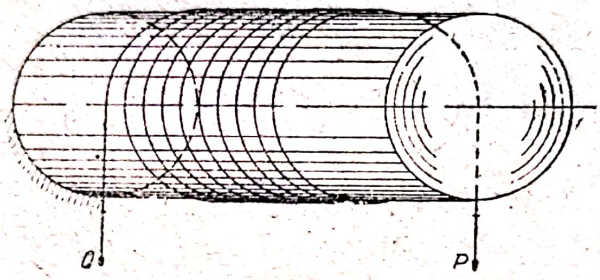


Fig. 3.41

Rezolvare. Se scrie formula lui Euler pentru tendința de mișcare a firului în sensul forței Q

$$Q = pe^{\mu\alpha};$$

unghiul de înfășurare α al firului este $\alpha = 2\pi n + \pi = (2n + 1)\pi$, prin urmare

$$Q = pe^{\mu\pi(2n+1)},$$

de unde se deduce numărul de spire

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu\pi}\ln\frac{Q}{p} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0{,}1\,\pi}\ln\frac{10000}{20} - 1\right) = 9{,}4 \simeq 10 \text{ spire}.$$

3.42. Un lingou în formă de prismă de greutate Q este legat printr-un cablu și așezat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$. Coeficientul de frecare dintre lingou și plan este $\mu = 0{,}2$ (fig. 3.42). Să se determine unghiul Φ la limita echilibrului.

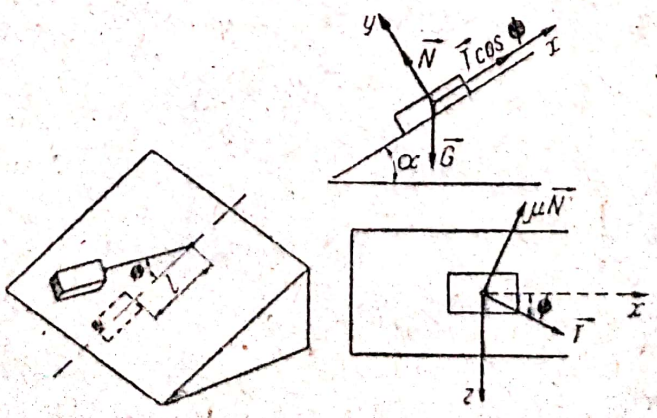


Fig. 3.42

Rezolvare. Fie N reacțiunea planului și T — tensiunea din cablu; ecuațiile de echilibru, raportate la sistemul de referință din figură sînt:

$$\Sigma X_i = 0: \quad G \sin \alpha - T \cos \Phi - \mu N \sin \Phi = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad G \cos \alpha - N = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad T \sin \Phi - \mu N \cos \Phi = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații scalare de echilibru, deducem

$$\sin \Phi = \mu \Rightarrow \sin \Phi = 0{,}2 \Rightarrow \Phi = \arcsin 0{,}2 = 11°32'.$$

3.43. Să se determine forța P, necesară ridicării pe planul înclinat a culisei de greutate Q din figura 3.43. Coeficientul de frecare dintre culisă și plan este $\mu = 0{,}13$, greutatea $Q = 1000$ daN, $\sphericalangle \beta = 60°$ și $\sphericalangle \alpha = 35°$.

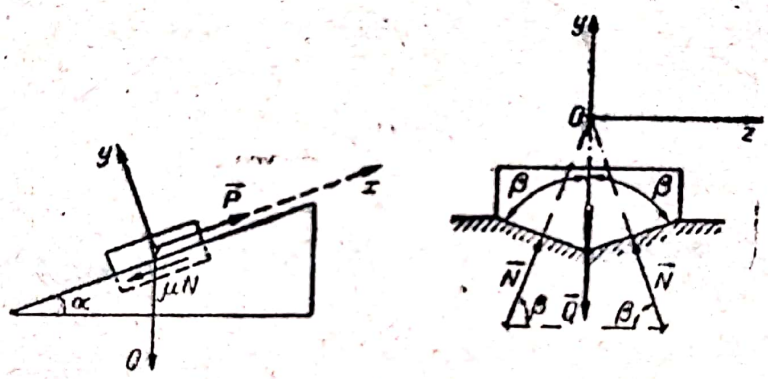


Fig. 3.43

Rezolvare. Reprezentînd reacțiunile și forțele de frecare, se pot scrie următoarele ecuații de echilibru

$$\Sigma X_i = 0: \quad P - 2\mu N - Q \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad 2N \sin \beta - Q \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad N \cos \beta - N \cos \beta = 0.$$

Rezolvînd sistemul, se obține

$$N = \frac{Q \cos \alpha}{2 \sin \beta} = \frac{1000 \cos 35°}{2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 473 \text{ daN}$$

$$P = 2\mu N + Q \sin \alpha = 2 \cdot 0{,}13 \cdot 473 + 1000 \cdot 0{,}573 = 696 \text{ daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

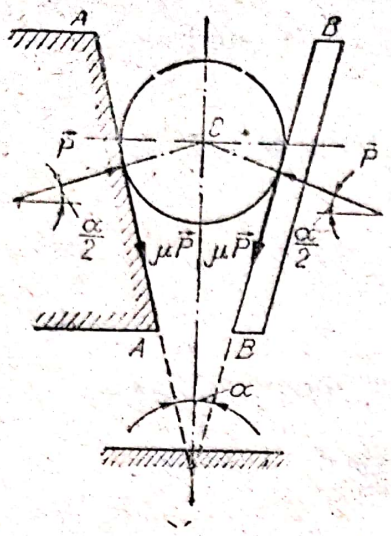


Fig. 3.44

Forța necesară ridicării culisei pe planul înclinat este

$$P \geqslant 696 \text{ daN}.$$

3.44. Să se determine valoarea unghiului de prindere al concasorului cu fălci din figura 3.44, adică imposibilitatea expulzării în sus a bulgărului de minereu C, care trebuie sfărîmat în timpul apăsării fălcilor A și B. Se va considera forma sferică a bulgărului de minereu.

Rezolvare. Se va scrie ecuația de proiecții pe verticală a forțelor ce acționează asupra bulgărului, a cărui greutate se neglijează. Avem:

$$\Sigma Y_i = 0: \quad 2P \sin \frac{\alpha}{2} - 2\mu P \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Rezultă

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \mu = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \alpha \leqslant 2\varphi.$$

În practică se ia de obicei: $\alpha = 15° \div 25°$.

C. PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

3.45. Pe platforma unui cărucior cu trei roți, se găsește în punctul M greutatea $P = 100$ daN. Poziția punctului M este determinată de coordonatele: $x = 1{,}1$ m și $y = 0{,}75$ m.

Se cere să se determine presiunea fiecărei roți a căruciorului asupra podelei, neglijînd greutatea proprie, cunoscînd: $AB = 1$ m, $CE = 0{,}2$ m și $CD = 2{,}2$ m (fig. 3.45).

R. $N_1 = 2{,}5$ daN, $N_2 = 52{,}5$ daN și $N_3 = 45$ daN.

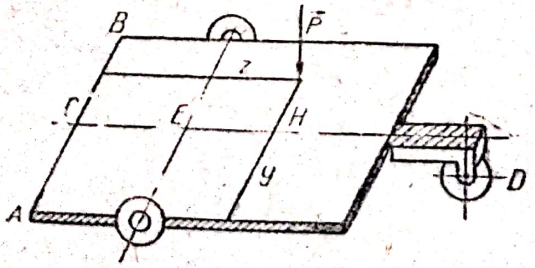
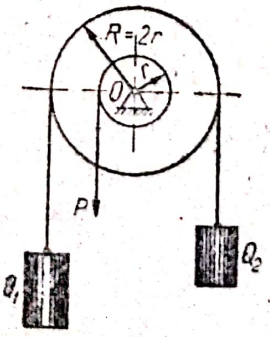


Fig. 3.45



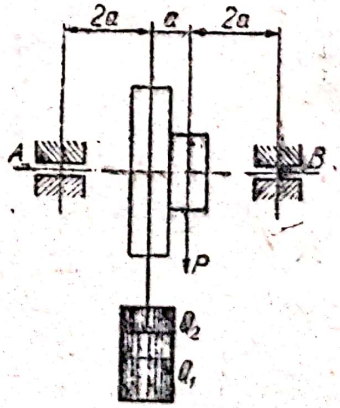


Fig. 3.46

3.46. Să se determine reacţiunile din lagărele A şi B, precum şi forţa P necesară echilibrului, pentru sistemul din fig. 3.46, neglijînd frecările. Se cunosc: $Q_1 = 100$ daN şi $Q_2 = 200$ daN.

R. $P = 200$ daN, $R_A = 260$ daN şi $R_B = 240$ daN.

3.47. Pe un ax orizontal AB este fixată o roată C, cu raza $R = 1$ m şi un pinion D, avînd raza $r = 10$ cm; celelalte dimensiuni sînt date în fig. 3.47. Tangentă la roata C este aplicată forţa orizontală $P = 10$ daN, iar pinionul D, i se aplică, de asemenea tangent, forţa verticală Q.

Se cere să se determine forţa Q şi reacţiunile din legărele A şi B, în poziţia de echilibru.

R. $X_A = -1$ daN; $X_B = -9$ daN; $Z_A = -90$ daN; $Z_B = -10$ daN. $Q = 100$ daN.

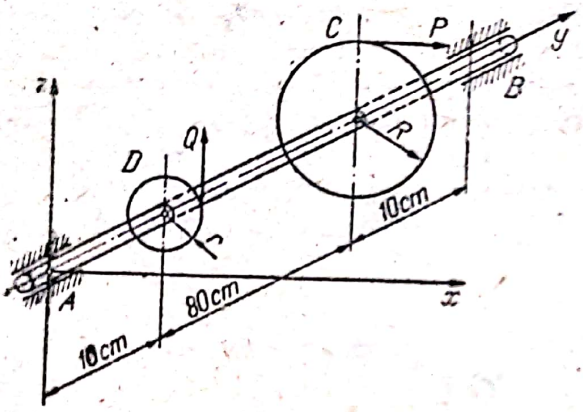


Fig. 3.47

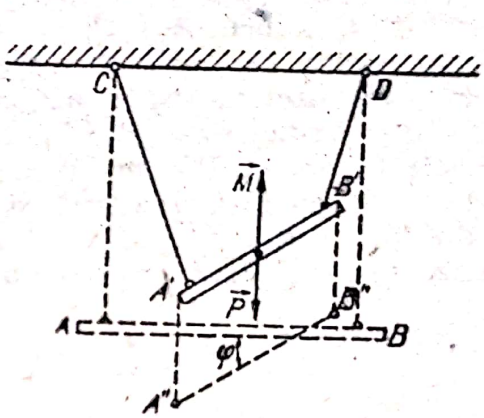


Fig. 3.48

3.48. O bară de oţel AB, de greutate P este suspendată de două fire paralele AC şi BD (fig. 3.48). Se dă barei o poziţie $A'B'$, în care este menţinută în echilibru de un cuplu orizontal de forţe, avînd un moment dat $\mathbf{M}$. Se cere să se determine unghiul φ de rotire al barei, dacă $AC = BD = AB = l$.

R. $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{2M}{l \cdot P}$.

3.49. De un arbore de transmisie orizontal, sînt fixate solidar două şaibe de raze $R = 0{,}4$ m şi $r = 0{,}2$ m. Se dau tensiunile din extremităţile curelei, care este trecută peste prima şaibă: $T_1 = 340$ daN şi $T_2 = 200$ daN. Primul capăt este vertical, iar unghiul dintre al doilea capăt şi verticală este egal cu 45°. Tensiunile din extremităţile curelei, care este trecută peste cea de-a doua şaibă, sînt T_3 şi T_4, capetele fiind paralele şi formînd cu verticala unghiuri de 30° (fig. 3.49).

Se cere să se determine reacţiunile din lagărele A şi B şi tensiunile T_3 şi T_4, ştiind că $T_3 = 2T_4$ şi că forţele de tensiune din curele şi reacţiunile lagărelor, se echilibrează între ele.

R. $T_3 = 560$ daN, $T_4 = 280$ daN; $X_A = 257$ daN, $Z_A = 643$ daN; $X_B = 304$ daN; $Z_B = 565$ daN.

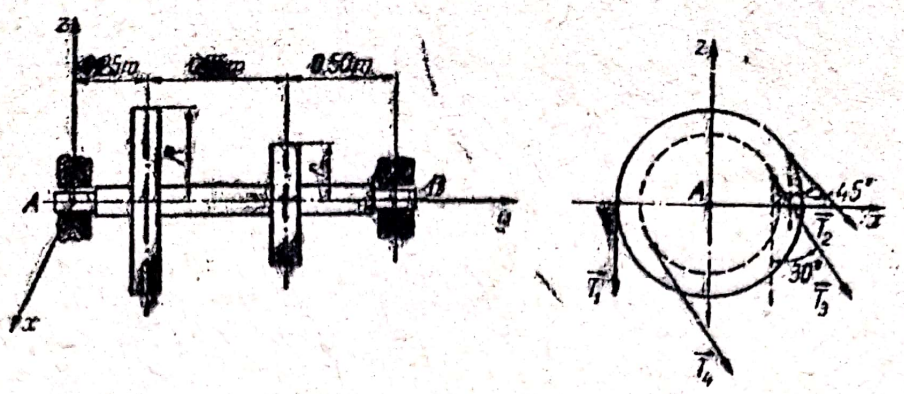


Fig. 3.49

3.50. Pentru măsurarea puterii care se transmite prin şaiba de curea A, şaibei de curea B, se utilizează dinamometrul reprezentat schematic în fig. 3.50. Şaibele A şi B se rotesc liber pe un ax fix OO_1. Şaiba A face corp comun cu roata din faţă C, iar şaiba B, cu roata dinţată D. Cele două roţi dinţate angrenează cu roţile dinţate E şi F, care se rotesc liber în jurul axului vertical LL_1. Diametrele roţilor dinţate C, D, E şi F sînt egale fiecare cu 20 cm. Momentul de rotaţie al şaibei A, avînd valoarea de 1200 cm daN este egal cu momentul forţei care acţionează şaiba B. Rotaţia axului LL_1 în jurul axului OO_1 este oprită cu ajutorul dinamometrului P, fixat în punctul K.

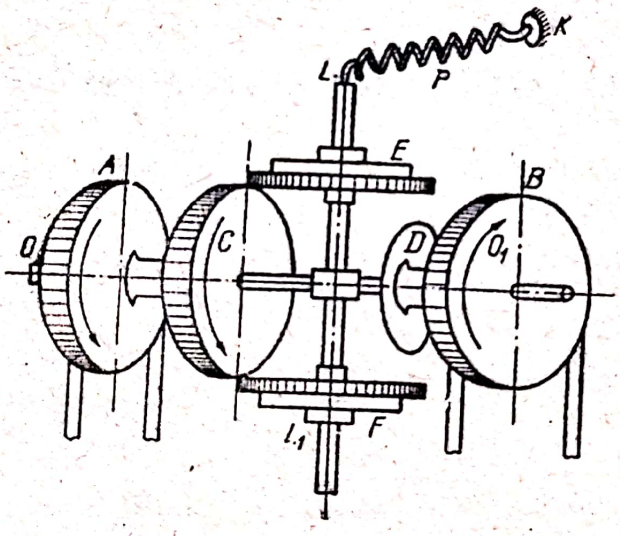


Fig. 3.50

Se cere să se determine presiunea exercitată de roţile dinţate E şi F pe axul LL_1. Se cere, de asemenea, forţa P_1 indicată de dinamometru, dacă $LE = 90$ cm. Direcţia LK este perpendiculară pe suprafaţa OLO_1.

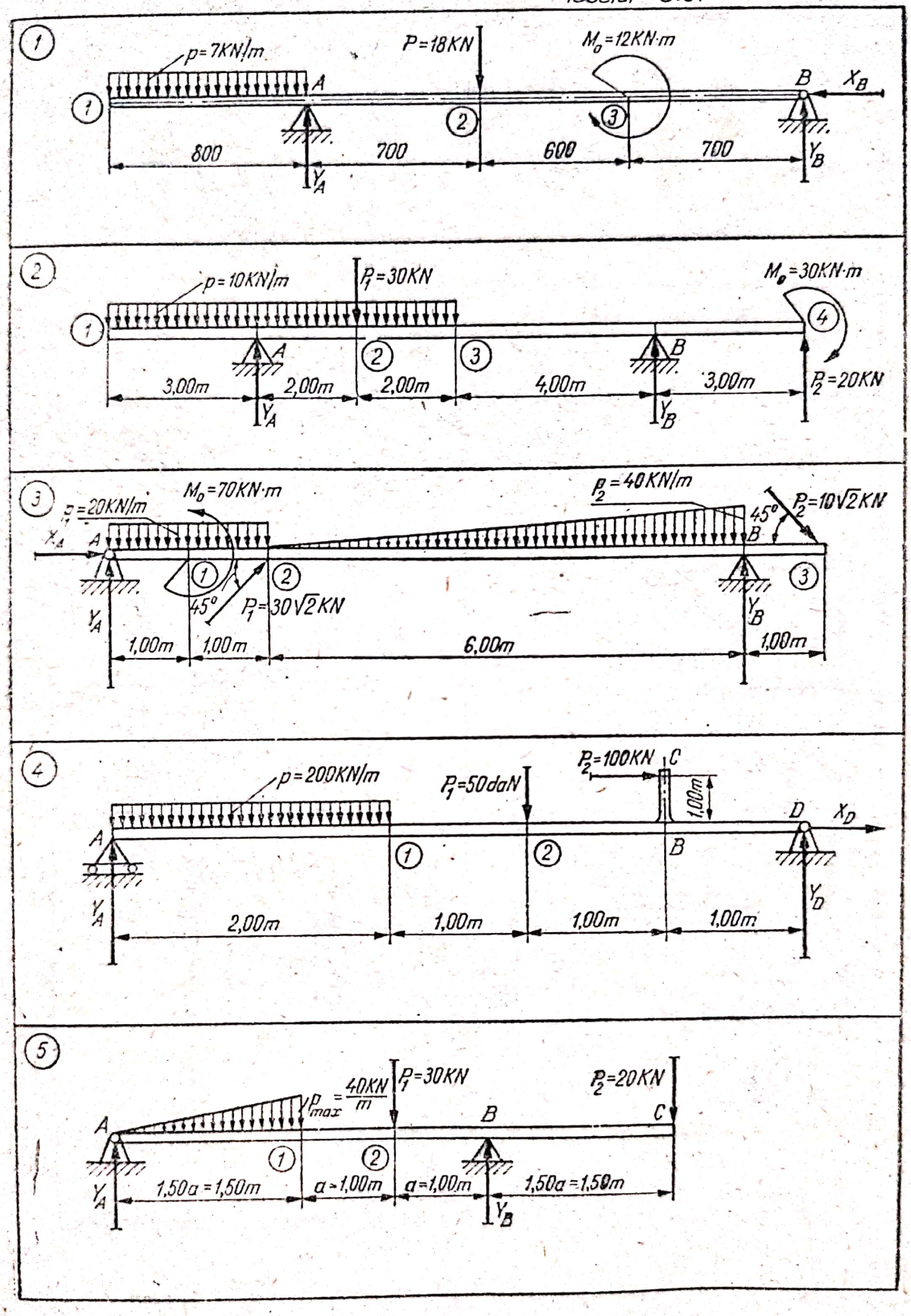
R. $N_E = N_F = 120$ daN; $P = 40$ daN.

3.51. Să se rezolve problemele din tabelul 3.51. Enunţurile şi răspunsurile sînt date în tabelul 3.51, a.

3.52. Să se rezolve problemele din tabelul 3.52.

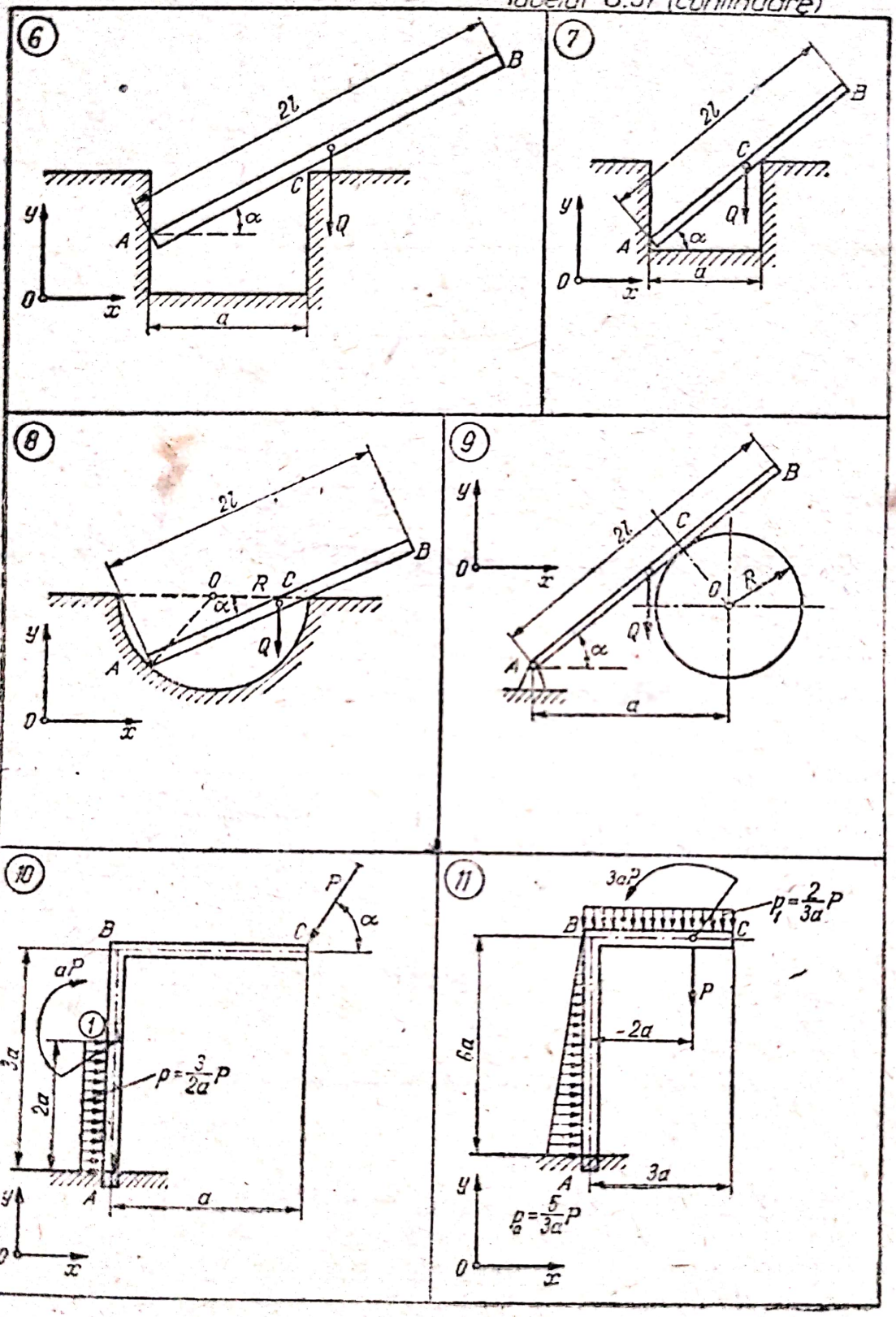
Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 3.51

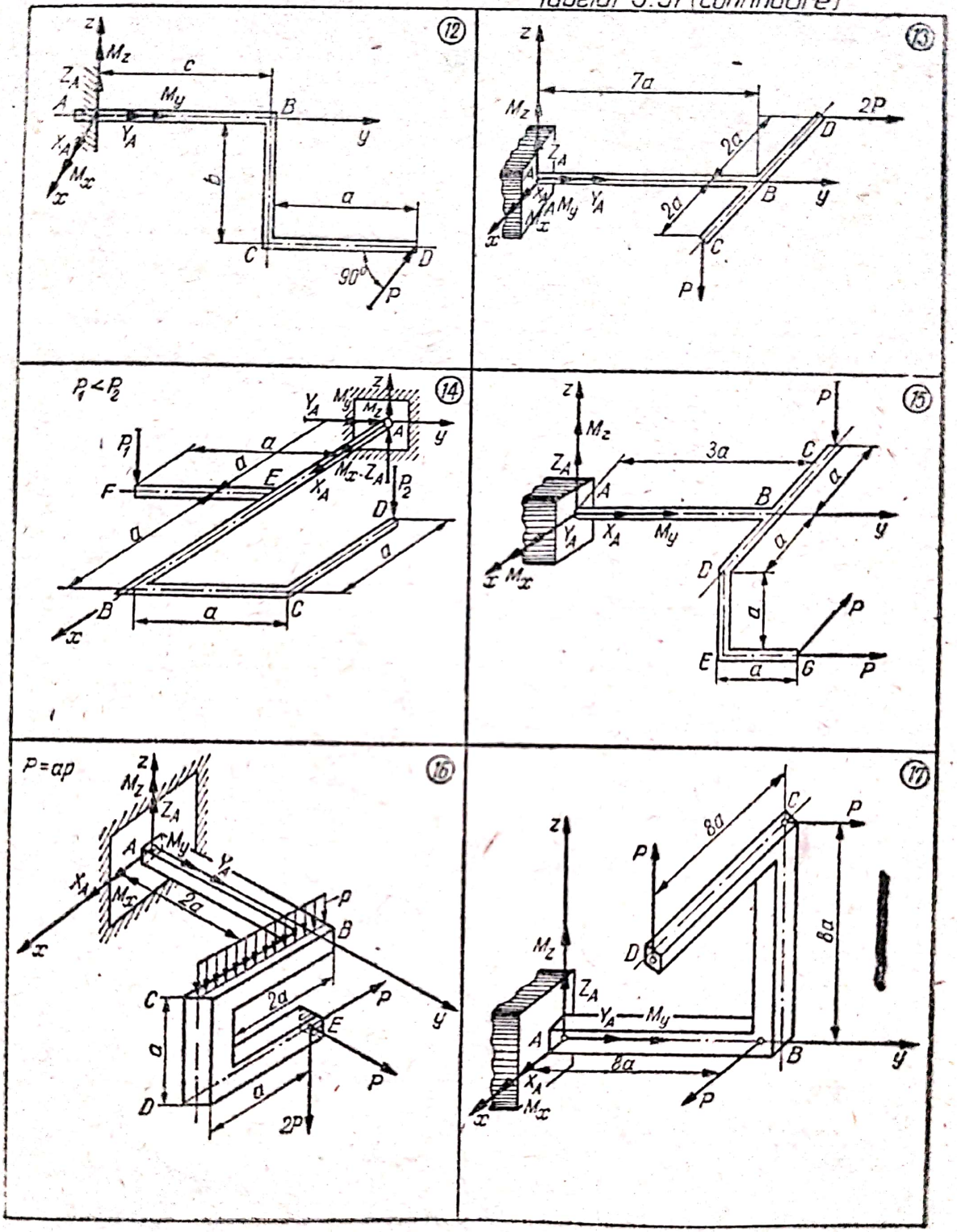


Scanned with OKEN Scanner

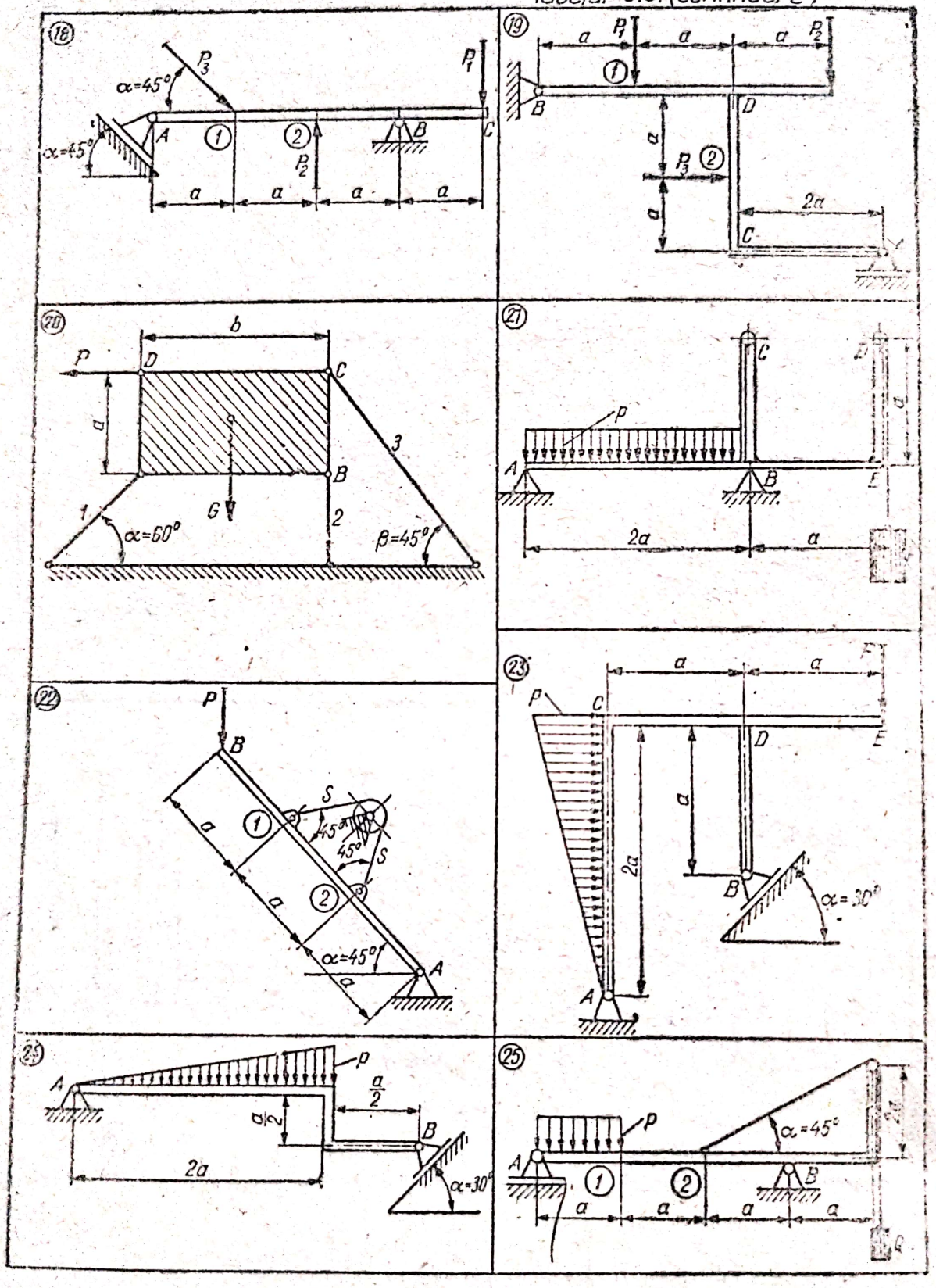
Tabelul 3.51 (continuare)



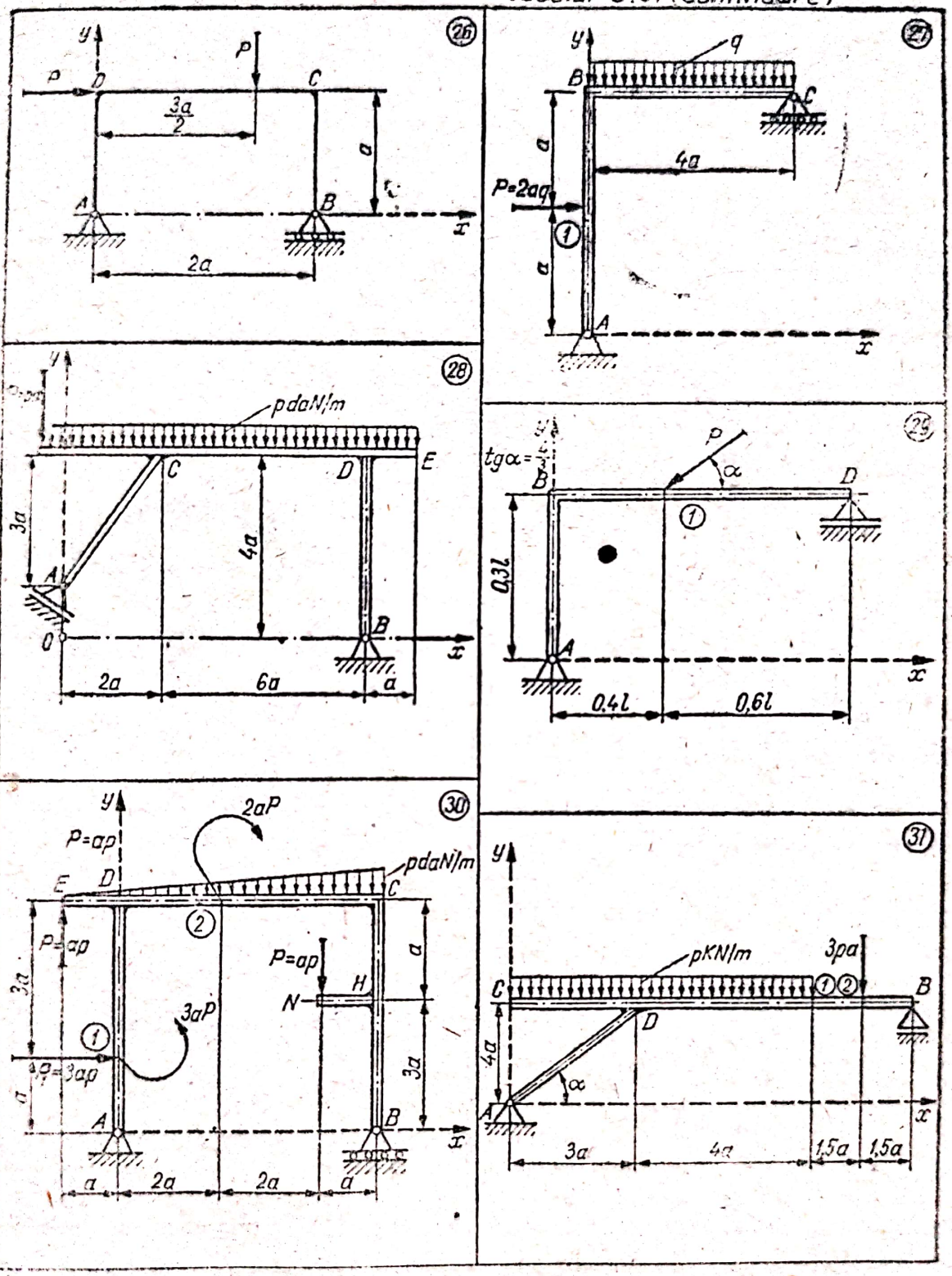
Tabelul 3.51 (continuare)



Tabelul 3.51 (continuare)



Tabelul 3.51 (continuare)



Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 3.51 (continuare).

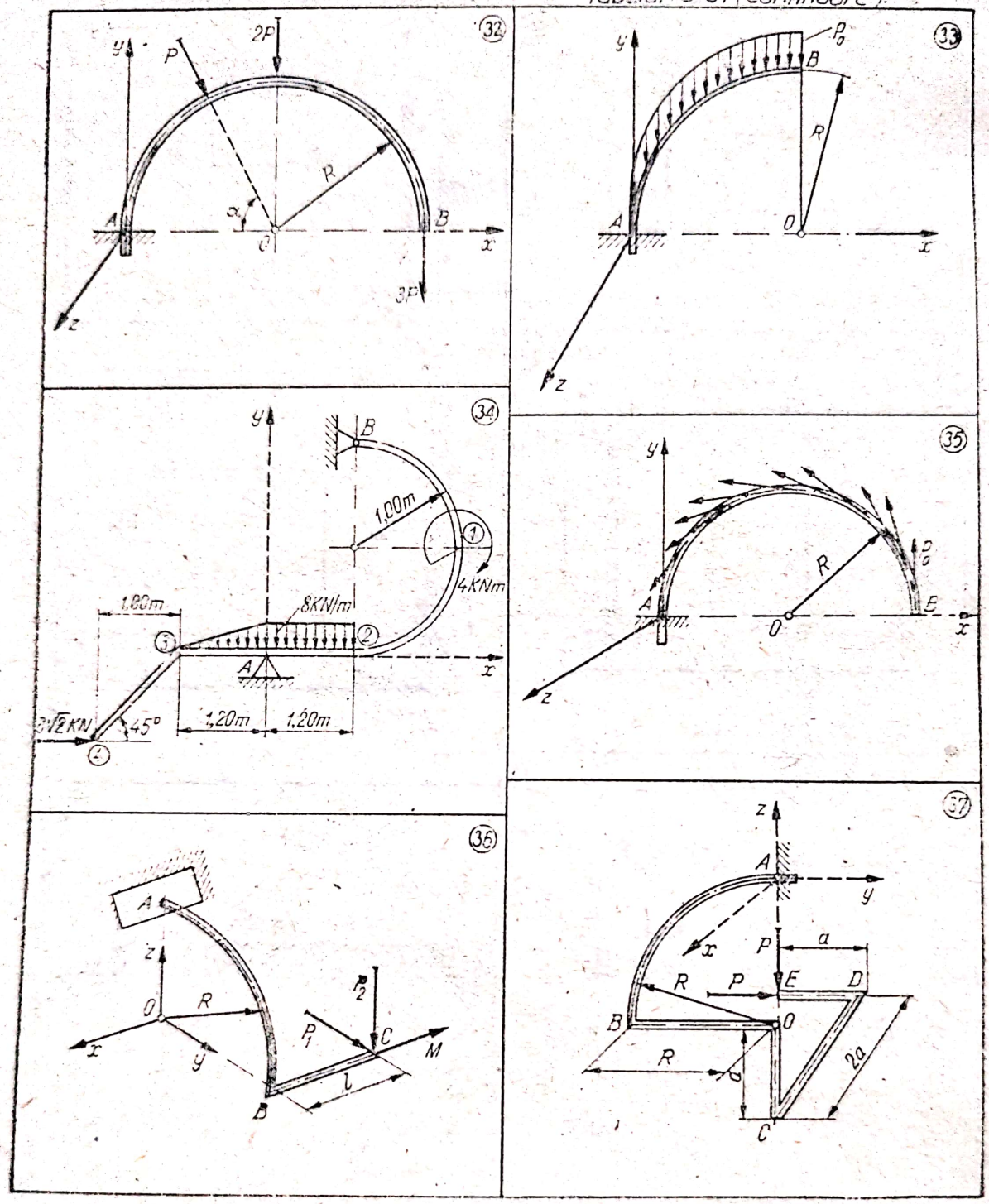


Fig.	Răspuns
1.	$Y_A = 12{,}4$ kN; $Y_B = 11{,}2$ kN; $X_B = 0$
2.	$Y_A = 92{,}00$ kN; $Y_B = -12$ kN;
3.	$X_A = 40$ kN; $Y_A = 50$ kN; $Y_B = 90$ kN;
4.	$Y_A = 320$ kN; $X_D = -100$ kN; $Y_D = -130$ kN;
5.	$Y_A = 21{,}4$ kN; $Y_B = 58{,}6$ kN.
6.	$\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$; $X_A = \left(\frac{l}{a}\right)^{1/3}\left[1-\left(\frac{a}{l}\right)^{2/3}\right]^{1/2}\cdot Q$; $N_C = \sqrt[3]{\frac{l}{a}}Q$; $a \leqslant l$.
7.	$X_A = \frac{l}{a}Q\sin\alpha\cos^2\alpha$; $Y_A = \left(1-\frac{l}{a}\cos^3\alpha\right)Q$; $R_A = Q\sqrt{1+\frac{l}{a}\cos^2\alpha\left(\frac{l}{a}\cos\alpha-2\right)}$; $N_C = \frac{l}{a}Q\cos^2\alpha$.
8.	$N_A = Q\,\mathrm{tg}\,\alpha$; $N_C = \frac{l}{2R}Q$; $\cos\alpha = \frac{l+\sqrt{l^2+32R^2}}{8R}$
9.	$X_A = \frac{Ql\sin\alpha\cos^2\alpha}{a-R\sin\alpha}$; $Y_A = \left(1-\frac{l\cos^2\alpha}{a-R\sin\alpha}\right)Q$; $N_C = \frac{Ql\cos^2\alpha}{a-R\sin\alpha}$
10.	$X_A = P(\cos\alpha - 3)$; $Y_A = P\sin\alpha$; $M_A = aP(4+\sin\alpha-3\cos\alpha)$.
11.	$X_A = -5P$; $Y_A = 3P$; $M_A = 12\,aP$.
12.	$X_A = P$; $Y_A = Z_A = 0$; $M_x = 0$; $M_y = -bP$; $M_z = -(a+c)P$
13.	$X_A = 0$; $Y_A = -2P$; $Z_A = P$; $M_x = 7aP$; $M_y = -2aP$; $M_z = 4aP$
14.	$X_A = 0$; $Y_A = 0$; $Z_A = P_1 + P_2$; $M_x = a(P_2 - P_1)$; $M_y = -a(P_1 + P_2)$; $M_z = 0$
15.	$X_A = P$; $Y_A = -P$; $Z_A = P$. $M_x = 2aP$; $M_y = 0$; $M_z = -5aP$;
16.	$X_A = P$; $Y_A = -P$; $Z_A = 4P$; $M_x = 7aP$; $M_y = -5aP$; $M_z = -3aP$;
17.	$X_A = -P$; $Y_A = -P$; $Z_A = -P$; $M_x = 0$; $M_y = 8aP$; $M_z = 8aP$

Scanned with OKEN Scanner

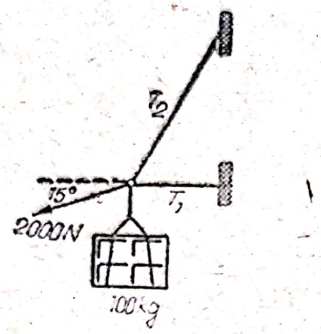
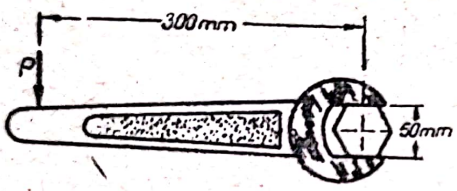
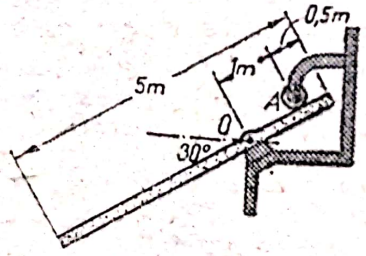
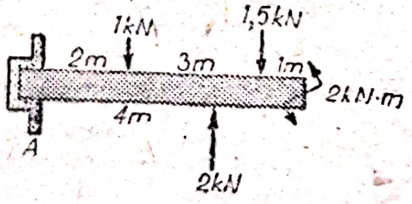
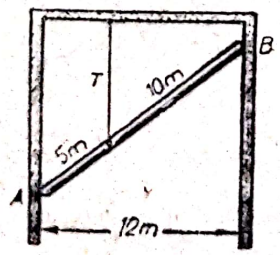
Tabelul 3.51,a (continuare)

Fig.	Enunț	Răspuns
18.	$P_1 = 500$ daN; $P_2 = 200$ daN; $P_3 = 5\sqrt{2} \cdot 10^2$ daN;	$R_A = 141$ daN; $V_A = 100$ daN $H_B = 700$ daN
19.	$P_1 = P_2 = 200$ daN; $P_3 = 400$ daN; $a = 1$ m.	$V_A = 100$ daN; $V_B = 300$ daN $H_B = -400$ daN.
20.	$G = 100$ daN; $a = 20$ cm; $b = 40$ cm; $P = 100$ daN;	$S_1 = -81{,}2$ daN; $S_2 = -89$ daN; $S_3 = 84$ daN.
21.	$a = 1$ m; $P = 500$ daN; $p = 200$ daN/m	$V_A = -500$ daN; $V_B = 950$ daN
22.	—	$H_A = P$; $V_A = 0$; $S = P$.
23.	$P = 500$ daN; $p = 600$ daN/m; $a = 1$ m.	$H_B = 660$ daN; $Y_B = 1140$ daN; $R_B = 1320$ daN; $H_A = 60$ daN; $V_A = 640$ daN
24.	—	$V_A = 0{,}397pa$; $V = 0{,}603pa$; $H_B = 0{,}347pa$; $R_B = 0{,}695\,pa$
25.	$Q = 1000$ daN; $p = 2000$ daN/m; a = 2m	$V_A = 3000$ daN; $V_B = 2000$ daN.
26.		$X_A = -P$; $Y_A = -\frac{P}{4}$; $Y_B = \frac{5P}{4}$
27.		$X_A = -2aq$; $Y_A = \frac{3}{2}aq$; $Y_C = \frac{5}{2}aq$.
28.		$N_A = 5{,}47pa$; $X_B = 3{,}04pa$; $Y_B = 5{,}45pa$
29.		$X_A = 0{,}60P$; $Y_A = 0{,}66P$; $Y_D = 0{,}14P$.
30.		$X_A = -3ap$; $Y_A = -\frac{ap}{5}$; $Y_B = \frac{16ap}{5}$

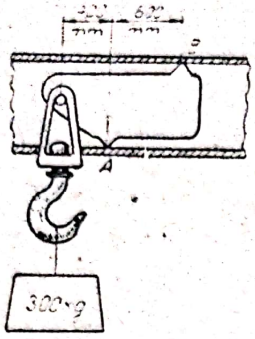
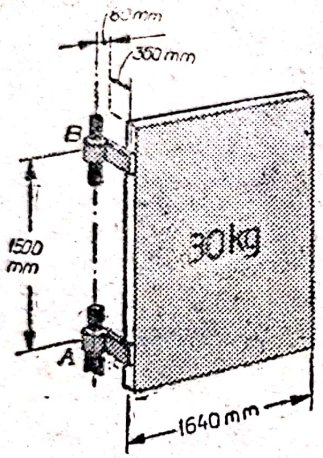
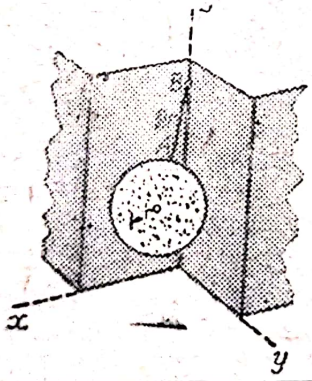
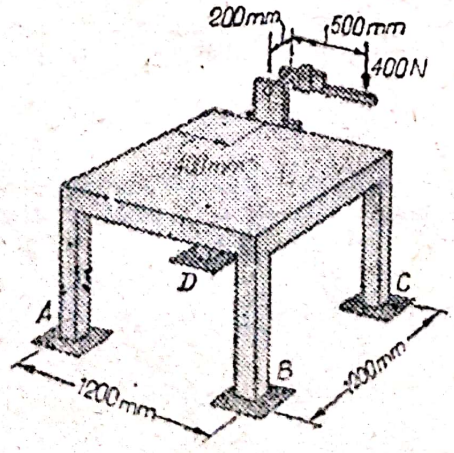
Fig.	Răspuns
31.	$X_A = 0$; $Y_A = 4{,}05ap$; $Y_B = 4{,}95ap$.
32.	$X_A = -P\cos\alpha$; $Y_A = (5 + \sin\alpha)P$; $M_x = 0$; $M_y = 0$; $M_z = -RP(8 + \sin\alpha)$.
33.	$X_A = 0$; $Y_A = 1{,}571p_0R$; $M_x = 0$; $M_y = 0$; $M_z = 0{,}571p_0R^2$
34.	$Y_A = 36{,}15$ kN; $X_B = -11{,}28$ kN; $Y_B = -21{,}75$ kN.
35.	$X_A = 2p_0R$; $Y_A = 0$; $Z_A = 0$; $M_x = 0$; $M_y = 0$; $M_z = -3{,}142p_0R^2$
36.	$X_A = 0$; $Y_A = -P_1$; $Z_A = P_2$; $M_x = M + R(P_1 - P_2)$; $M_y = lP_2$; $M_z = -lP_1$
37.	$X_A = 0$; $Y_A = -P$; $Z_A = P$; $M_x = (R + 2a)P$; $M_y = -2aP$; $M_z = -2aP$.

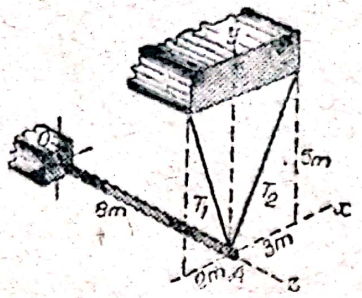
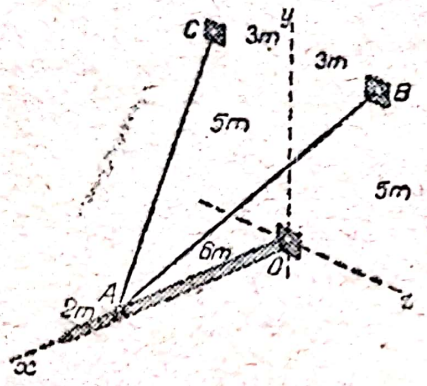
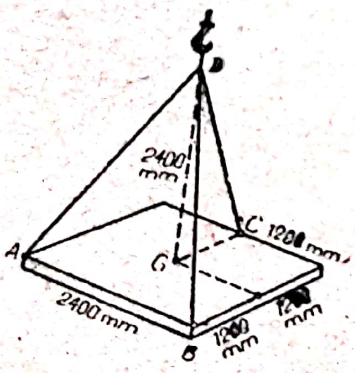
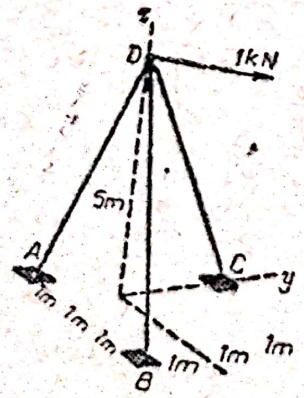
Scanned with OKEN Scanner

Probleme recapitulative [26]

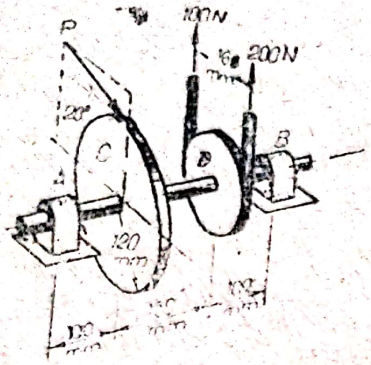
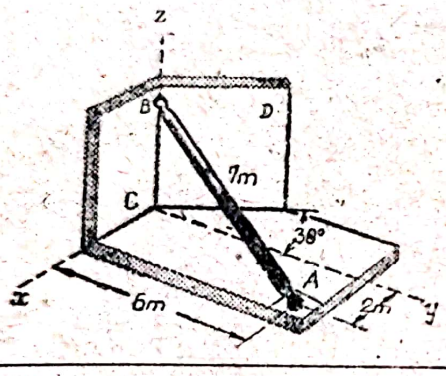
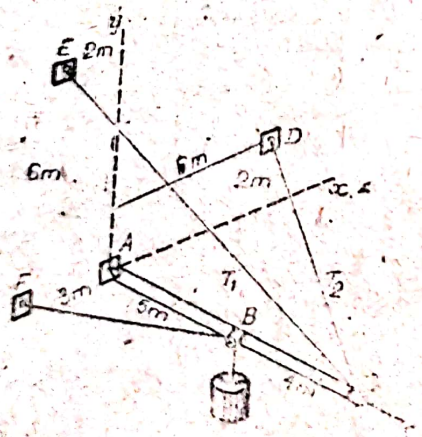
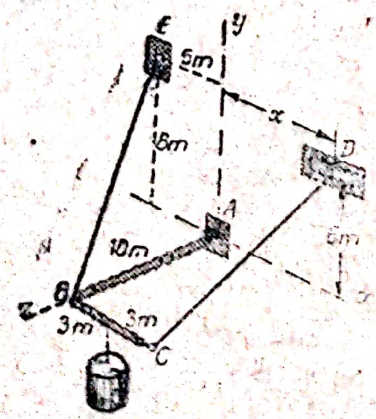
Nr. crt.	Figura	Se cunoaşte	Să se determine
0	1	2	3
1		Forţa de 2 000 N acţionînd sub unghiul de 15° şi sarcina de 100 kg atîrnată de cele două cabluri din figură.	Eforturile T_1 şi T_2 care se dezvoltă în cabluri. R. $T_1 = 1067$ N $T_2 = 1730$ N.
2		Forţa concentrată maximă suportată de fălcile cheii fixe din figură este de 7,5 kN.	Forţa maximă P care poate fi aplicată, la un braţ de 300 mm, cînd există un mic joc între deschiderea cheii şi capul şurubului. R. $P = 0{,}689$ kN.
3		Bara omogenă, de secţiune constantă, avînd lungimea de 5 m şi masa de 100 kg este articulată în O şi rezemată în A.	Reacţiunea din articulaţia O. R. $R_0 = 1769$ N.
4		Grinda uniformă avînd masa specifică 50 kg/m este solicitată de către un cuplu şi de trei forţe.	Reacţiunea verticală şi momentul din încastrarea A. R. $V = 3{,}44$ kN $MA = 8{,}33$ kN·m.
5		Bara uniformă are lungimea 15 m şi masa 150 kg. Ea este rezemată pe pereţii verticali şi suspendată de un cablu vertical.	Reacţiunile din reazemele A, B şi efortul T din cablul vertical. R. $N_A = N_B = 333$ N $T = 1500$ N.

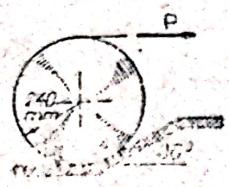
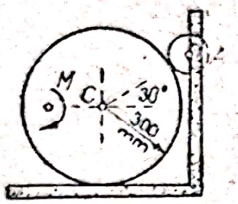
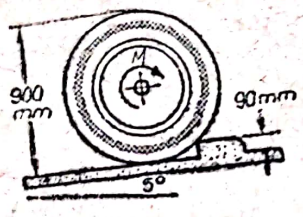
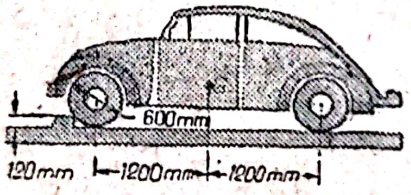
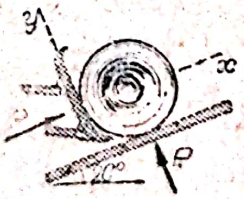
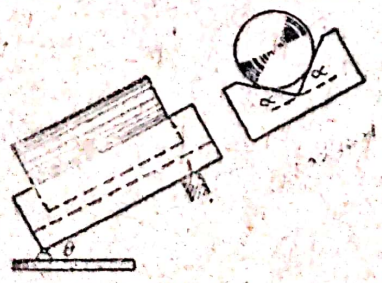
Tabelul 3.52 (continuare)

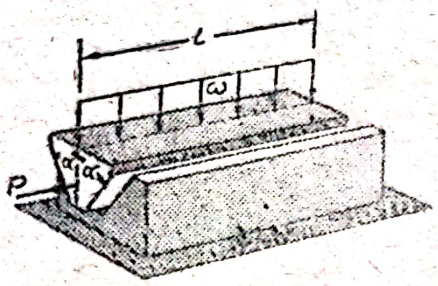
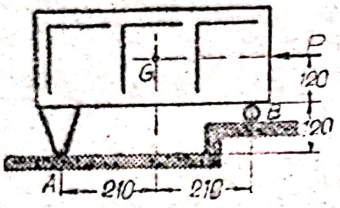
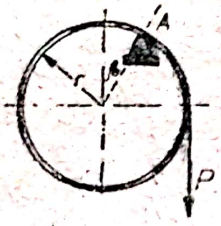
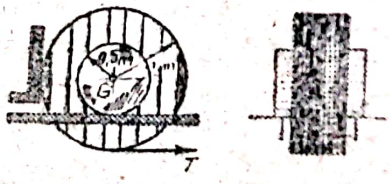
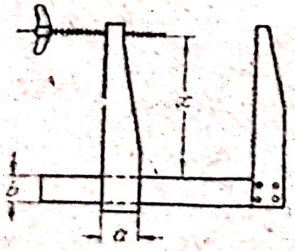
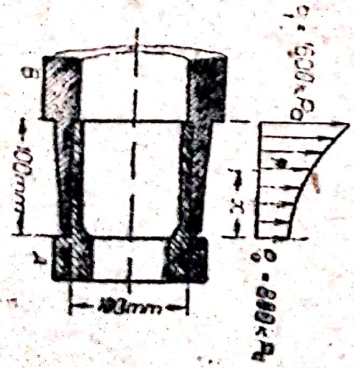
0	1	2	3
6		Sarcina de 300 kg care atîrnă de cîrligul macaralei.	Reacţiunile din reazemele A şi B ale dispozitivului de prindere. R. $N_A = 4{,}91$ kN $N_B = 1{,}96$ kN.
7		Centrul de masă al uşii se află în centrul panoului. Masa panoului este de 30 kg.	Reacţiunea din balamaua B (lagăr radial) dacă greutatea uşii este suportată numai de balamaua A (lagăr radial axial). R. $N_B = 190{,}2$ N.
8		O sferă netedă omogenă, de masă m şi rază r, este suspendată de un fir AB de lungimea $2r$ de punctul B, pe linia de intersecţie a doi pereţi netezi verticali perpendiculari unul pe altul.	Reacţiunea R a fiecărui perete asupra sferei. R. $R = mg/\sqrt{7}$.
9		Bancul de lucru are centrul de masă pe verticala trecînd prin centrul pătratului $ABCD$ şi masa 120 kg. O forţă de 400 N se aplică pe cheia pentru ţevi.	Forţele pe care le suportă trei picioare ale bancului, dacă picioarele A şi C sînt puţin mai scurte decît picioarele B şi D. R. $N_B = 522$ N; $N_C = 367$ N; $N_D = 689$ N.

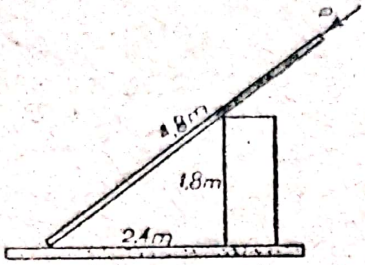
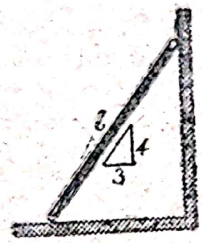
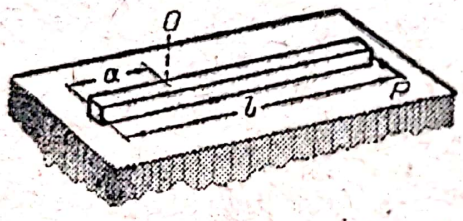
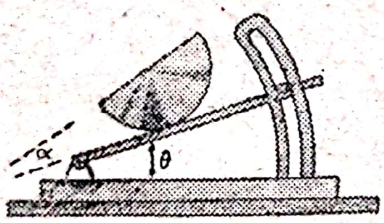
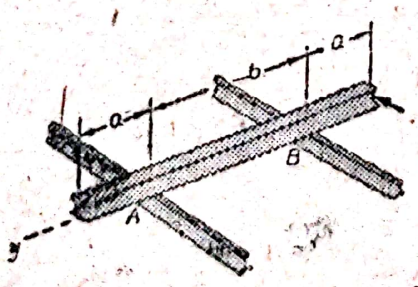
0	1	2	3
10		Bara uniformă orizontală de masă 160 kg este suspendată prin două cabluri în planul vertical $x-y$ și articulată în O.	Eforturile T_1 și T_2 din cabluri. R. $T_1 = 507$ N $T_2 = 366$ N.
11		Bara uniformă orizontală are masa 240 kg și este suspendată prin două cabluri ancorate în B și C și printr-o articulație în O.	Efortul T în cablul AC. R. $T = 1310$ N.
12		Placa pătrată omogenă din oțel are masa 1800 kg și centrul de masă în G.	Eforturile în cele trei cabluri prin care este atîrnată placa, astfel ca să rămînă în poziție orizontală. R. $T_A = T_B = 5{,}41$ kN $T_C = 9{,}87$ kN.
13		Trepiedul executat din bare rigide, de greutate neglijabilă, este articulat în A, B, C, D și încărcat în D cu forța orizontală de 1 kN, conținută în planul definit de axa z și bara AD.	Eforturile din bare. R. $R_A = +2{,}041$ kN $R_B = -0{,}861$ kN $R_C = -1{,}269$ kN.

Tabelul 3.52 (continuare)

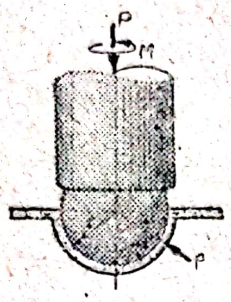
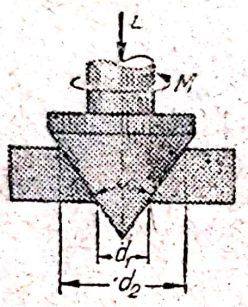
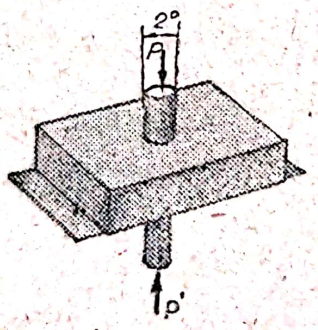
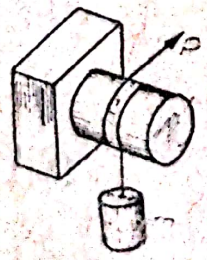
0	1	2	3
14		Arborele AB se rotește uniform (forțele sînt în echilibru). Greutățile arborelui AB și ale roților C, D se neglijează.	Forța P aplicată roții dințate C și mărimea reacțiunilor din lagărele A și B, dacă în cureaua trapezoidală se dezvoltă eforturile de 100 N și 200 N. R. $P = 70{,}9$ N; $R_A = 83{,}3$ N; $R_B = 208$ N.
15		Arborele uniform AB, avînd masa 200 kg, este articulat sferic în A și rezemat cu extremitatea sferică din B pe doi pereți verticali care fac un unghi de 120°, ca în figură.	Mărimile forțelor P și R exercitate de extremitatea sferică B a arborelui asupra pereților C respectiv D. R. $P = 1584$ N $R = 755$ N.
16		Bara omogenă AB, din oțel, de lungime 9 m și masă 600 kg, este articulată sferic în A și suspendată în C prin două cabluri CE, CD. Sarcina de 2 000 kg este atîrnată de un alt cablu, ce trece prin inelul B și este fixat în F.	Mărimea efortului T_1 din cablul CE. R. $T_1 = 19{,}76$ kN.
17		Grinda cotită ABC este articulată sferic în A și suspendată de cablurile BE și CD. Masele grinzii și cablurilor sînt neglijabile în comparație cu masa sarcinii de $5 \cdot 10^3$ kg, pe care o susțin.	Distanța x pînă la punctul de fixare al cablului CD, astfel ca grinda cotită să se mențină în poziția din figură. R. $x = 3{,}75$ m.

0	1	2	3
18		Forța orizontală P acționează asupra cilindrului de masă 40 kg. aflat pe un plan înclinat suficient de aspru pentru a evita alunecarea.	Reacțiunea totală din punctul de reazem A. R. $R = 406$ N.
19		Roata cu masa $m = 100$ kg este în repaus pe o suprafață aspră și se reazemă pe rola din A cînd asupra ei se aplică un cuplu de moment M.	Mărimea reacțiunii rolei A, dacă pentru $M = 60$ N m roata nu alunecă. R. $F_A = 231$ N.
20		Roata cu diametrul 900 mm are masa de 30 kg.	Momentul M al cuplului astfel ca roata să treacă peste un obstacol de 90 mm și coeficientul de frecare minim, astfel ca roata să nu alunece. R. $M = 79{,}5$ N·m $\mu_{min} = 0{,}75$.
21		Mașina are masa de 1200 kg. La roțile din față există o denivelare de 120 mm.	Momentul M și coeficientului de frecare minim la roțile din spate, astfel ca mașina să treacă peste denivelare, din poziția de repaus și roțile din spate să nu alunece R. $M = 2{,}02$ kN·m; $\mu_{min} = 1$.
22		Un buștean cu masa de 750 kg este deplasat cu un buldozer pe un drum înclinat cu 20° față de orizontală. Coeficientul de frecare dintre lama buldozărului și buștean este 0,50 și dintre buștean și drum 0,80.	Forța P normală pe lama buldozărului (orientată perpendicular pe drum) exercitată asupra bușteanului care începe să se rostogolească fără să alunece pe sol. R. $P = 5{,}5$ kN.
23		Coeficientul de frecare dintre buștean și jgheab.	Unghiul θ pe care-l face jgheabul în V cu orizontala cînd bușteanul începe să alunece. R. $\theta = \text{arctg}(\mu/\cos\alpha)$.

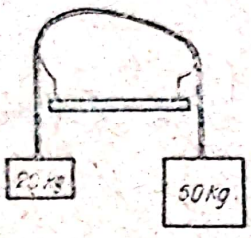
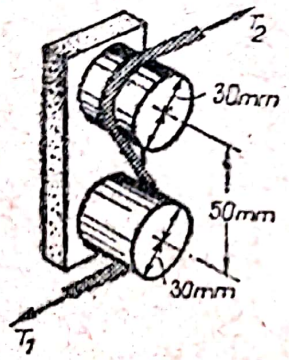
0	1	2	3
24		Ghidajul unei mașini unelte constă dintr-o bară cu secțiune V care alunecă în batiu. Bara suportă o sarcină verticală ω pe unitatea de lungime.	Forța orizontală P necesară deplasării barei, dacă coeficientul de frecare dintre bară și batiu este μ. R. $P = \mu(\omega L)/\sin\alpha$.
25		O ladă cu greutatea de 300 N este rezemată pe rola B și pe piciorul A.	Coeficientul de frecare din A, dacă este necesară o forță P de 60 N pentru a deplasa lada. R. $\mu = 0{,}33$.
26		Un cerc de metal de grosime neglijabilă, având masa m și raza r, se reazemă cu frecare pe suportul A.	Forța verticală P care produce alunecarea cercului pe suport și unghiul β sub care începe alunecarea. R. $P = mg\mu/(\sqrt{1-\mu^2}-\mu)$ $\beta = \operatorname{arctg}\mu$.
27		O rolă cu cablu telefonic are masa de 200 kg; Coeficientul de frecare atît pe reazemul orizontal cît și pe cel vertical este 0,6.	Forța T aplicată cablului pentru rotirea rolei. R. $T = 727$ N.
28		Între falca mobilă din stînga și cadrul dispozitivului de strîngere există un mic joc, iar coeficientul de frecare este μ.	Distanța minimă x pentru blocarea fălcii mobile pe cadru, cînd dispozitivul este sub sarcină. R. $x = \dfrac{a-b\mu}{2\mu}$.
29		Mufa circulară A este presată în capul de strîngere B. Presiunea dintre cele două părți asamblate variază aproximativ după legea $p = p_0 + kx^2$.	Coeficientul de frecare dintre cele două părți, astfel ca să se poată transmite, de la A la B, un cuplu de răsucire de 1,3 kN·m. R. $\mu = 0{,}776$.

0	1	2	3
30		Grinda uniformă, din figură, are masa de 50 kg. Coeficientul de frecare în ambele reazeme este 0,5.	Forța P necesară pentru a pune în mișcare grinda. R. $P = 19{,}62$ kN
31		Bara uniformă, de lungime l și masa m este rezemată ca în figură. Coeficientul de frecare în ambele reazeme este μ.	Valoarea minimă pe care trebuie să o aibă μ astfel ca bara să nu alunece. R. $\mu_{min} = 1/3$.
32		Bara uniformă de lungime l și masa m se reazemă pe o suprafață orizontală aspră având coeficientul de frecare μ. Reacțiunea normală și forța de frecare sînt uniform distribuite de-a lungul barei.	Forța orizontală (P) aplicată la capătul barei, necesară pentru a deplasa bara și distanța (a) pînă la axa O în jurul căreia va avea loc rotația. R. $P = 0{,}414\ \mu mg$ $a = 0{,}293\ l$.
33		Coeficientul de frecare între solidul omogen semicilindric și planul înclinat este 0,3.	Unghiul maxim θ la care începe alunecarea corpului și unghiul corespunzător α cu care s-a rotit pînă începe alunecarea. R. $\theta = 16°42'$ $\alpha = 25°54'$
34		Un profil I de masă m se reazemă pe două șine orizontale fixe. Coeficientul de frecare dintre profilul I și șine este μ.	Forța orizontală P, aplicată la extremitatea profilului, necesară pentru a produce alunecarea acestuia și forța corespunzătoare de frecare în reazemul A la începutul alunecării. R. $P = \dfrac{\mu mgb}{2(a+b)}$; $F_A = \dfrac{\mu mga}{2(a+b)}$

Tabelul 3.52 (continuare)

0	1	2	3
35		Pivotul sferic din figură suportă o sarcină axială P. Se admite că presiunea p este direct proporțională cu $\sin \alpha$, iar coeficientul de frecare μ este același în toate punctele emisferei de contact.	Expresia momentului M necesar învingerii frecării în lagăr. R. $M = \mu r P$.
36		Pivotul conic din figură suportă o sarcină axială P. Coeficientul de frecare este μ și presiunea de pivot este constantă.	Expresia momentului M necesar rotației uniforme a arborelui. R. $M = \dfrac{\mu P}{3 \sin \dfrac{\alpha}{2}} \dfrac{d_2^3 - d_1^3}{d_2^2 - d_1^2}$
37		Bolțul conic, cu unghiul conului de 2°, este presat, într-o degajare cu pereții înclinați sub același unghi, executată într-un bloc fix, cu o forță $P = 400$ N.	Coeficientul de frecare dintre bolț și blocul fix, dacă pentru a scoate bolțul este necesară forța $P' = 300$ N. R. $\mu = 0{,}122$.
38		Pentru ridicarea sarcinii de masă m este necesară o forță P de 5 ori mai mare decît greutatea sarcinii, cînd cablul înfășoară $1\frac{1}{4}$ din circumferința cilindrului.	Coeficientul de frecare μ dintre cablu și cilindru. R. $\mu = 0{,}205$.

Tabelul 3.52 (continuare

0	1	2	3
39		Două corpuri avînd masele 20 kg și respectiv 50 kg sînt suspendate de un cablu înfășurat pe o suprafață curbă și fixă, ca în figură.	Coeficientul de frecare μ dintre cablu și suprafața fixă, dacă sistemul se află la limita de alunecare. R. $\mu = 0{,}292$.
40		O curea plată înfășurată pe două bolțuri fixe, ca în figură, este solicitată de forțele orizontale $T_1 = 40$ N și $T_2 = 160$ N.	Coeficientul de frecare μ dintre curea și bolțuri, la limita echilibrului. R. $\mu = 0{,}313$.

Scanned with OKEN Scanner

4

Echilibrul sistemelor de puncte materiale și solide rigide

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

4.1. Condiții de echilibru

Vom numi condiții de echilibru ale unui sistem de puncte materiale, respectiv ale unui sistem de rigide, condițiile de echilibru ale solicitărilor și reacțiunilor aplicate acestor sisteme. Se consideră un sistem de puncte materiale $\{A_i\}$, $i = \overline{1, n}$ (fig. 4.a) sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare $\{\mathbf{F}_i\}$, precum și a unui sistem de forțe interioare $\{\mathbf{F}_{ij}\}$ $(i, j \in N, i \neq j)$, N fiind mulțimea întregilor aritmetici.

Condițiile de echilibru ale sistemului de forțe $\{\mathbf{F}_i\} \cup \{\mathbf{F}_{ij}\}$, exprimate prin relația

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ij} = 0 \qquad (4.1)$$

se numesc condiții de echilibru ale sistemului de puncte materiale.

În cazul unui sistem $\{S\}$ de rigide (fig. 4.b), sub acțiunea solicitărilor și reacțiunilor exterioare $\{\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i\}$, $i = \overline{1, n}$ și a reacțiunilor interioare

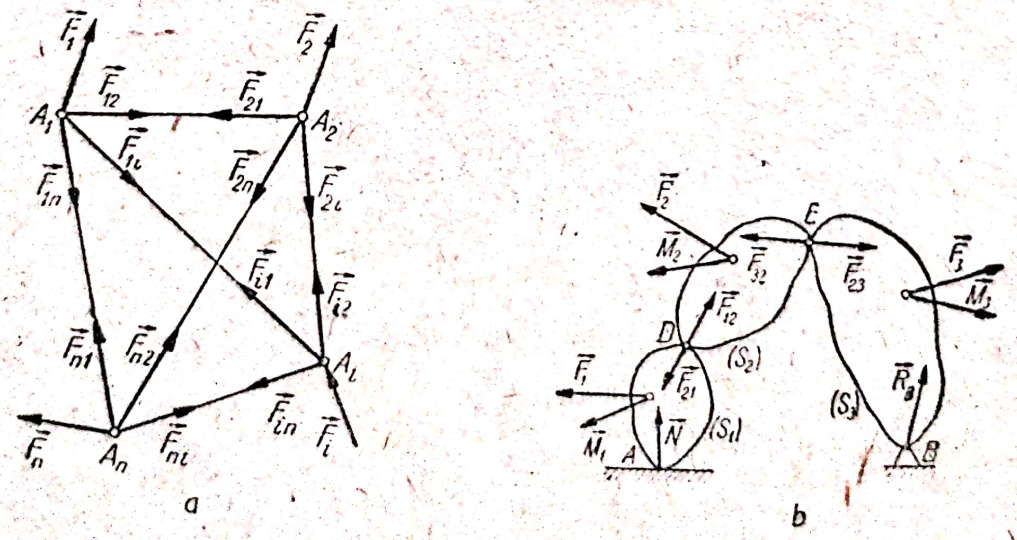


Fig. 4.1 a, b

$\{\mathbf{F}_{ij}, \mathbf{M}_{ij}\}$, $(i, j \in N, i \neq j)$ condiţiile de echilibru ale sistemului rezultant, format din solicitările exterioare, reacţiunile exterioare şi interioare sînt

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}\,;\ \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_{ij}) +$$

$$+ \sum_{i=}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{M}_{ij} = 0\,; \qquad (4.2)$$

unde $\mathbf{r}_i$ şi $\mathbf{r}'_i$ sînt vectorii de poziţie ai forţelor $\mathbf{F}_i$, respectiv $\mathbf{F}_{ij}$. Relaţiile (4.2) se numesc condiţii de echilibru ale sistemului de rigide.

4.2. Teorema solidificării

Fie $\{A\}$ mulţimea punctelor materiale care formează un sistem şi $A_i \in \{A\}$, $A_j \in \{A\}$, două puncte materiale ale sistemului $(i, j \in N, i \neq j)$, N reprezentînd mulţimea întregilor aritmetici.

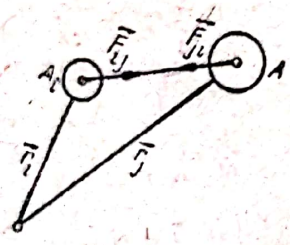


Fig. 4c

Se notează prin $\mathbf{F}_{ij}$ forţa interioară sistemului aplicată în A_i, care măsoară acţiunea mecanică a punctului material A_j asupra punctului material A_i şi cu $\mathbf{F}_{ji}$ forţa interioară sistemului aplicată în A_j, care măsoară reacţiunea punctului material A_i asupra punctului material A_j (fig. 4.c). Conform principiului acţiunii şi reacţiunii, se poate scrie

$$\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0 \qquad (4.3)$$

cu consecinţa

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = 0 \qquad (4.4)$$

unde $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$, sînt vectorii de poziţie ai punctelor A_i, A_j în raport cu punctul o.

Dacă orice pereche $\{A_i, A_j\}$ din $\{A\}$ satisface relaţiile (4.3) şi (4.4) pot fi scrise condiţiile

$$\sum_i\sum_j \mathbf{F}_{ij} = 0,\ \sum_i\sum_j (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) = 0 \qquad (4.5)$$

pe baza cărora se enunţă teorema solidificării: „sistemul de puncte materiale pentru care torsorul forţelor interioare este nul, poate fi considerat ca un singur corp asupra căruia acţionează numai forţele exterioare active şi forţele din legăturile interioare".

În virtutea teoremei solidificării condiţiile de echilibru ale unui sistem de puncte materiale vor fi aceleaşi ca la solidul rigid

$$\Sigma\mathbf{F}_i = \mathbf{0},\ \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = 0. \qquad (4.6)$$

Dacă $\{\mathbf{R}\}$ este mulţimea reacţiunilor exterioare, atunci $\{\mathbf{R}\} \subset \{\mathbf{F}\}$.

În cazul unui sistem de solide rigide, dacă torsorul forţelor interioare este nul, condiţiile de echilibru (4.2) devin

$$\Sigma\mathbf{F}_i = 0,\ \Sigma\mathbf{M}_i = 0. \qquad (4.7)$$

Pe baza acestor condiţii se formulează teorema solidificării: „sistemul de solide rigide, pentru care torsorul forţelor interioare este nul, poate fi

considerat ca un singur rigid, asupra căruia acționează forțele exterioare active și forțele din legăturile exterioare".

Observații. 1) În cazul solidului rigid condițiile de echilibru (4.6) sînt necesare și suficiente, pe cînd în cazul sistemelor de puncte ele sînt necesare, dar, în general, nu sînt și suficiente.

2) Condițiile de echilibru (4.7) sînt necesare și suficiente în general, pentru sistemele nedeformabile (fixe) de solide. Pentru sistemele deformabile (mobile) de solide rigide condițiile 4.7) sînt necesare, dar, în general nu sînt suficiente.

3.3. Teorema echilbrului părților

Pentru un sistem de puncte materiale, teorema echilibrului părților se enunță astfel: „dacă într-un sistem $\{A_i\}$, $i = \overline{1, n}$, de puncte materiale aflat sub acțiunea unui sistem de forțe în echilibru, se izolează un subsistem (o parte) acest subsistem este în echilibru sub acțiunea forțelor aplicate punctelor materiale care îl alătuiesc".

Pentru un sistem $\{S\}$ de solide rigide, care se află sub acțiunea unui sistem de solicitări (forțe și momente) în echilibru, se izolează un subsistem, acesta este în echilibru sub acțiunea solicitărilor aplicate rigidelor care-l alcătuiesc".

Observații. 1) În Învirtutea teoremei echilibrului părților se pot scrie condiții de echilibru pentru fiecare corp rigid (punct material sau solid rigid) în parte, considerat ca un subsistem. Astfel se pot scrie toate condițiile (4.1) dacă izolăm pe rînd cîte un punct material din sistemul $\{A_i\}$, respectiv condițiile (4.2), dacă izolăm pe rînd cîte un rigid al sistemului $\{S\}$.

2) Teorema echilibrului părților poate fi utilizată concomitent cu teorema solidificării. În acest caz se va avea grijă ca numărul total al ecuațiilor de echilibru utilizate să nu depășească pe cele date de ecuațiile de echilibru (4.1), respectiv (4.2).

B. PROBLEME REZOLVATE

4.1. Raza tamburului unui troliu, utilizat la ridicarea sarcinilor este $r = 5$ cm. Razele roților dințate sînt $r_1 = 20$ cm și $r_2 = 10$ cm. Lungimea manivelei $OA = 40$ cm. Neglijînd frecarea, să se determine prin ce forță P, perpendiculară pe manivelă, se poate realiza ridicarea uniformă a sarcinii $Q = 200$ daN (fig. 4.1, a).

Rezolvare. Fie T forța tangențială care apare în angrenajul celor două roți dințate. Descompunînd sistemul, ca în figura 4.1, b și scriind ecuațiile de momente în raport cu axele roților, rezultă:

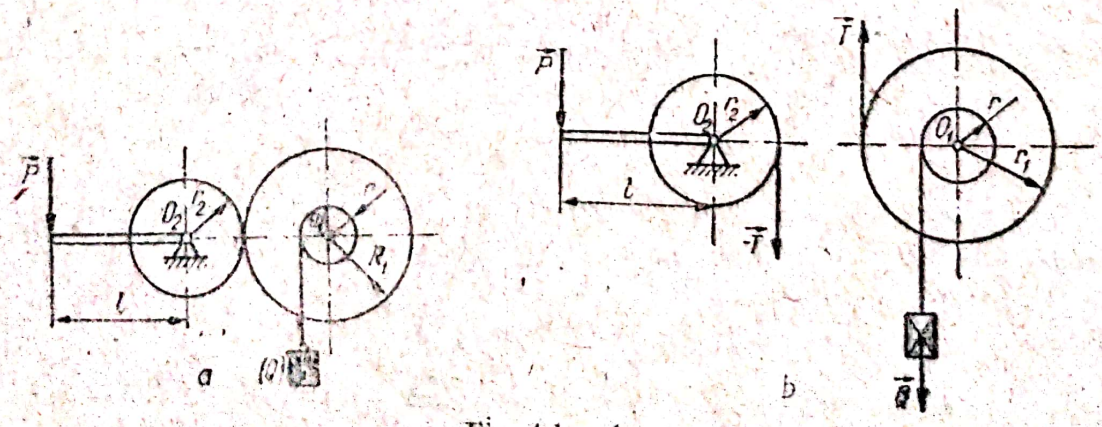


Fig. 4.1 a, b

— pentru roata O_1

$$\Sigma M_{(o_1)} = 0; \quad rQ - r_1 \cdot T = 0;$$

— pentru roata O_2

$$\Sigma M_{(O_2)} = 0: \quad lP - r_2 T = 0.$$

Eliminînd forţa T între cele două ecuaţii, se obţine

$$T = \frac{r}{r_1} Q = \frac{l}{r_2} P,$$

sau

$$P = \frac{r r_2}{r_1 l} Q.$$

Cu valorile date, avem

$$P = \frac{5 \cdot 10}{20 \cdot 40_c} 200 = 12{,}5 \text{ daN}.$$

4.2. Un stîlp vertical AD este încastrat în A în sol şi susţine o traversă orizontală BC prin intermediul cablului DC. Traversa este încărcată cu sarcina Q. Să se calculeze reacţiunile din A şi B, tensiunea în cablu şi momentul din încastrare (fig. 4.2, a).

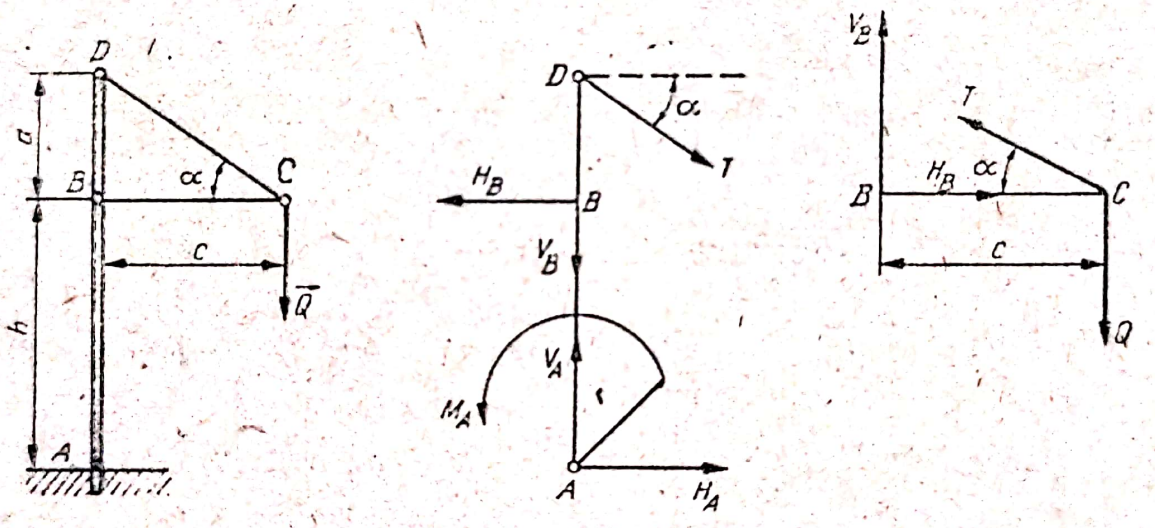


Fig. 4.2 a, b, c

R e z o l v a r e. Se descompune sistemul şi se scriu ecuaţiile de echilibru pentru fiecare corp în parte. Astfel, pentru bara AD, avem

$$\Sigma X_i = 0: \quad T \cos \alpha + H_A - H_B = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad V_A - V_B - T \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad M_A - (a + b) T \cos \alpha + b H_B = 0.$$

Ecuaţiile de echilibru pentru traversa BC sînt respectiv

$$\Sigma X_i = 0: \quad H_B - T \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad V_B + T \sin \alpha - Q = 0$$

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad cV_B = 0.$$

În urma rezolvării celor două sisteme de ecuații, rezultă:

$$V_A = Q; \quad H_A = 0; \quad M_A = aQ \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$V_B = 0; \quad H_B = Q \operatorname{ctg} \alpha; \quad T = \frac{Q}{\sin \alpha}.$$

4.3. Sarcina Q, legată prin firul OC, trecut peste scripetele C este susținută de către barele orizontală AC și verticală BG, articulate în punctele A, B și G (fig. 4.3, a). Să se determine valorile reacțiunilor din articulațiile A, B și G.

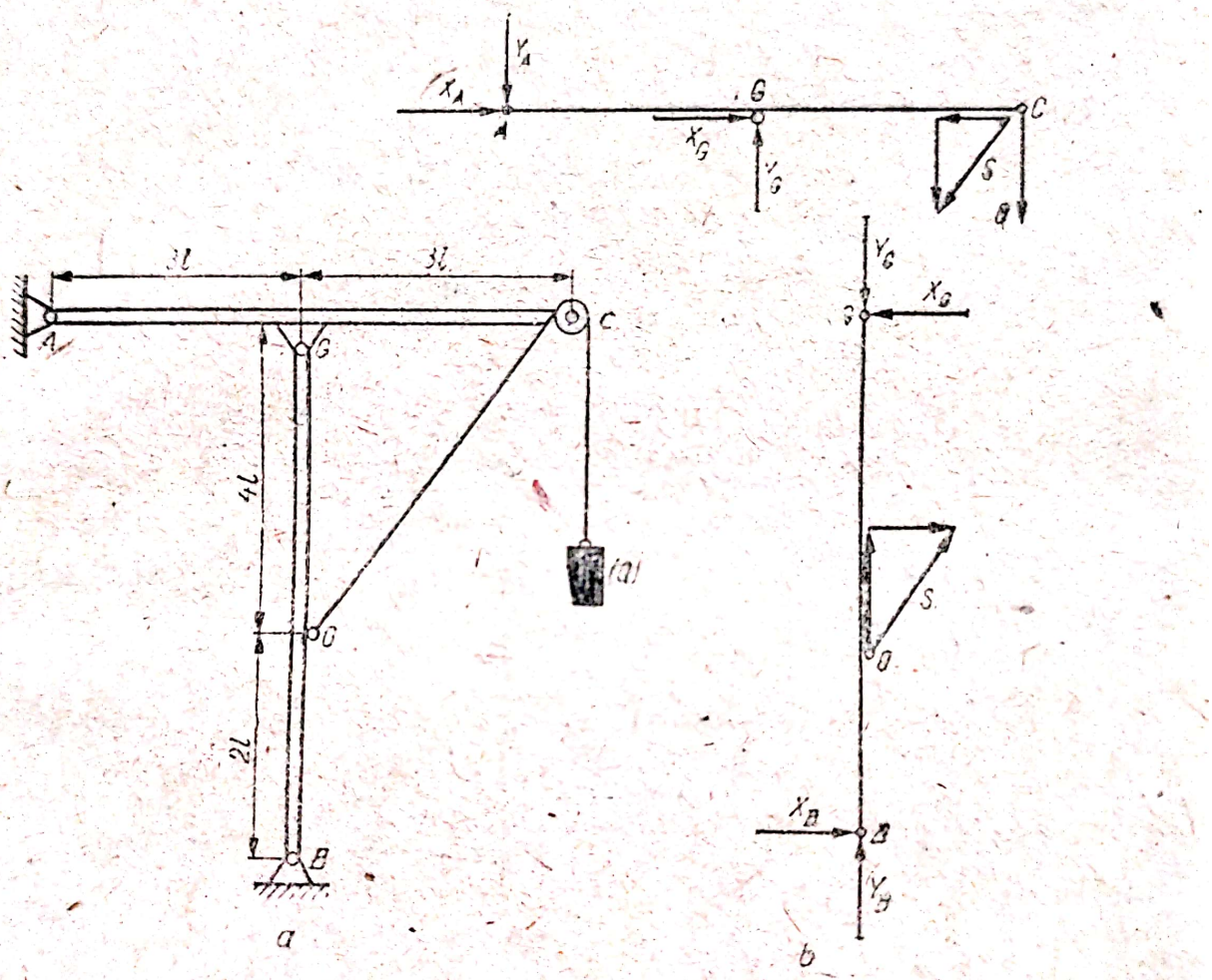


Fig. 4.3 a, b

Rezolvare. Descompunînd sistemul ca în fig. 4.3, b, se pot scrie următoarele ecuații de echilibru:

— pentru bara AC

$$\Sigma X_i = 0: \; X_A + X_G - \frac{3}{5} S = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \; -Y_A + Y_G - \frac{4}{5} S - Q = 0$$

$$\Sigma M_{(G)} = 0: \; 3lY_A - 3lQ - 3l \frac{4}{5} S = 0;$$

– pentru bara BG

$$\Sigma X_i = 0: \quad -X_G + \frac{3}{5}S + X_B = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_B - Y_G + \frac{4}{5}S = 0.$$

$$\Sigma M_{(G)} = 0: \quad 6lX_B + 4l\frac{3}{5}S = 0.$$

Rezolvînd sistemele de ecuaţii obţinute, ştiind că $S = Q$, rezultă

$$X_A = \frac{2}{5}Q; \quad Y_A = \frac{9}{5}Q$$

$$X_B = -\frac{2}{5}Q; \quad Y_B = \frac{14}{5}Q$$

$$X_G = \frac{1}{5}Q; \quad Y_G = \frac{18}{5}Q.$$

4.4. Două role identice, fiecare de greutate $Q = 10\sqrt{3}$ daN, sînt susţinute de către un plan vertical (fig. 4.4). Considerînd că suprafeţele de contact sînt perfect netede, să se determine reacţiunile exterioare din punctele de reazem A, B şi C.

Rezolvare. Reacţiunile interioare fiind egale în modul, coliniare şi direct opuse, se poate aplica teorema solidificării, în baza căreia se pot scrie următoarele ecuaţii de echilibru, pentru forţele exterioare şi reacţiunile exterioare sistemului de puncte materiale

$$X_i = 0: \quad N_C - N_B \sin 30° - N_A \sin 30° = 0$$

$$Y_i = 0: \quad -2Q + N_B \cos 30° + N_A \cos 30° = 0$$

$$M_{(E)} = 0: \quad DE \cdot N_A - BE \cdot Q \cos 30° - DE \cdot N_C \sin 30° = 0.$$

Rezultă

$$N_B = \frac{\sqrt{3}}{2}Q = 15 \text{ daN}; \quad N_A = \frac{5}{2\sqrt{3}}Q = 25 \text{ daN}; \quad N_C = \frac{2}{\sqrt{3}}Q = 20 \text{ daN}.$$

4.5. Să se determine reacţiunile din articulaţia A şi reazemul B al dispozitivului din fig. 4.5.

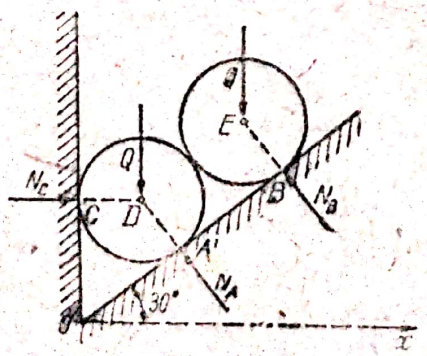


Fig. 4.4

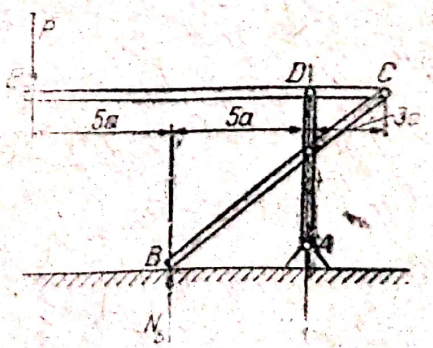


Fig. 4.5

Rezolvare. Pe baza teoremei solidificării se scriu ecuațiile de echilibru

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -P + N_B + V_A = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \; 10P - 5N_B = 0$$

Rezolvînd sistemul, pentru $P = 10\,\text{kN}$ se obține:

$$V_A = -10 \text{ kN și } N_B = 20 \text{ kN}.$$

4.6. Trei sfere egale, de raze R și greutate G sînt legate cu un cablu care formează unghiuri de 45° cu orizontala în punctele de suspensie (fig. 4.6, a). Se cere să se determine tensiunea în cablu și reacțiunile dintre sfere pentru poziția de echilibru.

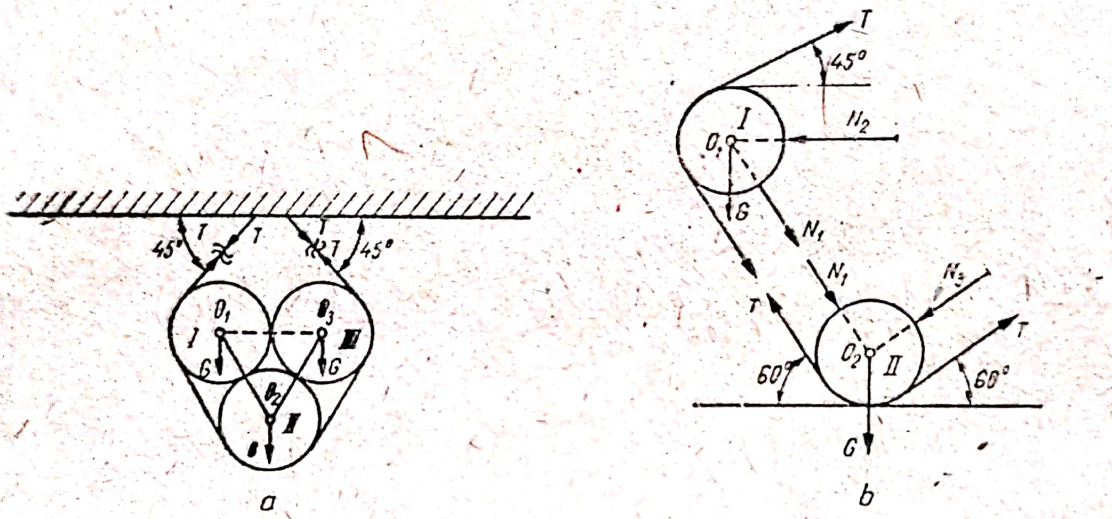


Fig. 4.6 a, b

Rezolvare. Sistemul prezentînd simetrie, se va studia numai echilibrul a două dintre cele trei sfere, I și II. Descompunînd sistemul rezultă următoarele ecuații de echilibru:

— pentru corpul I

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_1 \cos 60° - N_2 + T \cos 60° + T \cos 45° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_1 \sin 60° + T \sin 45° - T \sin 60° - G = 0$$

$$\Sigma M_{(O_1)} = 0: \quad RT - RT \equiv 0;$$

— pentru corpul II

$$\Sigma X_i = 0: \quad N_1 \cos 60° - N_3 \cos 60° - T \cos 60° + T \cos 60° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -N_1 \sin 60° - N_3 \sin 60° + 2T \sin 60° - G = 0$$

$$\Sigma M_{(O_2)} = 0: \quad RT - RT \equiv 0.$$

Rezultă

$$N_1 = N_3 = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} G, \; N_2 = \frac{G}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\right); \; T = \frac{3G}{\sqrt{2}}.$$

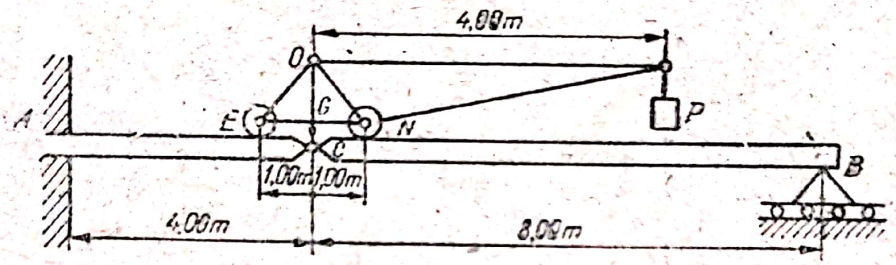
Sub raport practic, o astfel de problemă necesită determinarea în special a tensiunii din cablu, reacțiunile dintre sfere fiind forțe interioare. Soluția se obține ușor (fig. 4.6, b), efectuind proiecția pe verticală a forțelor

$$\Sigma Y_i = 0 : \; 2T \cos 45° - 3G = 0.$$

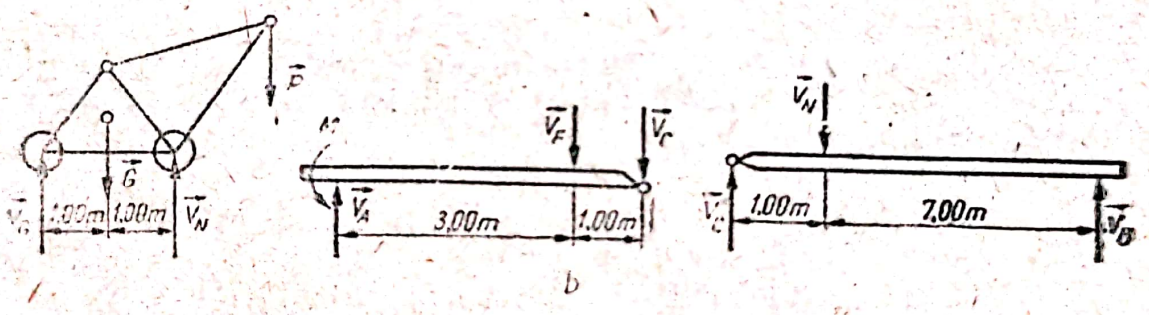
Rezultă aceeași valoare pentru tensiunea T, adică

$$T = \frac{3G}{\sqrt{2}}.$$

4.7. O grindă discontinuă $A-C-B$, încastrată în A și simplu rezemată în B, poartă o macara care ridică o sarcină $P = 1000$ daN. Dimensiunile fiind indicate în fig. 4.7, a și cunoscînd că greutatea macaralei este 5000 daN, aplicată pe verticala CD, se cere să se determine reacțiunile din A și B.



a



b

Fig. 4.7 a, b

Rezolvare. Se descompune sistemul și se scriu ecuațiile de echilibru pentru fiecare corp în parte:

— echilibrul macaralei, (fig. 4.7, b):

$$\Sigma Y_i = 0 : \quad V_E - P + V_N - G = 0$$

$$\Sigma M_{(E)} = 0 : \; -1G + 2V_N - 5P = 0;$$

Rezultă

$$V_N = G = 5000 \text{ daN}; \quad V_E = P = 1000 \text{ daN};$$

— echilibrul barei AC

$$\Sigma Y_i = 0 : \quad V_A - V_E - V_C = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0 : \; M - 3V_E - 4V_C = 0;$$

— echilibrul barei CB

$$\Sigma Y_i = 0 : \quad V_C - V_N + V_B = 0$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0 : \; 7V_N - 8V_C = 0$$

Rezolvînd sistemele de ecuații, se obține

$$V_A = 5375 \text{ daN}; \; V_B = 625 \text{ daN};$$

$$V_C = 4375 \text{ daN și } M = 20500 \text{ daN} \cdot \text{m}.$$

4.8. Un stăvilar pentru oprirea lichidului este constituit din elementele AC și BC. Se cere să se determine reacțiunile din articulația A și încastrarea B (fig. 4.8, a), în funcție de înălțimea h, lățimea b și greutatea specifică a lichidului γ.

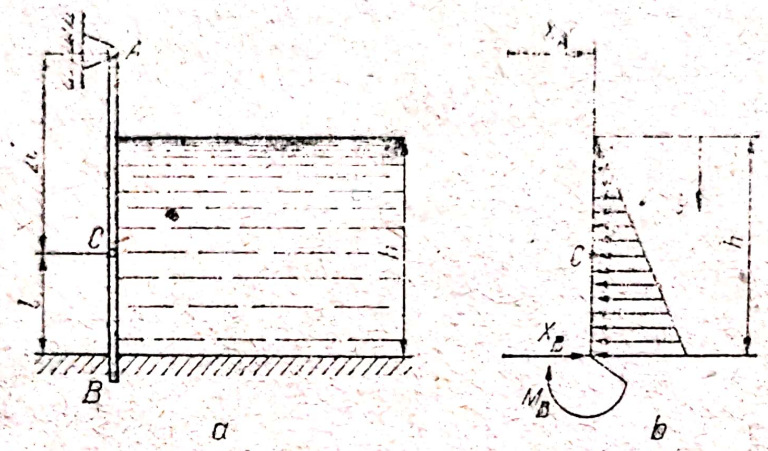


Fig. 4.8 a, b

Rezolvare. Presiunea lichidului asupra stăvilarului se concretizează printr-o sarcină distribuită triunghiular (fig. 4.8, b), valoarea maximă a acesteia fiind: $q_0 = \gamma h$.

În cazul în care $h \geqslant l$, ecuațiile de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + X_B - \frac{1}{2} q_0 hb = 0$$

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad -2lX_A + \frac{1}{2} \frac{(h-l)^2}{h} q_0 \frac{1}{3} (h-l)b = 0$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad -M_B - 3lX_A + \frac{1}{2} q_0 h \frac{1}{3} hb = 0.$$

Rezultă

$$X_A = \frac{1}{12} \frac{b}{l} (h-l)^3 \gamma; \; X_B = \frac{1}{2} bh^2 \gamma - X_A,$$

$$M_B = \frac{1}{6} bh^3 \gamma - 3lX_A$$

În cazul cînd $h \leqslant l$, se pot scrie următoarele ecuații de echilibru

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + X_B - \frac{1}{2} q_0 hb = 0$$

$$\Sigma M_B = 0: \quad -M_B - 3lX_A + \frac{1}{2} q_0 h \frac{1}{3} hb = 0$$

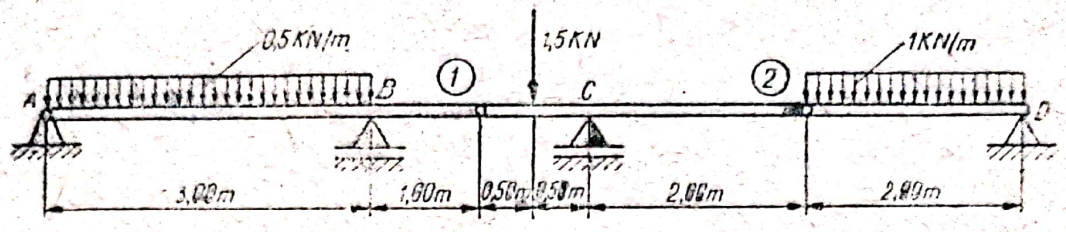
$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad -2lX_A = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

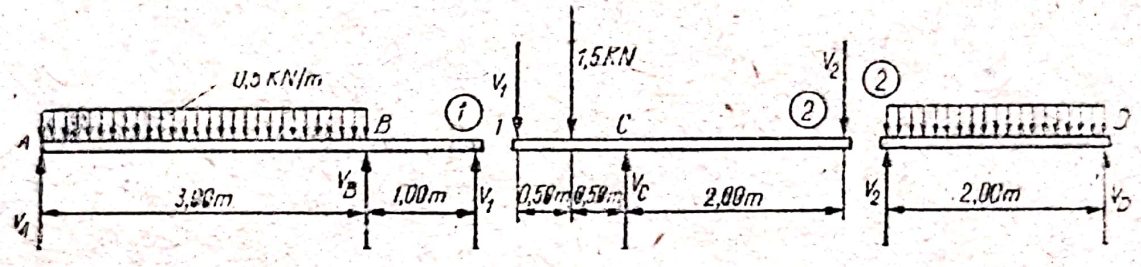
Se obține

$$X_A = 0;\ X_B = \frac{1}{2} bh^2\gamma;\ M_B = \frac{1}{6} bh^3\gamma.$$

4.9. Să se determine reacțiunile din reazemele A, B, C și D, pentru grinda Gerber din fig. 4.9, a.



a



b

Fig. 4.9 a, b

Rezolvare. Descompunem grinda în trei grinzi simple, ca în figura 4.9, b și scriem ecuațiile de echilibru pentru fiecare grindă în parte. Astfel, pentru grinda $A - 1$ avem

$$\Sigma Y_i = 0: \quad V_A - 0{,}5 \cdot 3 + V_B + V_1 = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad -\frac{3}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 3 + 3V_B + 4V_1 = 0.$$

Analog rezultă pentru grinda $2 - C$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -V_1 - 1{,}5 + V_C - V_2 = 0$$

$$\Sigma M_{(2)} = 0: \quad -0{,}5 \cdot 1{,}5 + 1 \cdot V_C - 3V_2 = 0.$$

În fine, ecuațiile de echilibru ale grinzii $2 - D$ sînt

$$\Sigma Y_i = 0: \quad V_2 - 1 \cdot 2 + V_D = 0$$

$$\Sigma M_{(2)} = 0: \quad 2V_D - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 0.$$

Din ultimele două ecuații, deducem

$$V_D = 1 \text{ kN și } V_2 = 1 \text{ kN}.$$

Substituind în ecuația a patra valoarea lui V_2 se obține

$V_C = 3{,}75$ kN, iar din ecuația treia se deduce $V_1 = 1{,}25$ daN.

Din primele două ecuații, se obține

$$V_A = 1{,}166 \text{ kN și } V_B = -0{,}916 \text{ daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

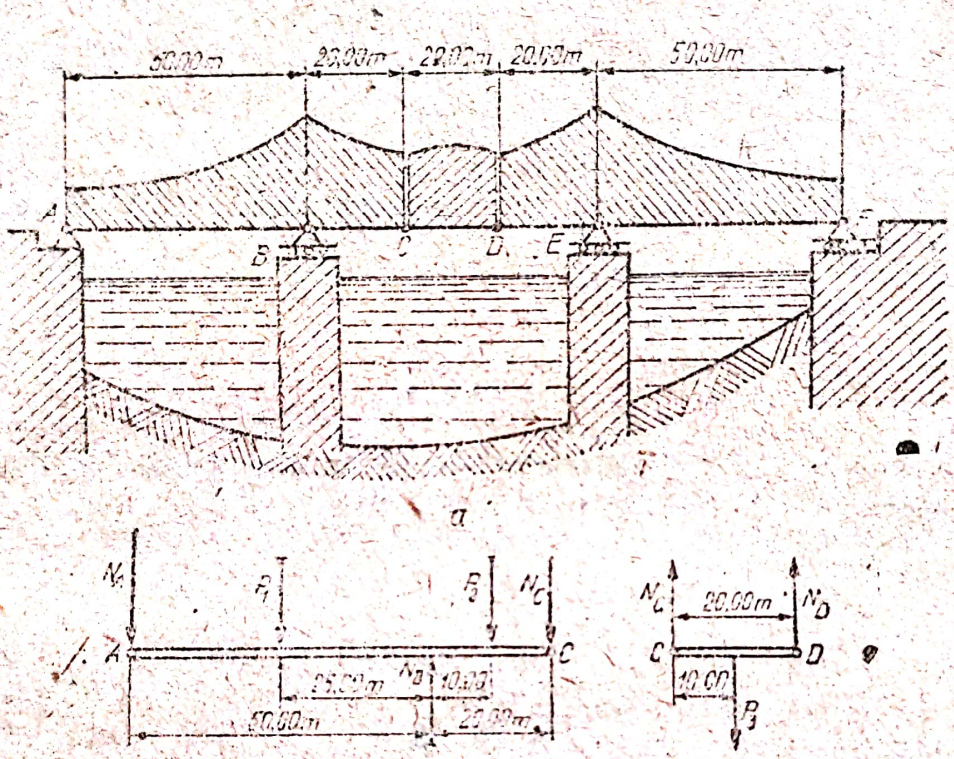
Verificarea se face efectuînd echilibrul întregii grinzi ; avem

$$\Sigma Y_i = 0: \; V_A - 3 \cdot 0{,}5 + V_B - 1{,}5 + V_C - 1 \cdot 2 + V_D = 0$$

adică

$$1{,}166 - 1{,}5 - 0{,}916 - 1{,}5 + 3{,}75 - 2 + 1 = 0.$$

4.10. Un pod cu console constă din trei părţi, AC, CD şi DF (fig. 4.10, a). Părţile extreme ale podului se sprijină pe cîte un suport ; încărcarea liniară a podului este de $6000 \cdot 9{,}81$ N/m. Cunoscînd $AC = DF = 70$ m, $CD = 20$ m, $AB = EF = 50$ m. Se cere să se determine reacţiunile din legăturile mecanice ale podului.



a

Fig. 4.10 a, b

Rezolvare. Înlăturînd legăturile, reprezentînd forţele din legături şi efectuînd echilibrul fiecărei părţi, avem (fig. 4.10, b) :

– pentru porţiunea AC

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_A + P_1 + P_2 + N_C - N_B = 0$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \; 50N_A - 20N_C + 25P_1 - 10P_2 = 0.$$

– pentru porţiunea CD

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_C - P_3 + N_D = 0$$

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \; 20N_D - 10P_3 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din aceste două sisteme de ecuații deducem

$$N_C = N_D = \frac{P_3}{2} = 6000 \cdot 9{,}81 \text{ daN}$$

$$N_A = \frac{20}{50} N_C - \frac{25}{50} P_1 + \frac{10}{50} P_2 = -102000 \cdot 9{,}81 \text{ N}.$$

$$N_B = P_1 + P_2 + N_A + N_C = 50 \cdot 6000 \cdot 9{,}81 \text{ N} +$$

$$+ 20 \cdot 6000 \cdot 9{,}81 \text{ N} - 102000 \cdot 9{,}81 \text{ N} + 60000 \cdot 9{,}81 \text{ N} = 37800 \text{ daN}.$$

4.11. Pe un stîlp cu consolă (fig. 4.11) sînt fixați doi scripeți C și D, de dimensiuni neglijabile, peste care este trecut un fir ce susține o sarcină $Q = 2400$ N. Extremitatea inferioară a firului este fixată în punctul B. Stîlpul este susținut de către cablul EE_1.

Neglijînd greutatea stîlpului, a consolei, a firului și a cablului, precum și frecările din scripeți, să se determine efortul din cablu și reacțiunea din articulația A.

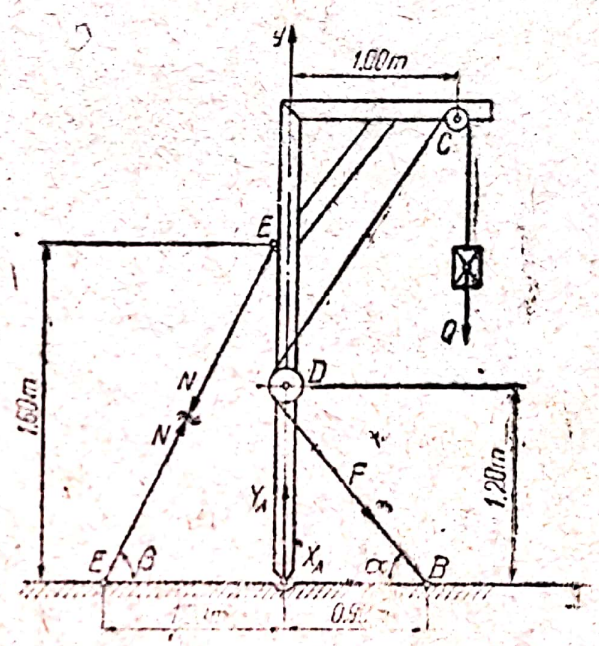


Fig. 4.11

Rezolvare. Considerînd sistemul de corpuri ca un solid rigid, introducem reacțiunile din legături: $\mathbf{X_A}$, $\mathbf{Y_A}$, $\mathbf{N}$ precum și F forța din fir, care este o forță exterioară sistemului de corpuri. Avînd în vedere că s-au neglijat frecările din scripeți (dintre fir și roată, respectiv din lagărul scripetelui), rezultă $F = Q$.

Din triunghiurile dreptunghice AEE_1 și ABD, deducem

$$EE_1 = 2 \text{ m}, \quad BD = 1{,}5 \text{ m}, \quad \text{deci} \quad \sin \alpha = \sin \beta = 0{,}8;$$

$$\cos \alpha = \cos \beta = 0{,}6$$

Prin urmare: $\alpha = \beta$

Ecuațiile de echilibru se pot scrie sub forma

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + 0{,}6Q - 0{,}6N = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A - Q - 0{,}8Q - 0{,}8N = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad -1 \cdot Q - 0{,}72Q + 0{,}96N = 0$$

În urma rezolvării sistemului se obține

$$X_A = \frac{19}{40} Q = 1140 \text{ N}; \quad Y_A = \frac{97}{30} Q = 7760 \text{ N}; \quad N = \frac{43}{24} Q = 4300 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atragem atenția că forțele interioare sistemului care acționează asupra părților construcției (în cazul de față eforturile din fir care acționează pe porțiunea DC asupra scripeților D și C) nu intervin în ecuațiile de echilibru, deoarece ele sînt forțe care se echilibrează reciproc.

4.12. Mecanismul de acționare a ambreiajului unui tractor are schema în fig. 4.12. Se cere să se determine forța P_p, dacă asupra pîrghiei de acționare AB acționează forța Q.

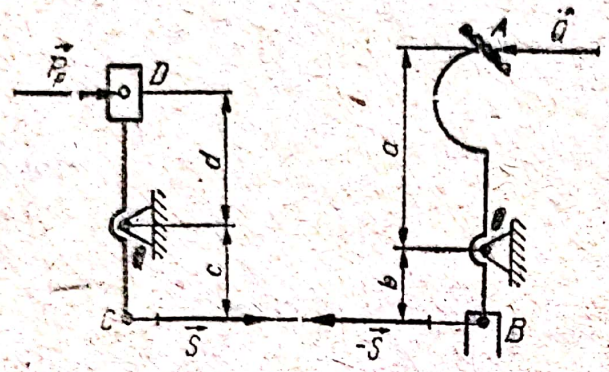


Fig. 4.12

Rezolvare. Secționăm bara BC și o înlocuim cu forța S. Ecuația de momente față de punctul O se scrie

$$\Sigma M_{(o)} = 0: \; aQ - bS = 0$$

de unde $$S = \frac{a}{b} Q.$$

În mod analog, ecuația de momente în raport cu punctul O_1 ne dă

$$\Sigma M_{(o_1)} = 0: \quad -dP_p + cS = 0$$

rezultînd

$$P_p = \frac{c}{d} S.$$

Ținînd seama de expresia de mai sus a forței S, rezultă

$$P_p = \frac{ac}{bd} S.$$

4.13. Un pod este format din două părți legate prin articulația A și fixate pe cele două culee prin articulațiile B și C. Greutatea fiecărei părți a podului este 4000 daN. Centrele lor de greutate sînt D și E. Pe pod avem o sarcină $P = 2000$ daN. Dimensiunile sînt date în figura 4.13. Se cere să se determine reacțiunile din articulațiile A, B și C.

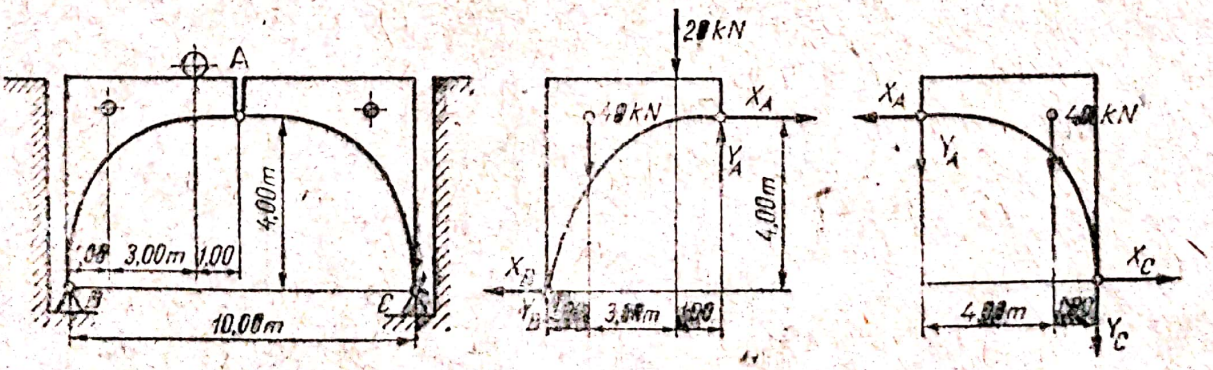


Fig. 4.13

R e z o l v a r e. Descompunem sistemul și studiem echilibrul fiecărei părți. Pentru partea stîngă a podului avem

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A - X_B = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_B - 4000 - 2000 + Y_A = 0 \tag{2}$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad -1 \cdot 4000 - 4 \cdot 2000 + 5Y_A - 4X_A = 0 \tag{3}$$

Analog, pentru partea dreaptă se obține

$$\Sigma X_i = 0: \quad -X_A + X_C = 0 \tag{4}$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -Y_A - 4000 + Y_C = 0 \tag{5}$$

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad 1 \cdot 4000 + 5Y_A + 4X_A = 0. \tag{6}$$

Din ecuațiile (3) și (6) deducem prin însumare

$$10Y_A = 8000 \Rightarrow Y_A = 800 \text{ daN}.$$

Rezultă, de asemenea,

$$X_A = X_B = X_C = -2000 \text{ daN}; \; Y_B = 5200 \text{ daN}; \; Y_C = 4800 \text{ daN}.$$

4.14. Două role de greutăți **P** și **Q**, legate prin intermediul firului *DE*, se reazemă pe planele fixe *AB* și *BC* care fac între ele un unghi drept. Să se determine efortul **N** din firul *DE* și unghiul φ (fig. 4.14) pe care îl face acest fir cu orizontala cînd sistemul este în echilibru știind că firul este inextensibil și că poate trece prin planele *AB* și *BC*. Se cunoaște $P = 6$ daN, $Q = 10$ daN și $\alpha = 30°$.

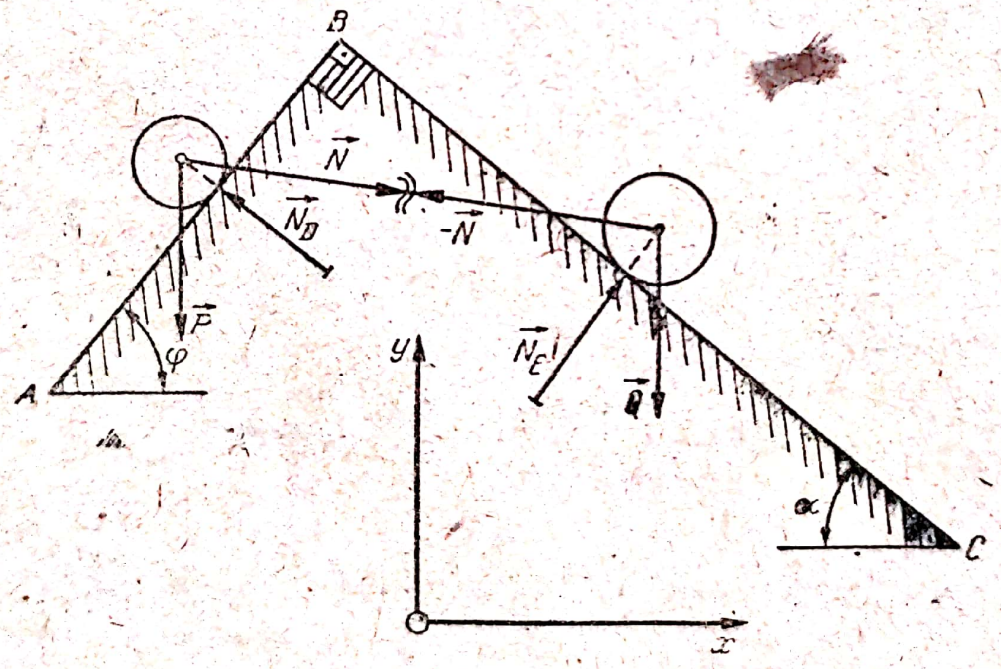


Fig. 4.14

R e z o l v a r e. Sistemul este în echilibru dacă fiecare rolă se găsește în echilibru sub acțiunea forțelor aferente. Ecuațiile de echilibru ale rolei *D* sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad N \cos \varphi - N_B \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N \sin \varphi + N_B \sin \alpha - P = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile de echilibru ale rolei E sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N\cos\varphi + N_E \sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -N\sin\varphi + N_E\cos\alpha - Q = 0$$

Substituind în ecuația a doua expresia lui N_E dedusă din prima ecuație, se obține

$$N\sin\varphi + N\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\sin\alpha = P. \tag{1}$$

Analog, exprimînd N_E din ecuația a treia și înlocuind în ecuația a patra rezultă

$$-N\sin\varphi + N\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}\cos\alpha - Q = 0. \tag{2}$$

Însumînd ecuațiile (1) și (2) se obține

$$N\cos\varphi\,\frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha} - P - Q = 0$$

sau

$$\frac{2N\cos\varphi}{\sin 2\alpha} - P - Q = 0$$

de unde

$$N\cos\varphi = \frac{P+Q}{2}\sin 2\alpha. \tag{3}$$

Rezultă, de asemenea,

$$N\sin\varphi = P - N\cos\varphi\operatorname{tg}\alpha = P - (P+Q)\sin^2\alpha \tag{4}$$

Împărțind (4) la (3), se obține

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P-(P+Q)\sin^2\alpha}{(P+Q)\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2P}{(P+Q)\sin 2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha.$$

Numeric avem:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\cdot 6}{16\,\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \varphi = 16°$$

$$N = \frac{(P+Q)\sin 2\alpha}{2\cos\varphi} = \frac{16\sqrt{3}}{4\cos 16°} = 7{,}2 \text{ daN}.$$

4.15. Un pod format din două grinzi orizontale, legate prin articulația A și articulate de fundație prin barele rigide 1, 2, 3 și 4, barele marginale fiind verticale, iar cele interioare înclinate cu 60° față de orizontală.

Se cunosc următoarele dimensiuni: $AB = AE = 8$ m, $BC = ED = 6$ m. Se cere să se determine eforturile în bare și reacțiunea din articulația A, dacă podul suportă sarcina verticală $P = 1500$ daN, la distanța $a = 4$ m de punctul B (fig. 4.1).5

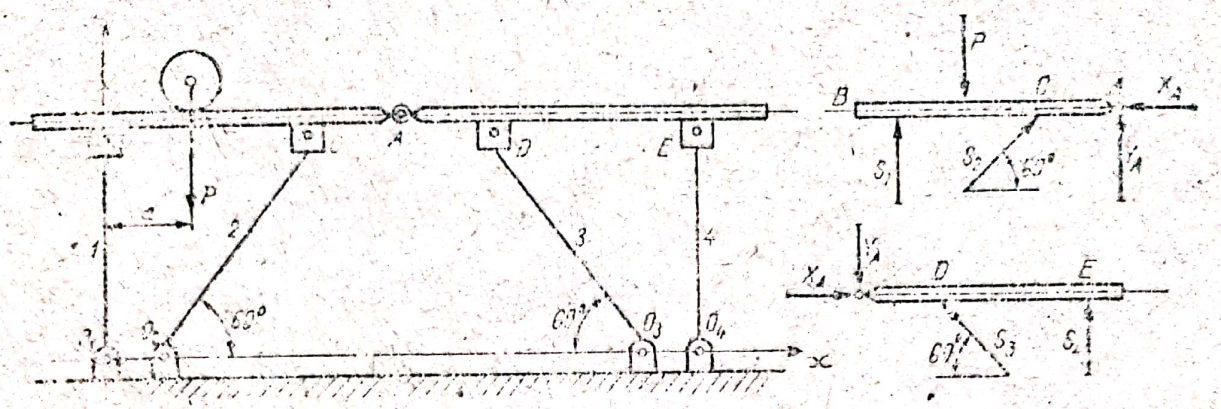


Fig. 4.15

Rezolvare. Efectuăm descompunerea sistemului și scriem ecuațiile de echilibru pentru fiecare grindă în parte. Pentru bara AB avem

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A - S_2 \cos 60° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_1 - P + S_2 \sin 60° + Y_A = 0$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad -4 \cdot 1500 + 6S_2 \sin 60° + 8Y_A = 0.$$

Pentru bara AE ecuațiile de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A - S_3 \cos 60° = 0,$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -Y_A + S_3 \sin 60° + S_4 = 0,$$

$$\Sigma M_{(E)} = 0: \quad -6S_3 \sin 60° + 8Y_A = 0.$$

Din ecuațiile a patra și întîi deducem

$$X_A = \frac{S_2}{2} = \frac{S_3}{2}$$

prin urmare

$$S_3 = S_2.$$

Din ecuațiile a treia și a șasea deducem

$$Y_A = 375 \text{ daN}.$$

Rezultă de asemenea:

$$X_A = 289 \text{ daN}; \; S_1 = 625 \text{ daN}; \; S_2 = S_3 = 577 \text{ daN}$$

și

$$S_4 = -125 \text{ daN}.$$

4.16. Să se determine pentru ce poziție a căruciorului podului rulant din fig. 4.16 se produce, în grinda AB, cel mai mare moment încovoietor. Se cere și valoarea acestui moment dacă $P = 18000$ daN.

Rezolvare. Făcînd echilibrul căruciorului, determinăm forțele N_C și N_D, care acționează asupra grinzii AB

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_C - P + N_D = 0$$

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad -1{,}2 \cdot P + 2N_D = 0.$$

Rezultă

$$N_D = 0{,}6 \cdot 18000 = 10800 \text{ daN}; \; N_C = 7200 \text{ daN}.$$

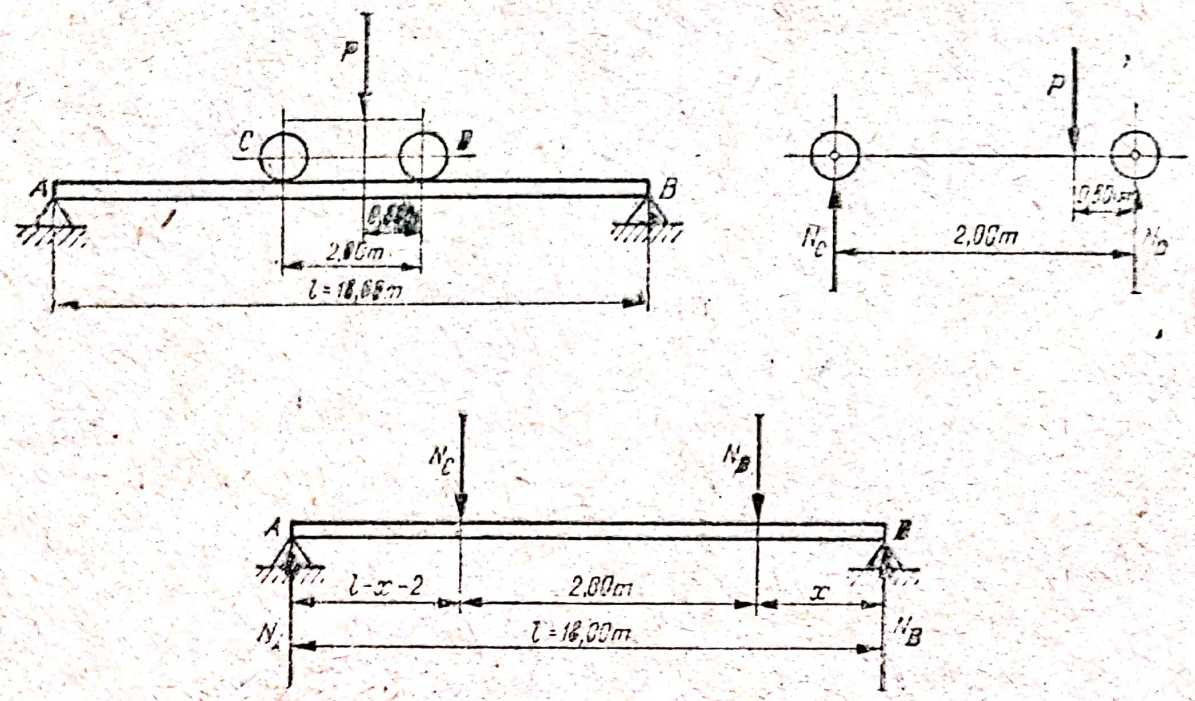


Fig. 4.16

Presupunem că momentul încovoietor este maxim în dreptul forței N_D, atunci cînd acesta se află într-o secțiune x. El va fi

$$M_i = \frac{N_A(l-x-2) + N_B(l-x)}{l} x.$$

Înlocuind valorile numerice

$$M_i = \frac{7\,200(16-x) + 10\,800\,(18-x)}{18} x.$$

Pentru a stabili poziția ce corespunde momentului încovoietor maxim, calculăm derivata momentului încovoietor în raport cu x și o anulăm

$$\frac{dM_i}{dx} = \frac{7200(16-x) + 10800(18-x)}{18} + \frac{x}{18}(-7200 - 10800) = 0;$$

rezultă

$$x = 8{,}6 \text{ m}.$$

Substituind valoarea lui x în expresia momentului încovoietor, se obține cel mai mare moment încovoietor, numit și moment maxim maximorum; rezultă:

$$M_{i\,max\,max} = \frac{7200(16-8{,}6) + 10800(18-8{,}6)}{18} 8{,}6 = 74000 \text{ daN} \cdot \text{m}.$$

4.17. Mecanismul hidraulic de acționare a unei frîne de tractor se arată în fig. 4.17. Se cere să se determine presiunea creată în interiorul cilindrului de presiune, în funcție de forța la pedală, Q.

Rezolvare. Secționăm tija pistonului, și punem în tijă efortul S. Ecuația de momente față de punctul O se scrie

$$\Sigma M_{(o)} = 0: \; aQ - bS = 0.$$

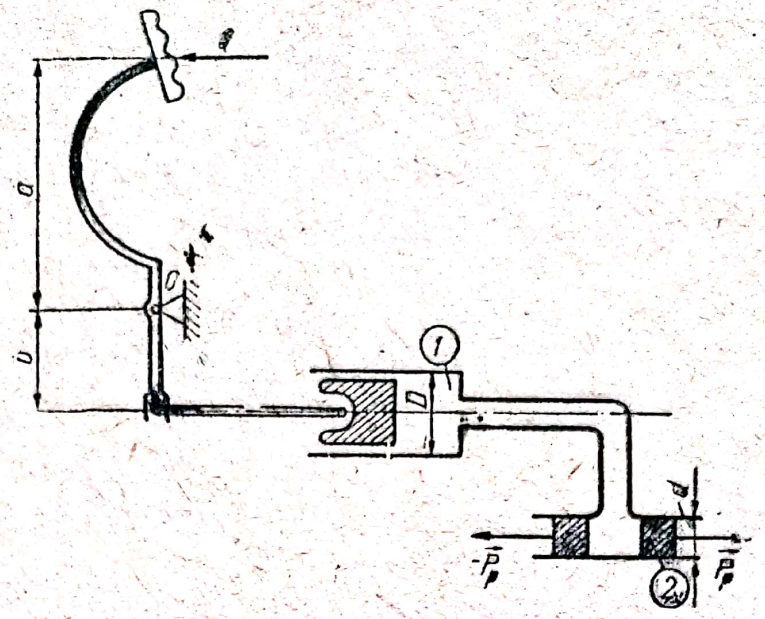


Fig. 4.17

Rezultă efortul din tijă

$$S = \frac{a}{b} Q$$

care creează presiunea p. Din egalitatea

$$p \frac{\pi d^2}{4} = S$$

rezultă presiunea p

$$p = \frac{4S}{\pi d^2} = \frac{4aQ}{\pi d^2 b}.$$

4.18. Să se determine forța P necesară ridicării sarcinii Q, cu ajutorul cricului format din roțile dințate 1, 2 și 3 și cremaliera 4 (fig. 4.18).

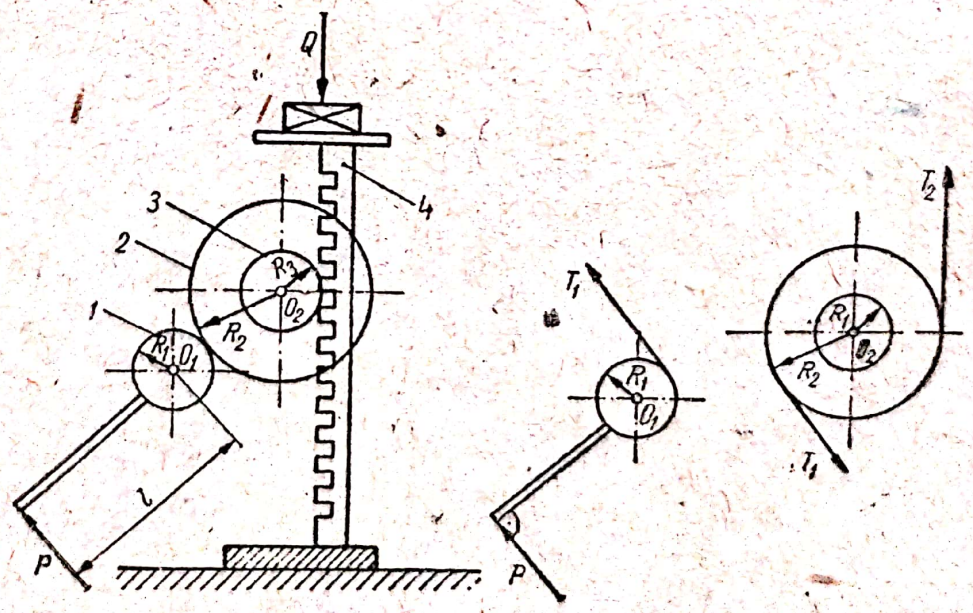


Fig. 4.18

Rezolvare. Separăm roțile și punem în punctele de angrenare forțele tangențiale T_1 și T_2. Efectuăm echilibrul fiecărei roți în parte. Ecuația de echilibru a roții 1 este

$$\Sigma M_{(o_1)} = 0: \; -lP + R_1 T_1 = 0$$

de unde

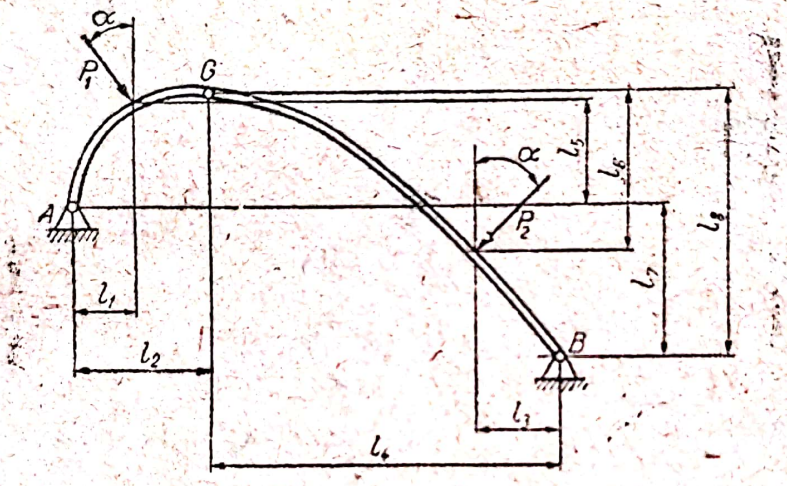
$$T_1 = \frac{l}{R_1} P.$$

Ecuația de echilibru a roților 2—3 se scrie

$$\Sigma M_{(o_2)} = 0: \; R_2 T_1 - R_3 T_2 = 0;$$

rezultă $T_2 = Q$ și $P = \frac{R_1 R_2}{l R_3} Q$.

4.19. O bară curbă este articulată în punctele A, B și G (fig. 4.19). Asupra barei acționează forțele $P_1 = 6{,}0 \cdot 10^4$ N și $P_2 = 5{,}0 \cdot 10^4$ N.



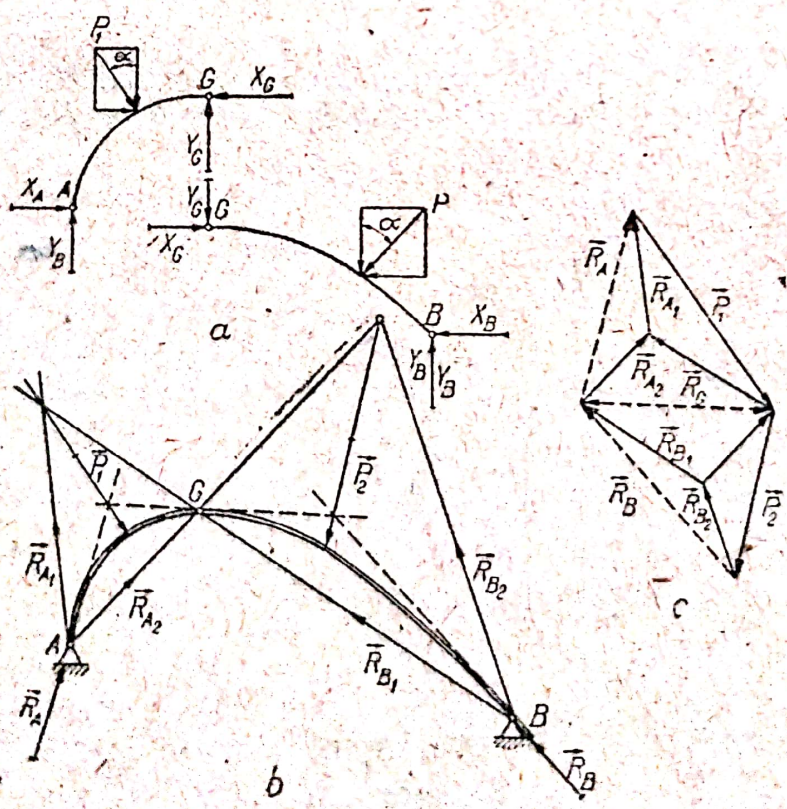


Fig. 4.19

Cunoscînd $\alpha = 30°$, $l_1 = 2$ m, $l_2 = 3{,}5$ m, $l_3 = 2$ m, $l_4 = 5{,}5$ m, $l_5 = 1{,}5$ m, $l_6 = 2$ m, $l_7 = 2$ m și $l_8 = 3{,}5$ m, se cere să se determine reacțiunile din cele trei articulații. Se cere, de asemenea și o soluție grafică a problemei.

Rezolvare. Descompunem sistemul celor două arce care alcătuiesc bara curbă și scriem, apoi, ecuațiile de echilibru pentru fiecare arc în parte; astfel, pentru arcul AG avem (fig. 4.19, a)

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + P_1 \sin \alpha - X_G = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A - P_1 \cos \alpha + Y_G = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \; -l_5 P_1 \sin \alpha - l_1 P_1 \cos \alpha + l_6 X_G + l_2 Y_G = 0.$$

Analog avem pentru arcul BG

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_G - P_2 \sin \alpha - X_B = 0,$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -Y_G - P_2 \cos \alpha + Y_B = 0,$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \; (l_8 - l_6) \; P_2 \sin \alpha + l_3 P_2 \cos \alpha + l_4 Y_G - l_8 X_G = 0.$$

Rezultă, în urma rezolvării celor două sisteme de ecuații obținute,

$$X_A = 2{,}40 \cdot 10^4 \text{ N}; \; Y_A = 4{,}03 \cdot 10^4 \text{ N}; \; X_B = 2{,}90 \cdot 10^4 \text{ N};$$

$$Y_B = 5{,}50 \cdot 10^4 \text{ N}; \; X_G = 5{,}40 \cdot 10^4 \text{ N}; \; Y_G = 1{,}17 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Soluția grafică a problemei se dă în fig. 4.19, b, c.

4.20. Să se determine forța care trebuie să acționeze în articulația A, a mecanismului a cărei schemă cinematică este dată în figura 4.20, cunoscîndu-se forțele: $P_1 = 500$ daN și $P_2 = 100$ daN.

Rezolvare. Fie P forța cerută; decompunem sistemul. Ecuațiile echilibru pentru fiecare corp în parte sînt respectiv:

— pentru culisa B

$$\Sigma X_i = 0: \; X_B - P_1 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \; Y_B - N = 0$$

— pentru culisa D

$$\Sigma X_i = 0: \; S \sin 45° - N_1 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \; P_2 - S \cos 45° = 0;$$

— pentru bara AB

$$\Sigma X_i = 0: \quad P - X_B - S \cdot \sin 45° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -F + S \cdot \cos 45° - Y_B = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \; 40 \, S \sin 75° + 100 \, X_B \sin 30° - 100 \, Y_B \cos 30° = 0.$$

Rezolvarea sistemelor de ecuații obținute, conduce la următoarele valori

$$X_B = P_1 = 500 \text{ daN}; \; S = \frac{P_2}{\cos 45°} = \frac{100}{0{,}707} = 141 \text{ daN}$$

$$P = X_B + S \sin 45° = 500 + 100 = 600 \text{ daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

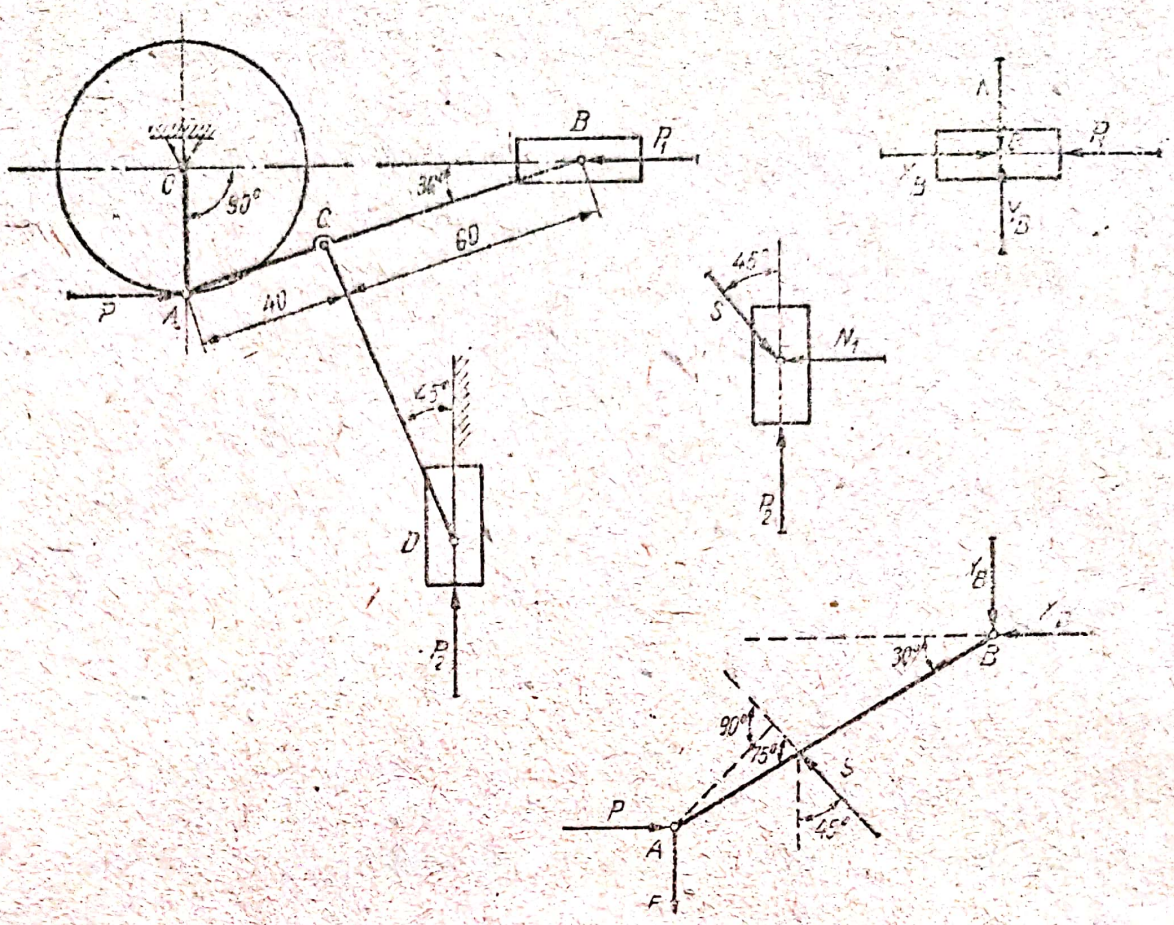


Fig. 4.20

4.21. Platforma basculantă a unui camion este ridicată cu ajutorul mecanismului din figura 4.21. Se cere să se determine forța P care trebuie dezvoltată de mecanism, pentru a putea ridica cutia. Se cunosc unghiurile α, β, γ și Φ; de asemenea, se presupun cunoscute lungimile elementelor: $O_2E = a$, $ED = FE = b$, $O_2B = c$, $O_2C = d$, dimensiunile platformei basculante, $FH = l$, $FN = h$ și greutatea acesteia, Q.

Rezolvare. Descompunînd sistemul și efectuînd echilibrul fiecărui element în parte, avem:

— echilibrul pîrghiei BO_2C

$$\Sigma M_{(O_2)} = 0: \quad c \sin \gamma \cdot P \cos \Phi - c \cos \gamma \cdot P \sin \Phi - d \cos \gamma \cdot S \sin \beta - d \sin \gamma \cdot S \cos \beta = 0$$

sau
$$cP \sin (\gamma - \Phi) = dS \sin (\beta + \gamma)$$

de unde
$$S = \frac{c}{d} \frac{\sin (\gamma - \Phi)}{\sin (\beta + \gamma)} P; \qquad (1)$$

— echilibrul platformei basculante:

$$\Sigma M_{(O_2)} = 0: \quad (b \sin \alpha - a \cos \alpha) S \cos \beta + (a \sin \alpha + b \cos \alpha) S \sin \beta - \left[\left(\frac{l}{2} - \frac{h}{2} \operatorname{ctg} \alpha\right) \sin \alpha - (b \sin \alpha + a \cos \alpha)\right] Q = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

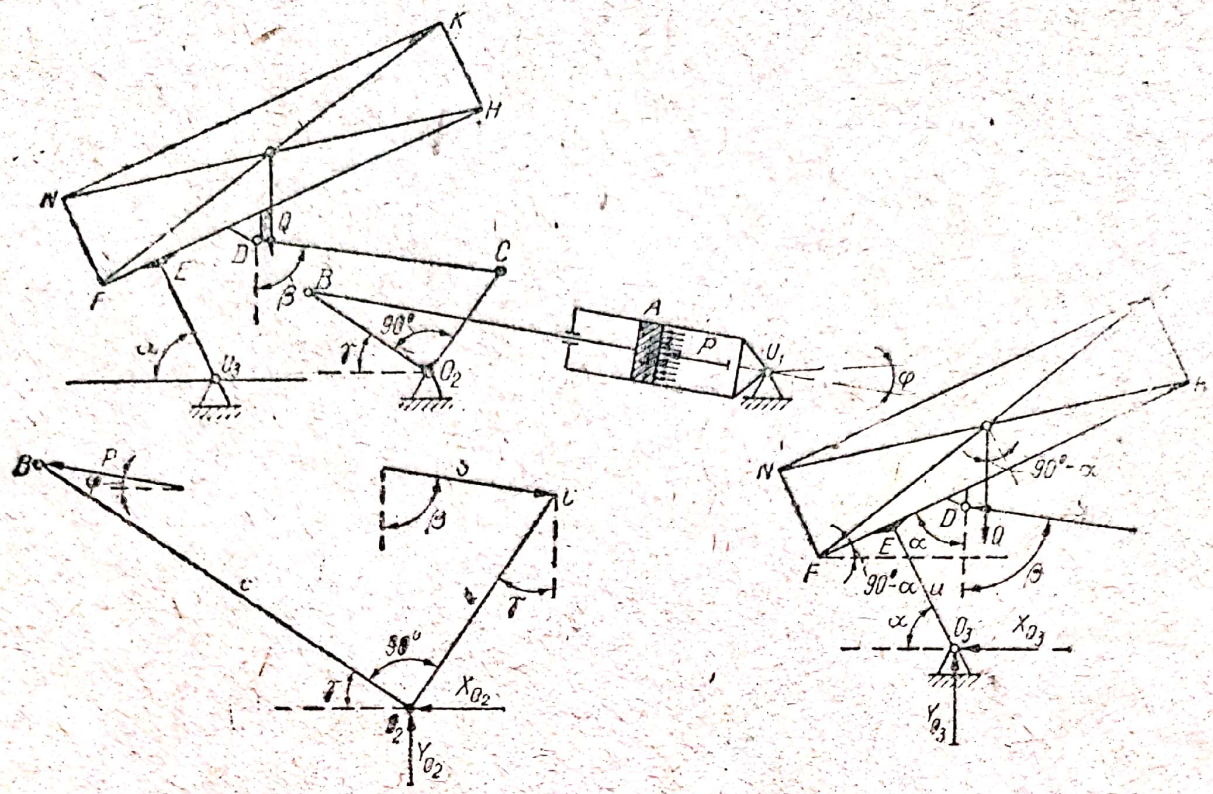


Fig. 4.21

Rezultă

$$S = \frac{\left[\frac{1}{2}(l - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha)\sin\alpha - (b\sin\alpha + a\cos\alpha)\right]}{(b\sin\alpha - a\cos\alpha)\cos\beta + (a\sin\alpha + b\cos\alpha)\sin\beta} Q. \qquad (2)$$

Substituind expresia (2) a lui S în (1) rezultă forţa căutată P.

$$P = \frac{\left[\frac{1}{2}(l - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha)\sin\alpha - (a\cos\alpha + b\sin\alpha)\right]}{(b\sin\alpha - a\cos\alpha)\cos\beta + (a\sin\alpha + b\cos\alpha)\sin\beta} \frac{d\sin(\beta+\gamma)}{c\sin(\gamma-\Phi)} Q.$$

4.22. În industria de prelucrare a lemnului se utilizează grupul cu motor de acţionare cu cablu trăgător în circuit deschis, ancorat ca în fig. 4.22. Se cere să se determine reacţiunile din punctele de reazem A şi B.

Rezolvare. Ecuaţiile de echilibru ale grupului motor I sînt respectiv:

$$\Sigma Y_i = 0: \quad F - N_1 - N_2 = 0$$

$$\Sigma M_{(1)} = 0: \quad xF - lN_1 = 0$$

de unde:

$$N_1 = \frac{x}{l}F \text{ şi } N_2 = \frac{(l-x)F}{l}.$$

Analog se scriu ecuaţiile de echilibru pentru grinda II

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_A + N_B - N_1 - N_2 = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad \frac{l}{2}N_2 + \frac{3}{2}lN_1 - 2lN_B = 0.$$

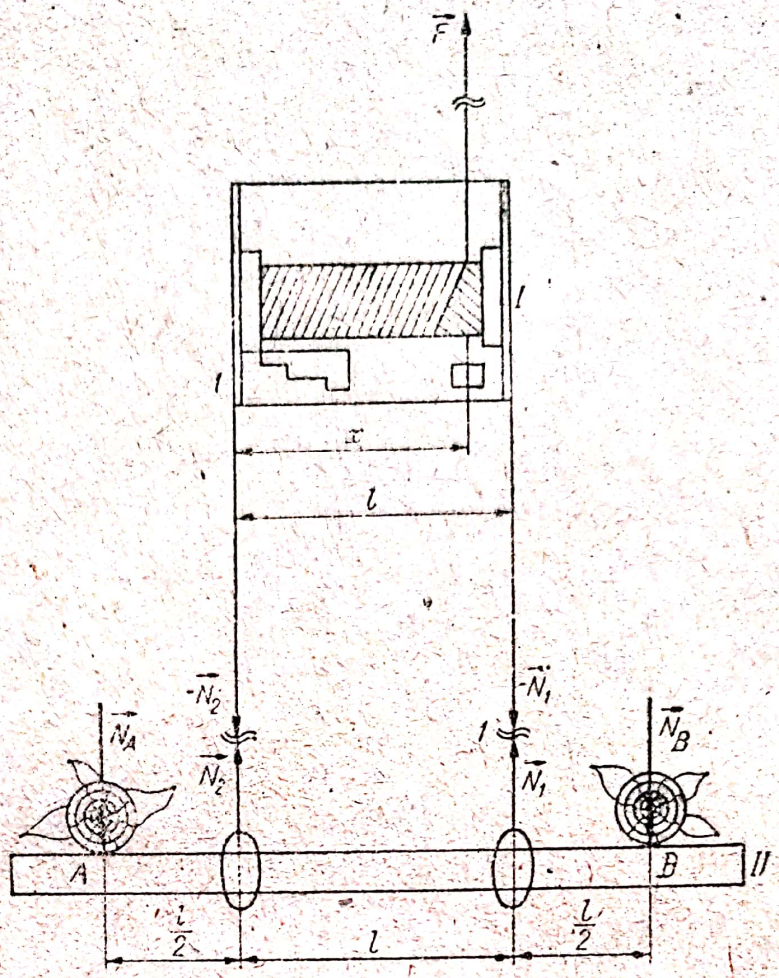


Fig. 4.22

Rezultă

$$N_A = \frac{3l - 2x}{l} \cdot \frac{F}{4} \; ; \quad N_B = \frac{l + 2x}{l} \cdot \frac{F}{4} .$$

4.23. Să se determine forța P, care trebuie să acționeze pe direcția tangentei din A pentru a avea echilibru, în cazul mecanismului din fig. 4.23, dacă $P_1 = 100$ daN, iar $P_2 = 500$ daN și $AB = 75$ cm.

Rezolvare. Echilibrul culisei D, se scrie

$$\Sigma X_i = 0: \quad N - S \cdot \sin 24° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad P_2 - S \cdot \cos 24° = 0.$$

Rezultă

$$S = \frac{P_2}{\cos 24°} = \frac{500}{0{,}915} = 547 \text{ daN}.$$

Efectuăm echilibrul culisei B

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_B - P_1 = 0; \; X_B = P_1 = 100 \text{ daN}.$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_B - N_1 = 0.$$

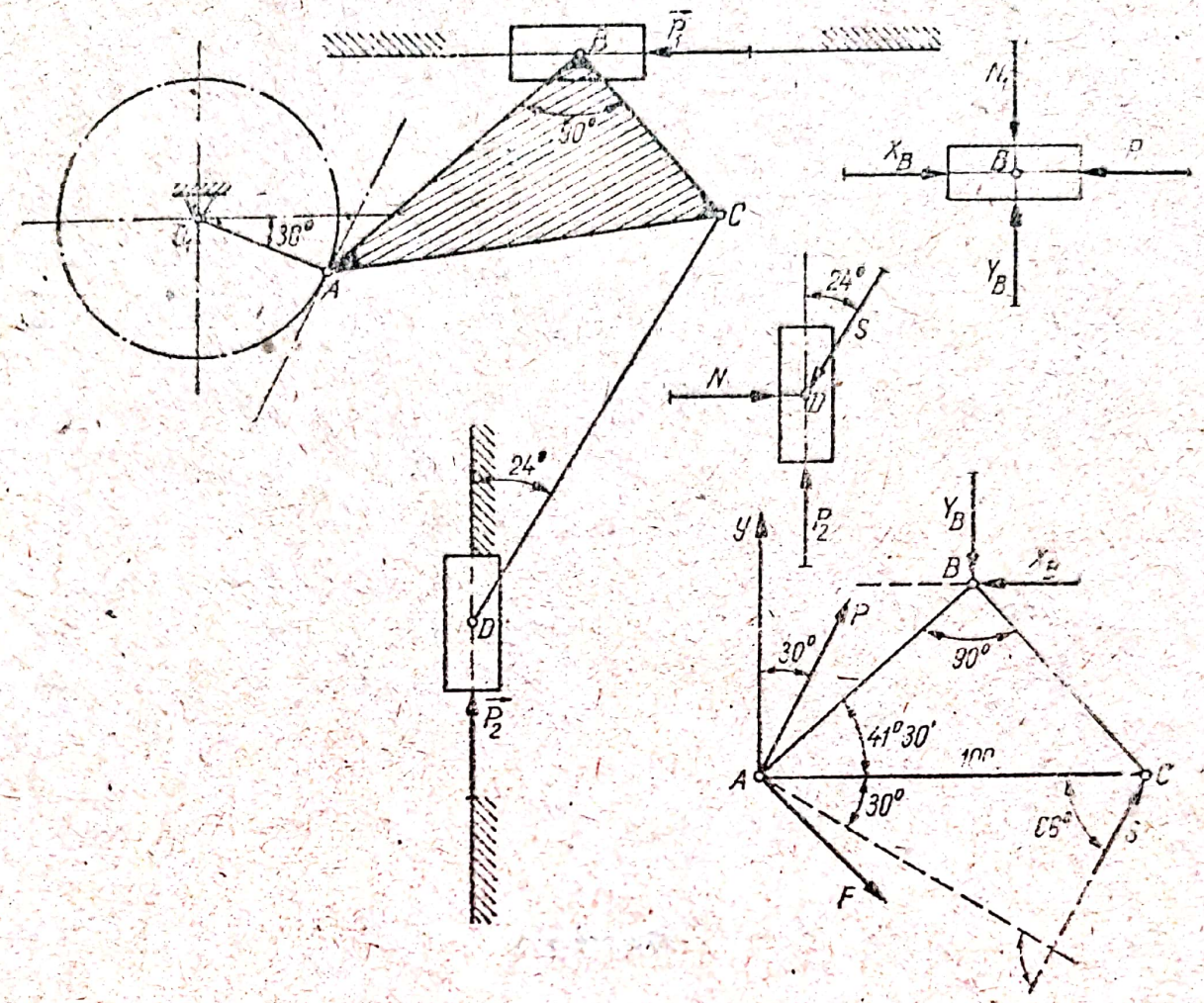


Fig. 4.23

Pentru a face echilibrul triunghiului ABC, notăm cu F forța care solicită bara O_1A; rezultă

$$\Sigma X_i = 0: \quad P\cos 60° + F\cos 30° - X_B + S\cos 66° = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad P\cos 30° - F\sin 30° - Y_B + S\sin 66° = 0;$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad 100\,S\sin 66° + 75X_B\sin 41°30' - 75Y_B\cos 41°30' = 0.$$

Din ultima ecuație se obține

$$Y_B = \frac{100 \cdot 547 \cdot 0{,}915 + 100 \cdot 75 \cdot 0{,}662}{75 \cdot 0{,}75} = 978 \text{ daN}.$$

Rezultă, de asemenea, $P = 355$ daN și $F = 346$ daN.

4.24. Se consideră masa unei raboteze, avînd următoarele dimensiuni: $a = 3$ m, $b = 1$ m, $d = 1{,}6$ m. Ghidajele sînt în formă de V cu unghiul $2\alpha = 120°$ și lățimea $c = 60$ cm. Forțele de așchiere $P_H = 200$ daN și $P_V = 80$ daN apar într-un punct A de coordonate $x_A = 1$ m, $y_A = 0{,}5$ m și $z_A = 0{,}3$ m, față de un sistem de referință, ales la nivelul ghidajelor. Se cere să se determine reacțiunile și forțele de frecare din ghidaj. Se presupune că reacțiunea din ghidaj este liniar repartizată în lungul ghidajului. Se mai dă coeficientul de frecare $\mu = 0{,}12$ și $G = 800$ daN (fig. 4.24, a).

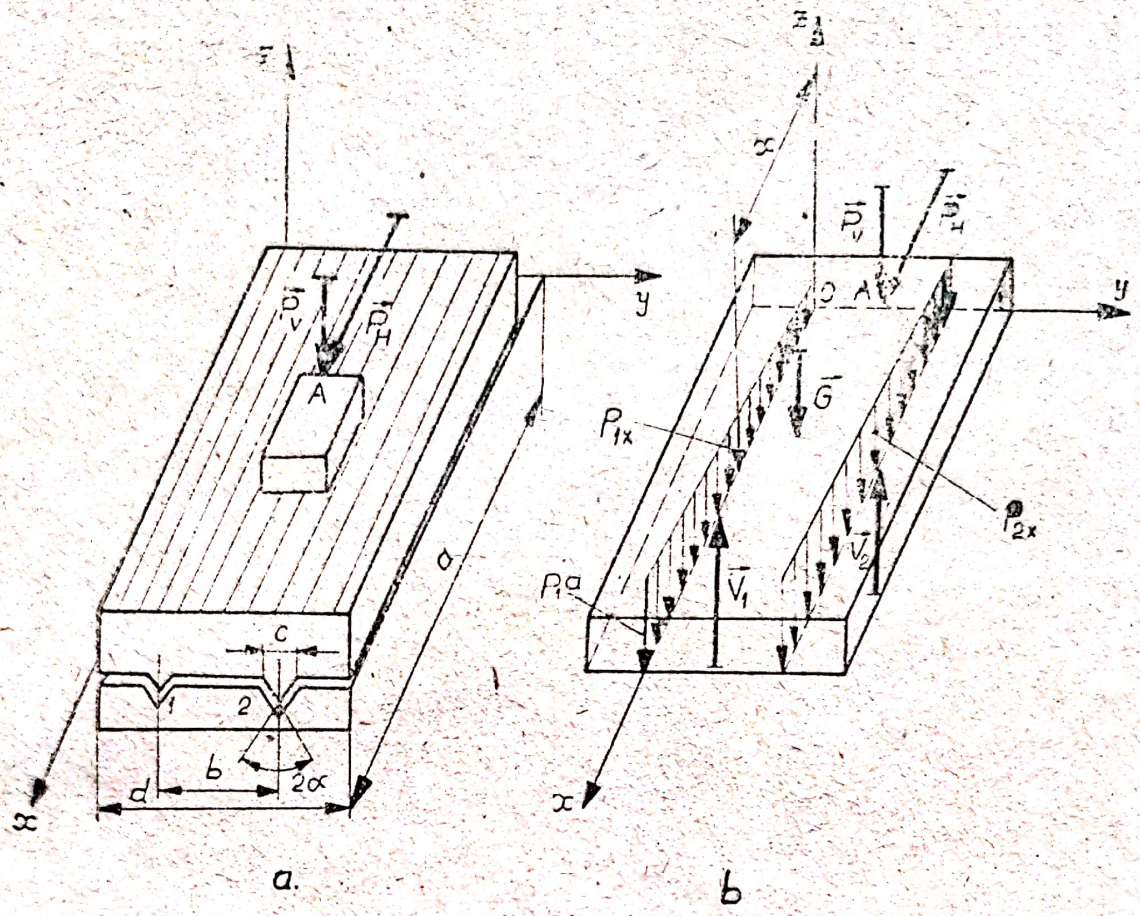


Fig. 24 a, b

Rezolvare. Notînd reacțiunile verticale din ghidaje cu V_1 și V_2, în ipoteza că reacțiunile sînt liniar repartizate (fig. 4.24, b), se pot scrie următoarele ecuații de echilibru

$$\Sigma Z_i = 0: \quad V_1 + V_2 - G - P_V = 0$$

$$\Sigma M_{xi} = 0: \quad bV_2 - \frac{b}{2} G - \frac{b}{2} P_V = 0$$

$$\Sigma M_{yi} = 0: \quad x_A P_V + z_A P_H + \frac{a}{2} G - \int_0^a P_{1x} x \, dx - \int_0^a P_{2x} x \, dx = 0.$$

Din primele două ecuații obținem:

$$V_1 = 440 \text{ daN} \text{ și } V_2 = 440 \text{ daN}.$$

Din ecuația de momente față de axa Oy deducem

$$1 \cdot 80 + 0{,}3 \cdot 200 + 1{,}5 \cdot 800 = 2 \int_0^a p_x x \, dx$$

de unde

$$\int_0^a p_x \, x dx = 670.$$

Din egalitatea $2\int_0^a p_x\,dx = V_1 + V_2$, rezultă

$$\int_0^a p_x\,dx = 440.$$

Știind că $p_x = p_0 + kx$ și că $p_0\frac{a^2}{2} + k\frac{a^3}{3} = 670$, se obține sistemul

$$3p_0 + 4{,}5k = 440$$
$$4{,}5p_0 + 9k + 670$$

Rezolvîndu-l, se obține:

$$p_0 = 140 \text{ daNm și } k = 4{,}4 \text{ daN/m}^2.$$

Urmărind legea

$$p_x = p_0 + kx,$$

se deduce $p_a = 153$ daN/m.

Forța de frecare din ghidaje va fi deci

$$T = 2\int_0^a p_x\mu\,dx = \frac{2\mu}{\sin\alpha}\cdot\int_0^a (140 + 4{,}4x)\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 0{,}12}{\sin 60^\circ}(140\cdot 3 + 4{,}4\cdot 4{,}5) = 122 \text{ daN}.$$

4.25. O greutate G este fixată pe o scîndură, care se găsește în contact cu două role de raze r, în punctele A și B. Să se determine forța F necesară pentru a deplasa sistemul în sensul forței F, pe planul înclinat cu unghiul α față de orizontală, dacă se cunosc: greutatea G, greutățile rolelor G_1, coeficienții de frecare de rostogolire s_1 și s_2.

Rezolvare. Descompunem sistemul și efectuăm echilibrul scîndurii (benzii transportoare) (fig. 4.25,b)

$$\Sigma X_i = 0: \quad F - G\sin\alpha - T_1 - T_2 = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_A + N_B - G\cos\alpha = 0.$$

Ecuațiile de echilibru ale celor două role sînt respectiv (fig. 4.25, *c*)

$$\Sigma M_{A_1} = 0: \quad rG_1\sin\alpha + s_2G_1\cos\alpha - 2rT_1 + (s_1 + s_2)N_A = 0$$
$$\Sigma M_{B_1} = 0: \quad rG_1\sin\alpha + s_2G_1\cos\alpha - 2rT_2 + (s_1 + s_2)N_B = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, rezultă în urma efectuării calculelor:

$$F = G\left(\sin\alpha + \frac{s_1 + s_2}{2r}\cos\alpha\right) + G_1\left(\sin\alpha + \frac{s_2}{r}\cos\alpha\right).$$

Pentru $\alpha = 0$, expresia forței F capătă forma:

$$F = \frac{s_1 + s_2}{2r}G + \frac{s_2}{r}G_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

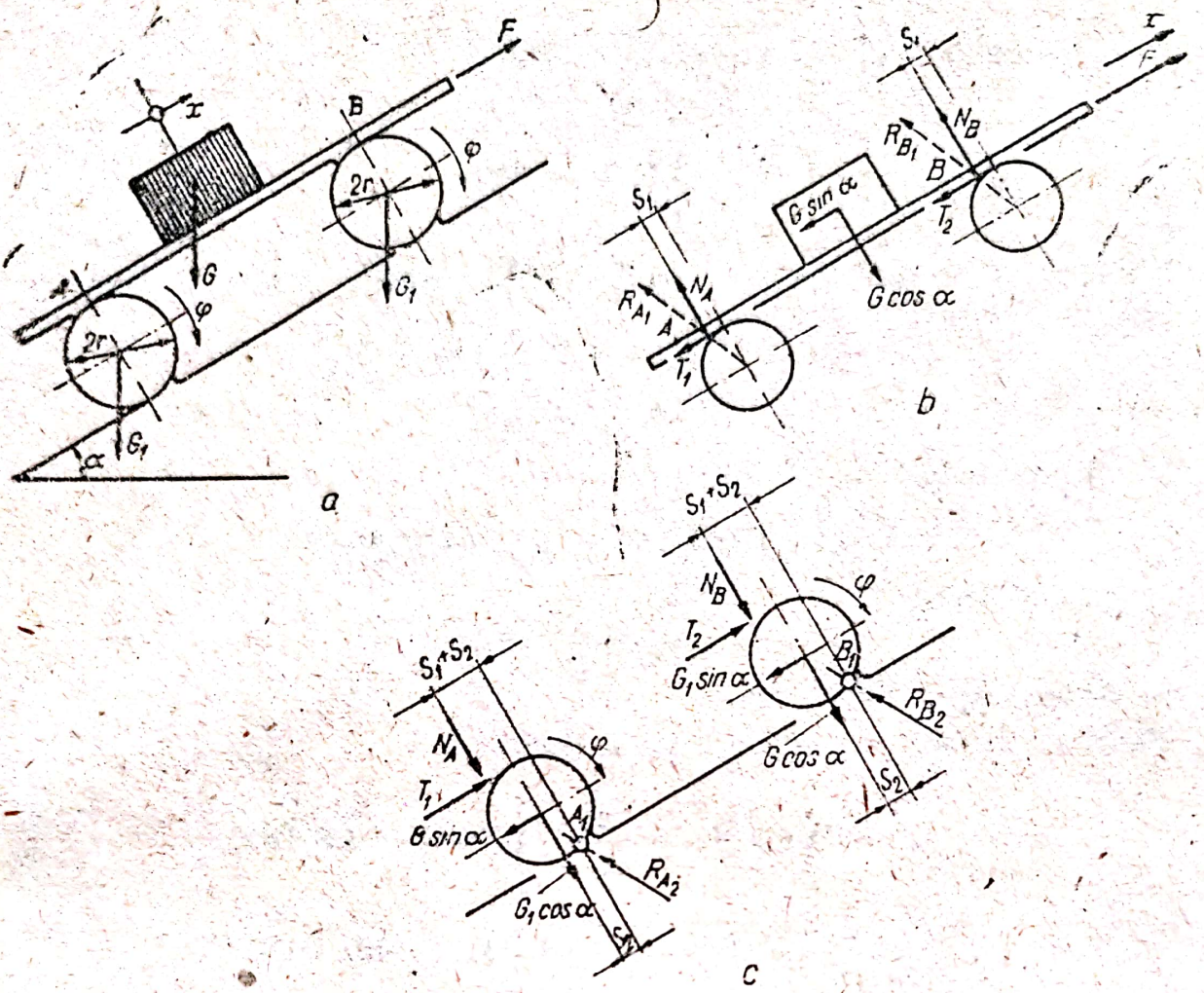


Fig. 4.25 a, b, c

4.26. Se consideră un mecanism patrulater, prezentat în figura 4.26. Asupra elementelor OA și BC, acționează momentele M_a și M_r; cunoscînd dimensiunile tuturor elementelor mecanismului, precum și valoarea unghiului φ, care determină poziția mecanismului patrulater se cere să se stabilească relația dintre momentele M_a și M_r, pentru ca mecanismul patrulater să se găsească în echilibru (fig. 4.26, a).

Rezolvare. Bara AB fiind o bară neîncărcată, secționăm bara și o substituim cu tensiunea S pe direcția barei, ca în fig. 4.26, b.

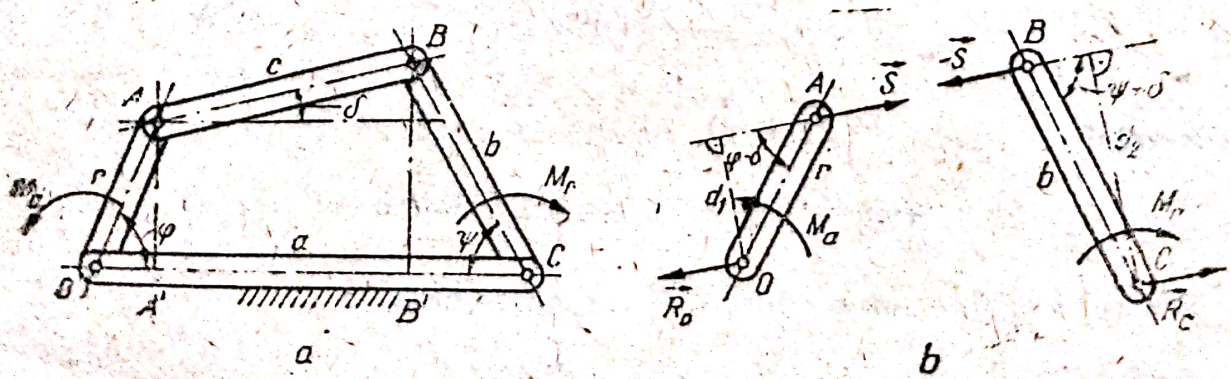


Fig. 4.26

Scriind ecuațiile de momente în raport cu punctele O respectiv C rezultă

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \quad M_a - d_1 S = M_a - rS \sin(\varphi - \delta) = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad -M_r + d_2 S = bS \sin(\psi + \delta) - M_r = 0. \tag{2}$$

Eliminăm S între relațiile (1) și (2) și avem

$$M_a = \frac{r \sin(\varphi + \delta)}{b \sin(\psi - \delta)} M_r. \tag{3}$$

Determinăm unghiurile ψ și δ, observînd că

$$OC = a = OA' + A'B' + B'C = r\cos\varphi + l\cos\delta + b\cos\psi$$

$$BB' = r\sin\varphi + l\sin\delta = b\sin\psi.$$

Se obține

$$l\cos\delta + b\cos\psi = a - r\cos\varphi \tag{4}$$

$$-l\sin\delta + b\sin\psi = r\sin\varphi. \tag{5}$$

Grupînd termenii convenabil, ridicînd ecuațiile la pătrat și însumîndu-le, vor rezulta ecuații care conțin o singură necunoscută:

$$2br\sin\varphi\sin\psi + 2b(a - r\cos\varphi)\cos\psi = -l^2 - 2ar\cos\varphi + a^2 + b^2 + r^2$$

$$2lr\sin\varphi\sin\delta - 2a(a - r\cos\varphi)\cos\delta = -l^2 + b^2 - a^2 - r^2 + 2ar\cos\varphi$$

care sînt de forma $A\sin x + B\cos x = C$, cu soluțiile

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B + C}.$$

Unghiurile ψ și δ se determină luînd semnul plus în fața radicalului:

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{2br\sin\varphi + \sqrt{4b^2r^2\sin^2\varphi + 4b^2(a - r\cos\varphi)^2 - (-l^2 - 2ar\cos\varphi + a^2 + b^2 + r^2)^2}}{2b(a - r\cos\varphi) - l^2 - 2ar\cos\varphi + a^2 + b^2 + r^2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{2ar\sin\varphi + \sqrt{4l^2r^2\sin^2\varphi + 4a^2(a - r\cos\varphi)^2 - (-l^2 - a^2 + b^2 + 2ar\cos\varphi)^2}}{-2a(a - r\cos\varphi) - l^2 + b^2 - a^2 - r^2 + 2ar\cos\varphi}.$$

4.27. În construcția transmisiilor autovehiculelor, se utilizează, pentru schimbarea vitezelor, cutii de viteze. Pentru cutia de viteze mecanică din fig. 4.27, a, se cere să se determine reacțiunile din lagărele cutiei de viteze (reacțiuni necesare la calculul de rezistență al arborilor și la alegerea rulmenților).

Rezolvare. Determinăm mai întîi reacțiunile din lagărele axului secundar al cutiei de viteze, care posedă o roată dințată cu dinți înclinați (fig. 4.27, b). Forța normală pe dinți **N** se descompune în componenta tangențială **P**, în componenta axială **Q** și într-o componentă radială **R**. Momentul motor se notează cu M, iar raza primitivă a roții cu R_0; vom afecta indicele s momentului și forțelor ce revin axului secundar. Vor rezulta:

$$P_s = \frac{M_s}{R_0}; \quad Q_s = P_s \operatorname{tg}\gamma = \frac{M_s}{R_0}\operatorname{tg}\gamma; \quad R_s = P_s \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma}.$$

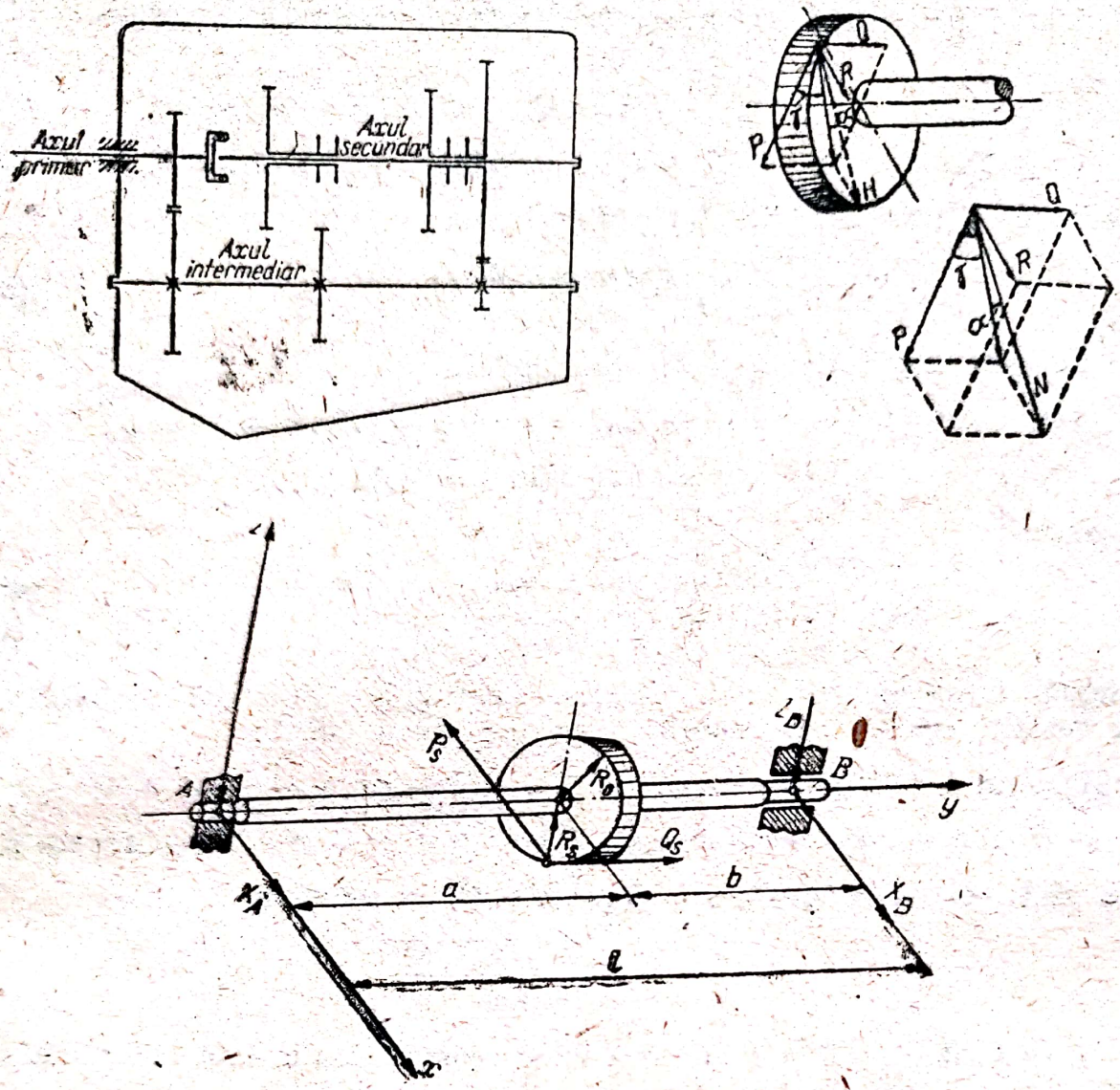


Fig. 4.27 a, b, c

Considerăm axul secundar, asupra căruia acţionează forţele **P**, **Q** şi **R** (fig. 4.27, c); ecuaţiile de echilibru se scriu

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A - P_s + X_B = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad Q_s - Y_B = 0$$
$$\Sigma Z_i = 0: \quad -Z_A + R_s - Z_B = 0$$
$$\Sigma M_x = 0; \quad aR_s + R_0 Q_s - LZ_B = 0$$
$$\Sigma M_y = 0: \quad +M_s + R_0 P_s = 0$$
$$\Sigma M_z = 0; \quad LX_B - aP_s = 0$$

Din acest sistem de ecuaţii, rezultă

$$X_B = \frac{aP_s}{L}; \quad Z_B = \frac{aR_s + R_0 Q}{L}; \quad X_A = P_s - X_B = \frac{bP_s}{L}$$

$$Z_A = R_s - Z_B = \frac{bR_s - R_0 Q_s}{L}.$$

Se obține

$$X_A = \frac{bP_s}{L}\,;\quad Z_A = \frac{b}{L}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma}P_s - \frac{R_0}{L}P_s\operatorname{tg}\gamma = \frac{P_s}{L}\left(b\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma} - R_0\operatorname{tg}\gamma\right)$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = \frac{P_s}{L}\sqrt{b^2 + \left(b\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma} - R_0\operatorname{tg}\gamma\right)^2}\,.$$

Componentele reacțiunii din B sînt respectiv

$$X_B = \frac{aP_s}{L}\,;\quad Z_B = \frac{a}{L}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma}P_s + \frac{R_0}{L}P_s\operatorname{tg}\gamma = \frac{P_s}{L}\left(a\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma} + R_0\operatorname{tg}\gamma\right)$$

iar reacțiunea totală

$$R_B = \frac{P_s}{L}\sqrt{a^2 + \left(a\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma} + R_0\operatorname{tg}\gamma\right)^2}\,.$$

În concluzie, reacțiunile din lagărele axului secundar au expresiile:

$$R_A = \frac{M_s}{R_0 L}\sqrt{b^2 + \left(b\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma} + R_0\operatorname{tg}\gamma\right)^2}$$

$$R_B = \frac{M_s}{R_0 L}\sqrt{a^2 + \left(a\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma} + R_0\operatorname{tg}\gamma\right)^2}\,.$$

Considerînd arborele secundar sub acțiunea forțelor aferente (fig. 4.27, d), se pot scrie următoarele ecuații de echilibru:

$$\Sigma X_i = 0:\quad -X_A + X_C + P_p - X_D = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0:\quad Y_D - Q_p = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0:\quad Z_A + R_p - Z_c + Z_D = 0$$

$$\Sigma M_x = 0:\quad -R_{0p}Q_p - gZ_C + (g+h)R_p + (g+k)Z_A = 0$$

$$\Sigma M_y = 0:\quad M_p - R_{0p}P_p = 0$$

$$\Sigma M_z = 0:\quad (g+k)X_A - gX_C - (g+h)P_p = 0.$$

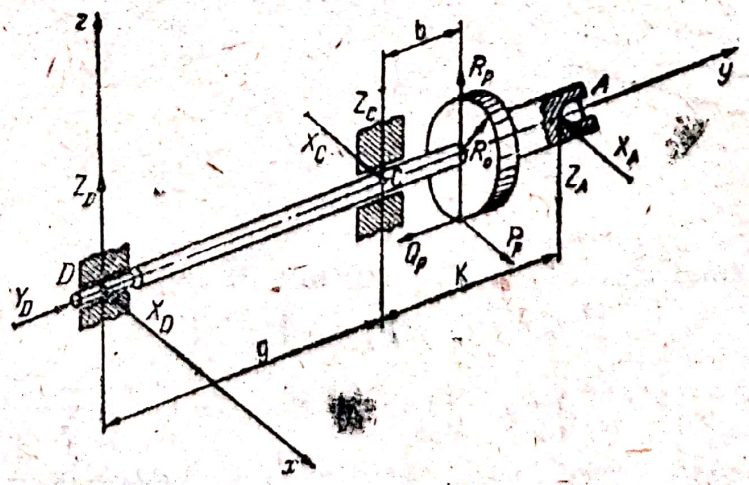


Fig. 4.27 d

Rezolvînd sistemul de ecuaţii, se obţine

$$Y = Q_p,$$

$$X_C = \frac{g+k}{g} X_A - \frac{g+h}{g} P_p = \left(1+\frac{k}{g}\right)\frac{b \cdot P_s}{L} - \left(1+\frac{h}{g}\right) P_p,$$

$$Z_C = \frac{g+h}{g} \cdot \frac{bP_s - R_0 Q_s}{L} - \frac{R_0 P Q_p}{g}$$

Reacţiunile totale din lagărele arborelui secundar vor fi deci

$$R_C = \sqrt{\left[\frac{P_s b}{L}\left(1+\frac{k}{g}\right) - \left(1+\frac{h}{g}\right)P_p\right]^2 + \left(\frac{g+h}{g} P_p + \frac{g+k}{g} \cdot \frac{bP_s - R_0 Q_s}{L} - \frac{R_0 P Q_s}{g}\right)^2}$$

$$R_D = \sqrt{\left(\frac{bP_s}{L}\frac{k}{g} - \frac{h}{g} P_p\right)^2 + \left(\frac{h}{g} R_p - \frac{R_0 p Q_p}{g} + \frac{k}{g}\frac{bR_s - R_0 Q_s}{L}\right)^2}.$$

Determinăm reacţiunile din lagărele arborelui intermediar (fig. 4.27, e). Ecuaţiile de echilibru sînt respectiv

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_E - P_p + P_s - X_N = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_E + Q_p - Q_s = 0$$
$$\Sigma Z_i = 0: \quad Z_E - R_p - R_s + Z_N = 0$$
$$\Sigma M_x = 0: \quad -cR_p - eR_s + fZ_N - RQ_p + rQ_s = 0$$
$$\Sigma M_y = 0: \quad M - RP_p + rP_s = 0$$
$$\Sigma M_z = 0: \quad cP_p - eP_s + fX_N = 0.$$

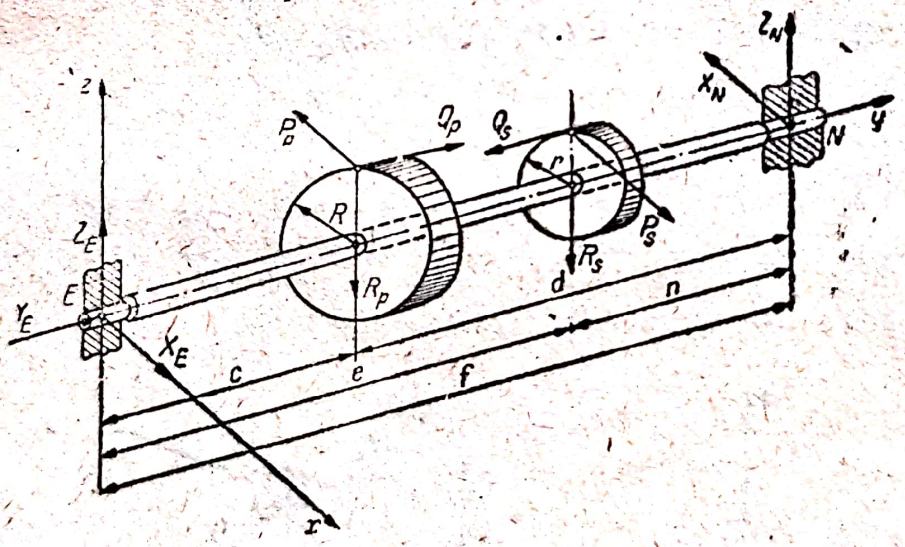


Fig. 4.27 e

Rezolvînd sistemul de ecuaţii de mai sus, se obţine

$$M = RP_p - rP_s$$

$$X_E = \left(1-\frac{c}{f}\right)P_p - \left(1-\frac{e}{f}\right)P_s; \quad X_N = \frac{eP_s - cP_p}{f}$$

$$Z_N = \frac{-cR_p + eR_s + RQ_p - rQ_s}{f}; \quad Z_E = \frac{(f-e)R_p - RQ_p - rQ_s + (f-e)R_s}{f}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă:

$$Z_E = \frac{dR_p + nR_s - RQ_p + rQ_s}{f}.$$

Reacţiunile totale din E şi N sînt respectiv

$$R_E = \frac{1}{f}\sqrt{(dP_p - nP_s)^2 + (dR_p + nR_s - RQ_p + rQ_s)^2}$$

$$R_N = \frac{1}{f}\sqrt{(eP_s - cP_p)^2 + (cR_p + eR_s + RQ_p - rQ_s)^2}.$$

Dacă se ţine seama că $P_s = i_k P_p$, unde i_k este raportul de transmitere, iar

$$Q_p = P_p \operatorname{tg}\gamma_p; \quad R_p = P_p \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma_p}; \quad Q_s = P_s \operatorname{tg}\gamma_s; \quad R_s = P_s \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma_s}$$

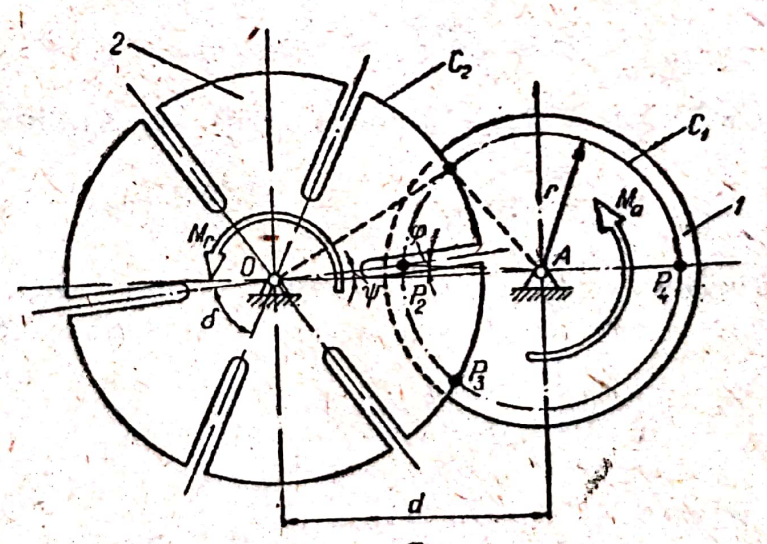
se obţine

$$R_E = \frac{P_p}{f}\sqrt{(d - ni_k)^2 + \left(d\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma_p} + ni_k\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma_s} - R\operatorname{tg}\gamma_p + ri_k\operatorname{tg}\gamma_s\right)^2},$$

$$R_B = \frac{P_p}{f}\sqrt{(ei_k - c)^2 + \left(c\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma_p} + ei_k\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma_s} + R\operatorname{tg}\gamma_p + r\operatorname{tg}\gamma_p + ri_k\operatorname{tg}\gamma_s\right)^2}.$$

4.28. Pentru transformarea mişcării de rotaţie continuă a discului 1 al mecanismului din fig. 4.28, a, într-o mişcare intermitentă a discului 2, transmiterea mişcării se face numai în timpul parcurgerii arcului $P_1P_2P_3$, de către ştiftul P, fixat pe discul 1, discul 2 fiind pus în mişcare prin intermediul acţiunii ştiftului asupra pereţilor canalului radial executat în discul 2. În timpul parcurgerii arcului $P_3P_4P_1$ discul 2 nu se roteşte.

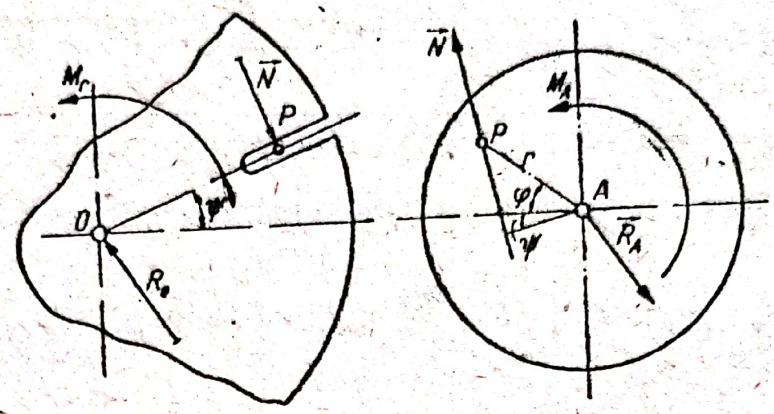
Cunoscîndu-se valorile razei r, a traiectoriei circulare a ştiftului, unghiul δ între două canale radiale şi valoarea momentului rezistent M_r, ce acţionează asupra discului 2, se cere să se stabilească formula de calcul a valorii momentului M_a ce trebuie să acţioneze asupra discului 1, pentru ca sistemul să fie în echilibru într-o poziţie determinată de unghiul φ.



a

Fig. 4.28 a

Rezolvare. Se separă cele două corpuri (fig. 4.28, b) și se înlocuiesc legăturile cu forțele de legătură corespunzătoare. Se observă că, în cazul celor două discuri, reacțiunile $\mathbf{R}_0$ și $\mathbf{R}_A$, din cele două articulații cilindrice sînt egale și de semne contrare cu forțele de reacțiune $\mathbf{N}$ ce acționează în cazul echilibrului.



b

Fig. 4.28 b

Ecuațiile de momente sînt respectiv

$$M_r - \overline{OP} \cdot N = 0$$

$$M_a - rN\cos(\varphi + \psi) = 0. \qquad (1)$$

Pentru o bună funcționare a mecanismului este necesar ca traiectoria C_1 a știftului P să fie ortogonală cu circumferința discului 2. Prin urmare, din triunghiul OP_1A deducem

$$d = \frac{r}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Din triunghiul OPA, se calculează latura $\overline{OP}$ cu ajutorul teoremei cosinusului

$$OP = \sqrt{d^2 + r^2 - 2dr\cos\varphi}.$$

Egalînd expresiile lui N din cele două relații (1), se obține

$$\frac{M_r}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr\cos\varphi}} = \frac{M_a}{r\cos(\varphi + \psi)}. \qquad (2)$$

Pentru a exprima unghiul ψ în funcție de elementele cunoscute ale problemei, vom scrie teorema sinusurilor în triunghiul OAP

$$\frac{d}{\sqrt{\sin(\varphi + \psi)}} = \frac{r}{\sin\psi} \qquad (3)$$

de unde

$$\sin\psi = \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2rd\cos\varphi}}; \quad \cos\psi = \frac{d - r\cos\varphi}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr\cos\varphi}}. \qquad (4)$$

Scanned with OKEN Scanner

Substituind expresiile (4) în (2) și efectuînd calculele, rezultă formula de calcul a momentului M_a

$$M_a = \frac{r(d\cos\varphi - r)}{d^2 + r^2 - 2dr\cos\varphi} M_r. \tag{5}$$

Înlocuind pe d cu expresia găsită mai sus, formula (5) devine

$$M_a = \frac{\left(\cos\varphi - \sin\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{\delta}{2}}{1 + \sin^2\frac{\delta}{2} - 2\sin\frac{\delta}{2}\cos\varphi} M_r. \tag{6}$$

De menționat că egalitatea (6) este valabilă numai în următorul interval de valori ale unghiului φ

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right) < \varphi < \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \tag{7}$$

corespunzător parcurgerii arcului de cerc $P_1P_2P_3$ de către știftul P.

Din prima ecuație a sistemului (1) se deduce expresia reacțiunii N

$$N = \frac{M_r}{\overline{OP}} = \frac{M_r}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr\cos\varphi}}; \tag{8}$$

reacțiunile din articulațiile O și A vor fi

$$R_0 = R_A = N$$

cu sensurlle din figură, fiind înclinate cu unghiul ψ față de verticală.

4.29. O scară este formată din treptele A și B, una rezemată pe o fundație orizontală, iar cealaltă, pe peretele vertical al casei. Treptele sînt respectiv încărcate cu greutățile **P** și **Q**. Să se determine condiția de echilibru, ținînd seama de frecările pe cele trei plane de contact, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu = \operatorname{tg}\varphi$. Greutățile treptelor se vor considera înglobate în forțele P și Q (fig. 4.29).

Rezolvare. Din ecuațiile vectoriale de echilibru a celor două trepte :

$$\mathbf{P} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2 = 0$$
$$\mathbf{Q} - \mathbf{N}_2 - \mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_3 + \mathbf{T}_3 = 0$$

unde pentru echilibru la limită

$$T_1 = \mu N_1;\ T_2 = \mu N_2;\ T_3 = \mu N_3,$$

se deduc ecuațiile scalare de echilibru :

$$\Sigma X_i = 0: \quad N_1 - N_2\sin\alpha + \mu N_2\cos\alpha = 0$$
$$N_2\sin\alpha - \mu N_3 - \mu N_2\cos\alpha = 0.$$

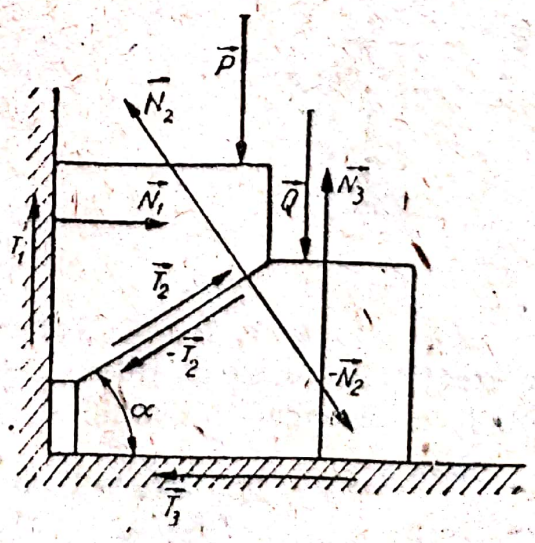


Fig. 4.29

$$\Sigma Y_i = 0: \quad \mu N_1 - P + N_2 \cos\alpha + \mu N_2 \sin\alpha = 0$$
$$N_3 - Q - N_2 \cos\alpha - \mu N_2 \sin\alpha = 0.$$

Din rezolvarea celor două sisteme de ecuaţii obţinute rezultă

$$P = \frac{2\mu \sin\alpha + (1-\mu^2)\cos\alpha}{(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha}\mu Q$$

sau

$$P = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi)}Q.$$

Condiţia de echilibru este

$$P \leqslant \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi)}Q.$$

4.30. Pentru ridicarea lingourilor într-o turnătorie, se utilizează un tip de cleşte, cum se poate vedea în fig. 4.30. Se cere să se determine coeficientul de frecare μ_0 dintre lingou şi fălcile cleştelui, pentru a avea un coeficient de siguranţă egal cu 2. Greutatea cleştelui se va neglija.

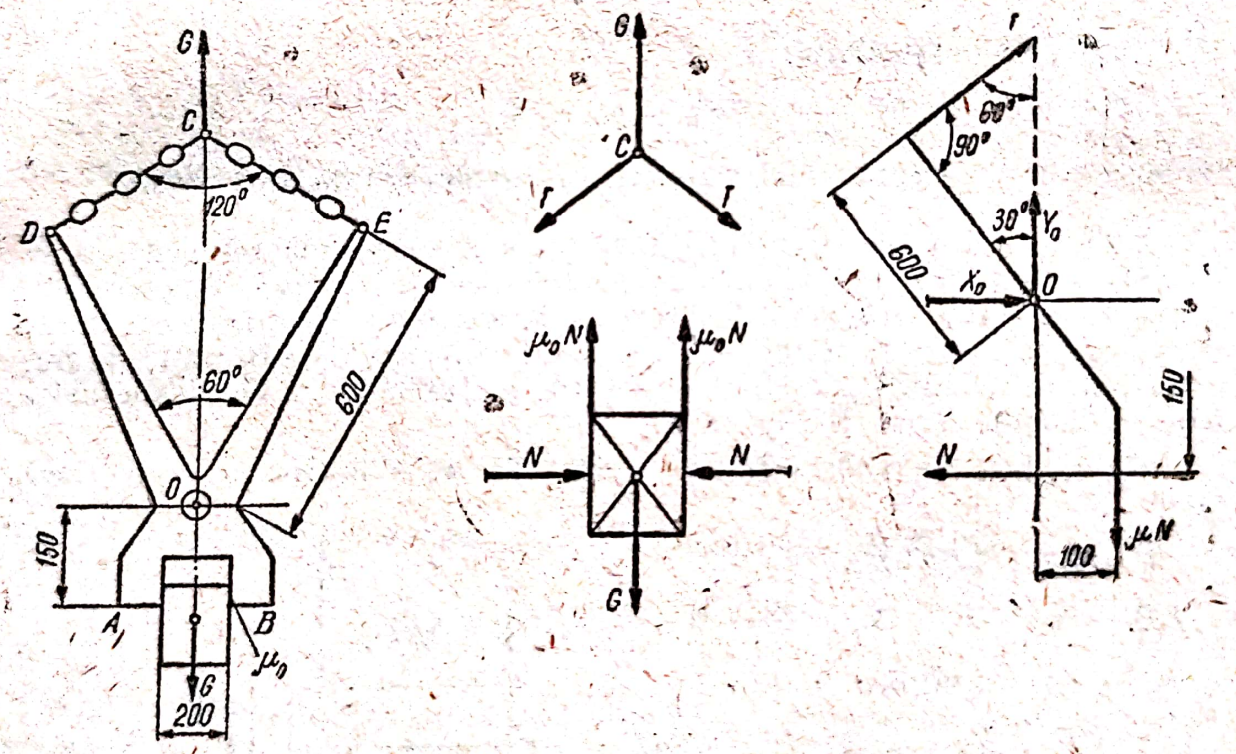


Fig. 4.30

Rezolvare. Descompunem sistemul, înlocuim legăturile mecanice cu reacţiunile corespunzătoare, reprezentăm forţele de frecare şi efectuăm echilibrul sistemului. Echilibrul nodului C se scrie

$$\Sigma Y_i = 0; \; G - 2T\cos 60° = 0.$$

Rezultă

$$T = G.$$

Ecuația de echilibru a lingoului este

$$\Sigma Y_i = 0: \quad 2\mu_0 N - G = 0,$$

de unde

$$N = \frac{G}{2\mu_0}$$

Ecuația de echilibru pentru unul din brațele cleștelui va fi

$$\Sigma M_{(0)} = 0: \quad 600\,T + 100\,\mu_0 N - 150\,N = 0,$$

sau, în urma înlocuirii lui N,

$$600\,G + 100\,\frac{G}{2\mu_0} - 150\,\frac{G}{2\mu_0} = 0$$

Simplificînd cu G, se obține

$$600 + 50 = \frac{75}{\mu_0}.$$

Rezultă:

$$\mu_0 = \frac{3}{26}.$$

Pentru a avea coeficientul de siguranță 2, mărim coeficientul de frecare de două ori. Vom lua, deci: $\mu_0 \geqslant 3/13$.

4.31. Un dispozitiv de ridicat constă din două pîrghii identice în unghi drept ACB, fixate prin articulații de traversare CC_1. Penițele superioare A și A_1 se pot roti la capetele brațelor CA, C_1A_1 și se depărtează prin pana M iar penițele inferioare care se rotesc pe axele B și B_1, strîng greutatea P, care trebuie ridicată. Cunoscînd lungimile l_1 și l_2, unghiurile α și β, precum și unghiul de frecare φ între penițele superioare și pană, să se afle coeficientul de frecare μ_1 între penițele inferioare și pereții sarcinii, astfel încît ea să poată fi ținută între penițe (fig. 4.31). Greutatea dispozitivului se neglijează.

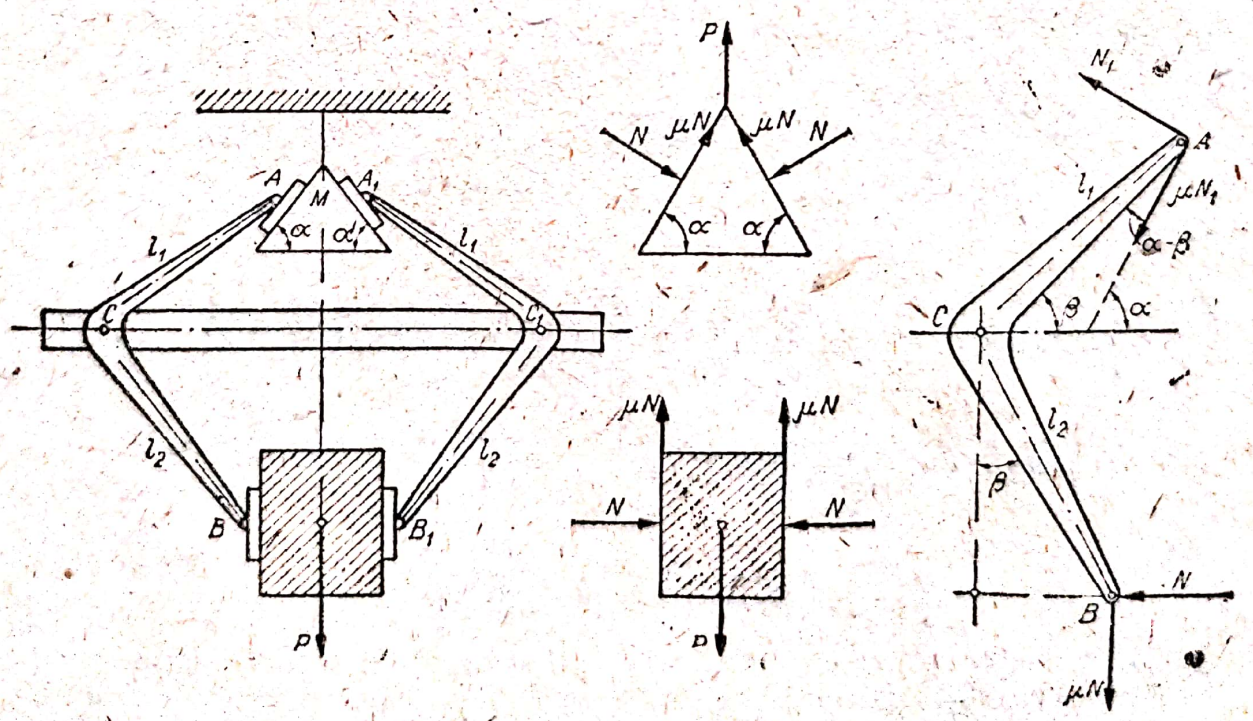


Fig. 4.31

R e z o l v a r e. Descompunem sistemul și scriem ecuațiile scalare de echilibru, ținînd seama că dispozitivul posedă simetrie mecanică și geometrică. Efectuăm echilibrul greutății P

$$\Sigma Y_i = 0: \quad 2\mu N - P = 0,$$

de unde

$$N = \frac{P}{2\mu}.$$

Echilibrul penei M se scrie

$$\Sigma Y_i = 0: \quad P + 2\mu N_1 \sin\alpha - 2N_1 \cos\alpha = 0;$$

rezultă

$$N_1 = \frac{P}{2(\cos\alpha - \mu \sin\alpha)}.$$

Ecuația de echilibru a pîrghiei ACB va fi

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad -l_2 N \cos\beta - l_2\mu_1 N \sin\beta - \mu l_1 N_1 \sin(\alpha - \beta) + \\ + l_1 N_1 \cos(\alpha - \beta) = 0$$

sau, în urma grupării termenilor,

$$l_1 N_1 [\cos(\alpha - \beta) - \mu \sin(\alpha - \beta)] = l_2 N (\cos\beta + \mu \sin\beta)$$

și încă

$$\frac{Pl_1}{2(\cos\alpha - \mu \sin\alpha)} [\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta)] = \frac{Pl_2}{2\mu_1} (\cos\beta + \mu_1 \sin\beta)$$

respectiv

$$\frac{\cos\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta + \varphi)}{\cos\varphi} = \frac{l_2 \cos\beta}{\mu_1} + l_2 \sin\beta.$$

Rezultă

$$\mu_1 = \frac{l_2 \cos\beta}{\dfrac{\cos(\alpha - \beta + \varphi)}{\cos(\alpha + \beta)} - l_2 \sin\beta} = \frac{l_2 \cos\beta}{\dfrac{\cos(\alpha - \beta)\cos\varphi - \sin(\alpha - \beta)\sin\varphi}{\cos(\alpha + \varphi)} - l_2 \sin\beta}$$

sau

$$\mu_1 = \frac{l_2 \cos\beta}{l_1 \left[\dfrac{\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi + \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi - \sin\alpha\cos\beta\sin\varphi + \cos\alpha\sin\beta\sin\varphi}{\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi}\right] - l_2 \sin\beta} =$$

$$= \frac{l_2}{l_1 \dfrac{\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi}{\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi} + l_1 \dfrac{\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi}{\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi} \operatorname{tg}\beta - l_2 \operatorname{tg}\beta} =$$

$$= \frac{l_2}{l_1 + [l_1 \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) - l_2] \operatorname{tg}\beta}.$$

4.32. Îmbinarea capului de cruce cu tija pistonului se face, la mașinile cu aburi, prin îmbinare cu pană, ca în fig. 4.32, a. Se cere să se determine relația dintre forțele P și F în condiția de echilibru a sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

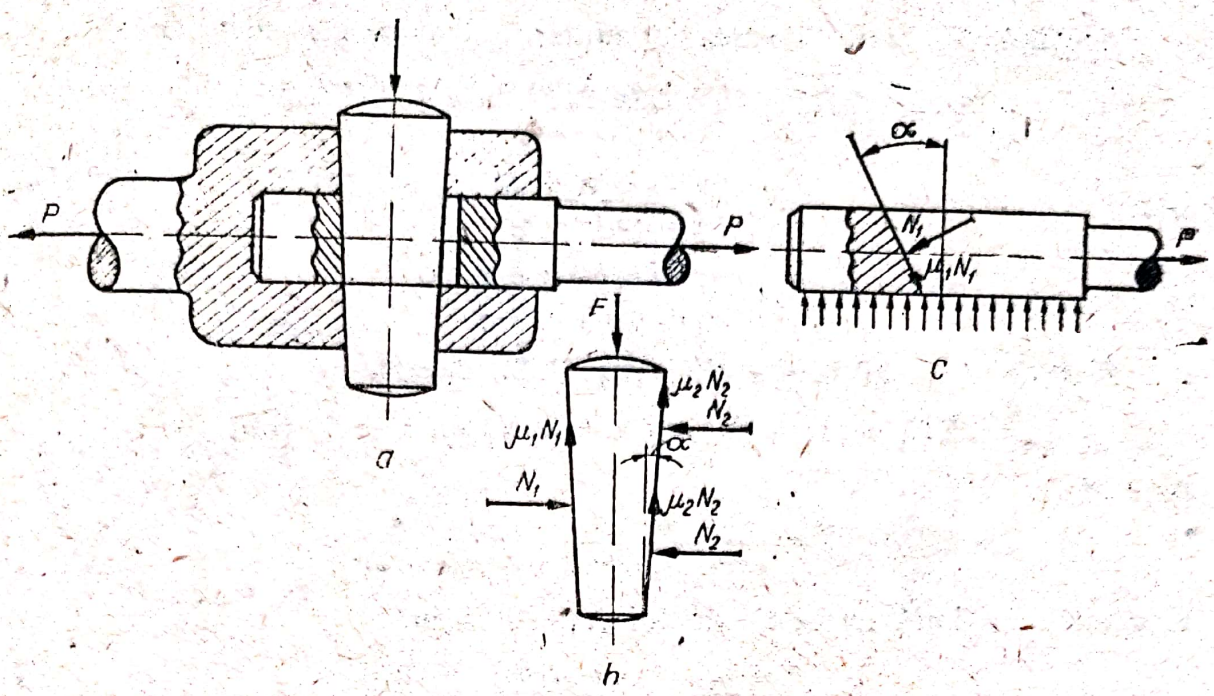


Fig. 4.32 a, b, c

Rezolvare. Descompunem sistemul și efectuăm echilibrul separat al penei și al tijei. Vom nota prin F forța ce acționează asupra penei, datorită strîngerii acesteia prin diferite sisteme și vom presupune, de asemenea, o repartiție uniformă a presiunii penei pe capul de cruce.

Ecuațiile de echilibru ale penei (fig. 4.32, b) sînt repectiv

$$\Sigma X_i = 0: \quad N_1 \cos\alpha - \mu_1 N_1 \sin\alpha + 2\mu_2 N_2 \sin\alpha - 2N_2 \cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_1 \sin\alpha + \mu_1 N_1 \cos\alpha - 2\mu_2 N_2 \cos\alpha + 2N_2 \sin\alpha - F = 0.$$

Cele două ecuații dau o legătură între reacțiunile N_1 și N_2 și forța F.

Ecuațiile se mai scriu

$$N_1(\cos\alpha - \mu_1 \sin\alpha) - 2N_2(\cos\alpha - \mu_2 \sin\alpha) = 0$$

$$N_1(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha) + 2N_2(\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha) = F.$$

Ținînd seama că $\mu_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$ și $\mu_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, rezultă

$$N_1 \frac{(\cos\alpha\cos\varphi_1 - \sin\alpha\sin\varphi_1)}{\cos\varphi_1} = 2N_2 \frac{(\cos\alpha\cos\varphi_2 - \sin\alpha\sin\varphi_2)}{\cos\varphi_2}$$

$$N_1 \frac{(\sin\alpha\cos\varphi_1 + \cos\alpha\sin\varphi_1)}{\cos\varphi_1} + 2N_2 \frac{(\sin\alpha\cos\varphi_2 + \cos\alpha\sin\varphi_2)}{\cos\varphi_2} = F$$

sau

$$N_1 \frac{\cos(\alpha+\varphi_1)}{\cos\varphi_1} = 2N_2 \frac{\cos(\alpha+\varphi_2)}{\cos\varphi_2}; \quad N_2 = \frac{N_1}{N_2} \frac{\cos(\alpha+\varphi_1)}{\cos(\alpha+\varphi_2)} \cdot \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}$$

$$N_1 \frac{\sin(\alpha+\varphi_1)}{\cos\varphi_1} + N_1 \frac{\cos(\alpha+\varphi_1)}{\cos(\alpha+\varphi_2)} \cdot \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1} \cdot \frac{\sin(\alpha+\varphi_2)}{\cos\varphi_2} = F.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scoţînd N_1 factor comun şi aducînd la acelaşi numitor, avem

$$\frac{N_1}{\cos\varphi_1}\,\frac{\sin(\alpha+\varphi_1)\cos(\alpha+\varphi_2)+\cos(\alpha+\varphi_1)\sin(\alpha+\varphi_2)}{\cos(\alpha+\varphi_2)}=F$$

sau

$$N_1\,\frac{\sin(2\alpha+\varphi_1+\varphi_2)}{\cos\varphi_1\cos(\alpha+\varphi_2)}=F$$

şi

$$N_1=\frac{\cos\varphi_1\cos(\alpha+\varphi_2)}{\sin(2\alpha+\varphi_1+\varphi_2)}F.$$

Ecuaţia de echilibru a tijei (fig. 4.32, c) este

$$\Sigma X_i=0:\ -N_1\cos\alpha+\mu_1N_1\sin\alpha+P=0,$$

de unde

$$N_1=\frac{P}{\cos\alpha-\mu_1\sin\alpha}=\frac{P\cos\varphi_1}{\cos(\alpha+\varphi_1)}.$$

Egalînd cele două expresii ale lui N_1, se obţine

$$\frac{P\cos\varphi_1}{\cos(\alpha+\varphi_1)}=\frac{\cos\varphi_1\cos(\alpha+\varphi_2)}{\sin(2\alpha+\varphi_1+\varphi_2)}F.$$

În urma simplificării, rezultă

$$F=\frac{P\sin(2\alpha+\varphi_1+\varphi_2)}{\cos(\alpha+\varphi_1)\cos(\alpha+\varphi_2)}.$$

În cazurile particulare în care: $\mu_1=\mu_2=\mu$, $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$, rezultă

$$F=2P\,\mathrm{tg}(\alpha+\varphi).$$

4.33. Se consideră un mecanism cu camă şi tachet în formă de călcîi plat cu raza $r_t=6$ mm. Raza cercului de bază este $r_0=20$ mm. Piciorul camei are raza $O'B=R=80$ mm. Asupra tachetului lucrează axial forţa $Q=40$ daN. Coeficientul de frecare în ghidaj este $\mu_1=0{,}06$. Coeficientul de frecare între camă şi tachet este $\mu=0{,}07$. Unghiul $\alpha=30°$, lăţimea ghidajului este de 60 mm, iar cota $a=100$ mm. Să se determine reacţiunile din ghidaj şi dintre camă şi tachet (fig. 4.33).

Rezolvare. Calculăm mai întîi distanţele

$$\overline{OO'}=\overline{O'B}-\overline{OB}=80-20=60\text{ mm}$$

$$\overline{O'A}=\overline{O'B}+r_t=80+6=86\text{ mm}.$$

Aplicînd teorema sinusurilor în $\Delta OO'A$, se obţine

$$\frac{\overline{O'A}}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{\overline{OO'}}{\sin\beta}$$

de unde

$$\sin\beta=\frac{\overline{OO'}}{\overline{O'A}}\sin(\pi-\alpha)=\frac{60}{86}\sin150°=0{,}349\Rightarrow\beta=20°27'.$$

Determinăm unghiul de frecare

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\mu=0{,}07\Rightarrow\varphi=4°;\ \beta+\varphi=24°27'$$

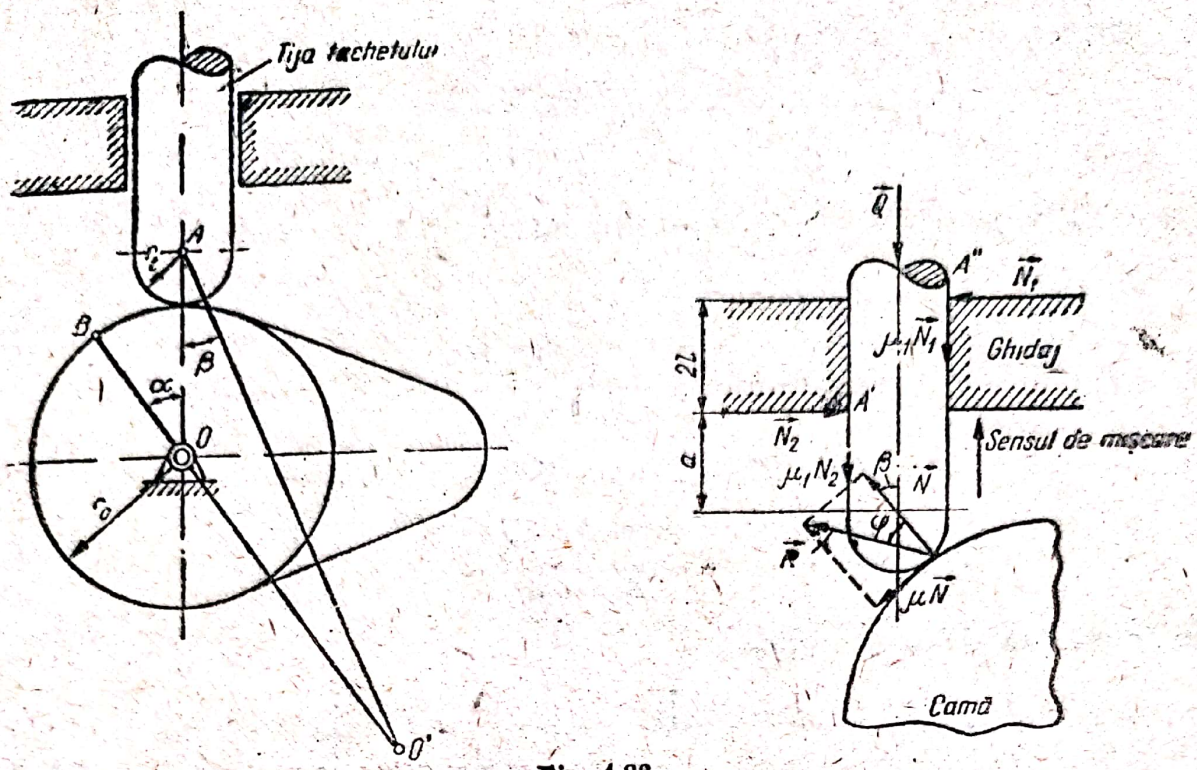


Fig. 4.33

Din figură se vede că : $R = \frac{N}{\cos\varphi}$. Ecuația de proiecții pe verticală se scrie

$$\Sigma Y_i = 0: \quad \frac{N}{\cos\varphi}\cos(\beta+\varphi) - Q - \mu_1 N_1 - \mu_1 N_2 = 0. \tag{1}$$

Ecuațiile de momente în raport cu punctele A' și A'' ne dau

$$a\frac{N}{\cos\varphi}\sin(\beta+\varphi) - 2lN_1 + r_t Q + 2r_t\mu_1 N_1 - r_t\frac{N}{\cos\varphi}\cos(\beta+\varphi) = 0 \tag{2}$$

$$(a+2l)\frac{N}{\cos\varphi}\sin(\beta+\varphi) - 2lN_2 - 2r_t\mu_1 N_2 - r_2 Q + r_t\frac{N}{\cos\varphi}\cos(\beta+\varphi) = 0 \tag{3}$$

unde s-a considerat punctul de aplicație al reacțiunii R în centrul de curbură al suprafeței de contact a tachetului cu cama.

Din ecuațiile de momente se deduc

$$N_1 = \frac{r_t Q + \frac{N}{\cos\varphi}\left[a\sin(\beta+\varphi) - r_t\cos(\beta+\varphi)\right]}{2(l-\mu_1 r_t)}$$

$$N_2 = \frac{\frac{N}{\cos\varphi}\left[(a+2l)\sin(\beta+\varphi) + r_t\cos(\beta+\varphi)\right] - r_t Q}{2(l+\mu_1 r_t)}.$$

Substituind valorile lui N_1 și N_2 în ecuația (1), se obține

$$\frac{N}{\cos\varphi}\cos(\beta+\varphi) = Q + \mu_1\frac{\frac{N}{\cos\varphi}\left[a\sin(\beta+\varphi) - r_t\cos(\beta+\varphi)\right]}{2(l+\mu_1 r_t)} +$$

$$+ \mu_1\frac{\frac{N}{\cos\varphi}\left[(a+2l)\sin(\beta+\varphi) + r_t\cos(\beta+\varphi)\right]}{2(l+\mu_1 r_t)}.$$

Rezultă

$$N = \frac{1}{\frac{\cos(\beta+\varphi)}{\cos\varphi} - \frac{\sin(\beta+\varphi)}{\cos\varphi}\left(1+\frac{a}{l}-\mu_1\frac{r_t}{l}\right)} \cdot Q.$$

Înlocuind valoarea lui N în expresiile lui N_1 și N_2, se obține

$$N_1 = \frac{\frac{1}{\frac{\cos(\beta+\varphi)}{\cos\varphi} - \mu_1\frac{\sin(\beta+\varphi)}{\cos\varphi}\left(1+\frac{a}{l}-\mu_1\frac{r_t}{l}\right)}[a\sin(\beta+\varphi) - r_t\cos(\beta+\varphi)]Q + r_tQ}{2(l-\mu_1 r_t)}$$

$$N_2 = \frac{[(a+2l)\sin(\beta+\varphi) - r_t\cos(\beta+\varphi)]Q - r_tQ}{\cos(\beta+\varphi) - \mu_1\sin(\beta+\varphi)\left(1+\frac{a}{l}-\frac{\mu_1 r_t}{l}\right)} : \frac{}{2(l+\mu_1 r_t)};$$

efectuînd calculele, se obține

$$N_1 = \frac{\sin(\beta+\varphi)\left[a-\mu_1 r_t\left(1+\frac{a}{l}-\frac{\mu_1 r_t}{l}\right)\right]Q}{\left[\cos(\beta+\varphi)-\mu_1\sin(\beta+\varphi)\left(1+\frac{a}{l}-\frac{\mu_1 r_t}{l}\right)\right](1-\mu_1 r_t)}$$

$$N_2 = \frac{\sin(\beta+\varphi)\left[(a+2l)+\mu_1 r_t\left(1+\frac{a}{l}-\frac{\mu_1 r_t}{l}\right)\right] - 2r_t\cos(\beta+\varphi)}{2\left[\cos(\beta+\varphi)-\mu_1\sin(\beta-\varphi)\left(1+\frac{a}{l}-\frac{\mu_1 r_t}{l}\right)\right](l+\mu_1 r_t)} Q.$$

Neglijînd frecarea dintre camă și tachet, adică considerînd $\mu = 0$, se obține

$$N = \frac{1}{\cos\beta - \mu_1\sin\beta\left(1+\frac{a}{l}-\frac{\mu_1 r_t}{l}\right)} \cdot Q.$$

$$N_1 = \frac{\sin\beta\left[a-\mu_1 r_t\left(1+\frac{a}{l}-\frac{\mu_1 r_t}{l}\right)\right]\cdot Q}{2\left[\cos\beta-\mu_1\sin\beta\left(1+\frac{a}{l}-\frac{\mu_1 r_t}{l}\right)\right](l-\mu_1 r_t)}$$

$$N_2 = \frac{\sin\beta\left[a+2l+u_1 r_t\left(1+\frac{a}{l}-\frac{\mu_1 r_t}{l}\right)\right] - 2r_t\cos\beta}{2\left[\cos\beta-\mu_1\sin\beta\left(1+\frac{a}{l}-\frac{\mu_1 r_t}{l}\right)\right](l+\mu_1 r_t)} Q.$$

Ținînd seama de toate frecările și substituind valorile numerice date, se obține:

$$N = 49{,}5\ \text{daN};\quad N_1 = 35{,}2\ \text{daN}\ \text{și}\ N_2 = 44{,}8\ \text{daN}.$$

4.34. Pentru frînarea unei șaibe (roți) în mișcare de rotație, se utilizează o frînă cu doi saboți, ca în figura 4.34, a. Bara CD este articulată în punctul C de sabotul stîng și în punctul D de capătul unei pîrghii în

Scanned with OKEN Scanner

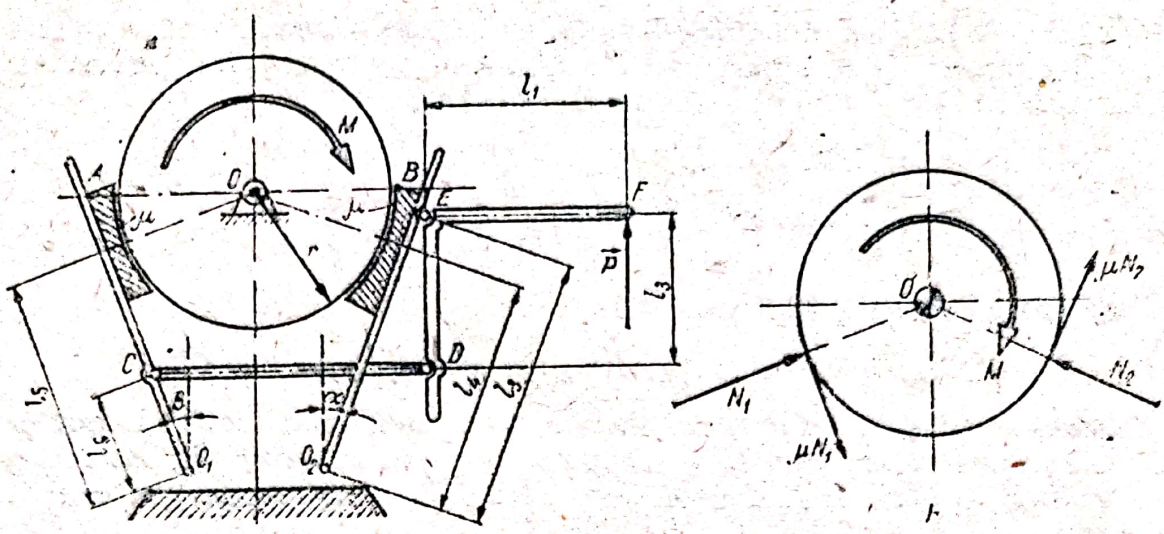


Fig. 34 a, b

unghi drept. Cunoscînd raza șaibei r, lungimile l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 și l_6 și unghiurile α și β, precum și coeficientul de frecare μ între sabot și șaibă, să se determine momentul M de frînare al șaibei.

Rezolvare. Descompunem sistemul și efectuăm echilibrul fiecărui element în parte.

Echilibrul tamburului (fig. 4.34, b)

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \quad -M + \mu N_1 r + \mu N_2 r = 0$$

Rezultă

$$M = \mu r(N_1 + N_2).$$

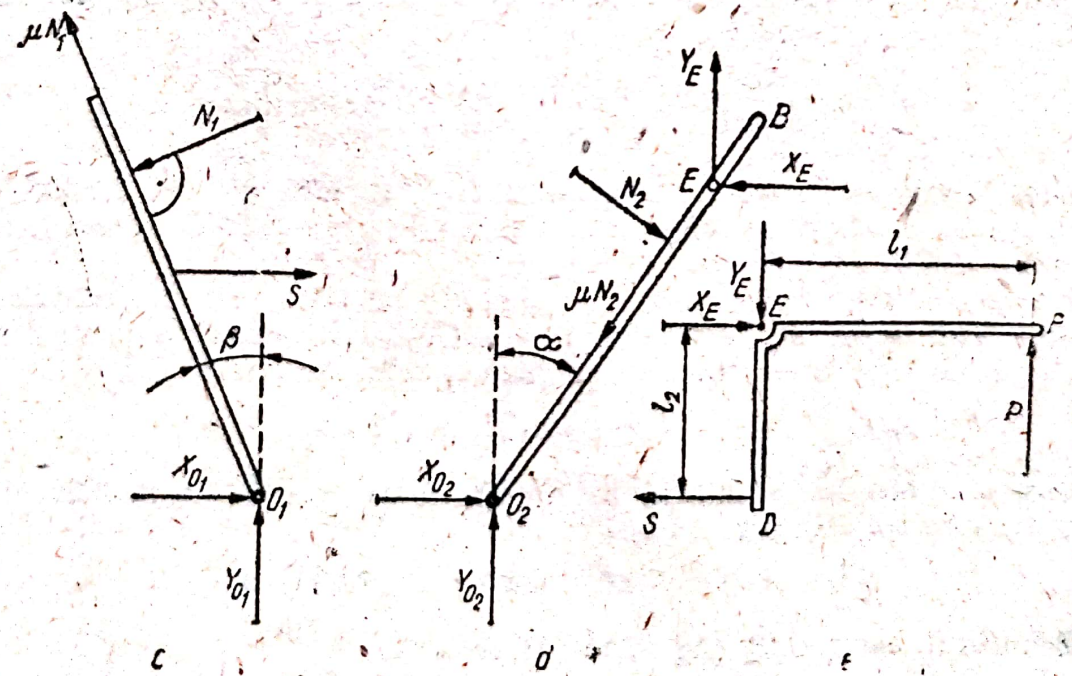


Fig. 4.34 c, d, e

Echilibrul pîrghiei AO_1 (fig. 4.34, c) se face secționînd bara neîncărcată CD și punînd pe direcția acesteia tensiunea S; avem, ținînd seama că mișcarea barei este o rotație în jurul articulației C,

$$\Sigma M_{(O_1)} = 0: \quad l_5 N_1 - l_6 S \cos \beta = 0$$

de unde

$$N_1 = \frac{l_6}{l_5} S \cos \beta.$$

Echilibrul pîrghiei O_2B (fig. 4.34, d)

$$\Sigma M_{(O_2)} = 0: \quad -l_4 N_2 + l_3 X_E \cos \alpha + l_3 Y_E \sin \alpha = 0.$$

Deoarece pîrghia DEF are o mișcare mai complexă, constînd dintr-o rotație în jurul articulației E și rotație în jurul articulației O_2, împreună cu bara O_2E, pentru echilibrul pîrghiei vom scrie următoarele trei ecuații de echilibru

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_E - S = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad -Y_E + P = 0$$
$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad l_1 P - l_2 S = 0.$$

Din ultimele trei ecuații rezultă

$$X_A = S = \frac{l_1}{l_2} P; \quad Y_E = P.$$

Substituind în ecuațiile precedente aceste valori, se obține

$$N_2 = \frac{l_1 l_3}{l_2 l_4} P \cos \alpha + \frac{l_3}{l_4} P \sin \alpha = \frac{l_3}{l_4} \left(\sin \alpha + \frac{l_1}{l_2} \cos \alpha \right) P$$

$$N_1 = \frac{l_1 l_6}{l_2 l_5} P \cos \alpha.$$

Înlocuind în expresia momentului valorile lui N_1 și N_2 de mai sus, rezultă

$$M = \mu r \left[\frac{l_3}{l_4} \left(\sin \alpha + \frac{l_1}{l_2} \cos \alpha \right) + \frac{l_1 l_6}{l_2 l_5} \cos \beta \right] P.$$

4.35. Roata acționată de momentul M (fig. 4.35, a) este frînată de către o frînă cu saboți. Se cere să se determine greutatea C necesară frînării momentului M, presupus cunoscut.

Rezolvare. Descompunem sistemul; pentru a efectua echilibrul barei O_1A (fig. 4.35, b), secționăm bara AC și o înlocuim cu o tensiune dirijată pe direcția barei, bara fiind neîncărcată. Se poate scrie

$$\Sigma M_{(O_1)} = 0: \quad -l_1 N_1 - \mu d N_1 + l_2 T \cos \alpha = 0.$$

Pentru a efectua echilibrul roții, vom scrie ecuația de momente în raport cu punctul (O) (fig. 4.35, c):

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \quad -M + \mu R N_1 + \mu R N_2 = 0.$$

Echilibrul barei O_2B (fig. 4.35, d) se scrie

$$\Sigma M_{(O_2)} = 0: \quad l_1 N_2 + \mu d N_2 + l_2 X_B = 0.$$

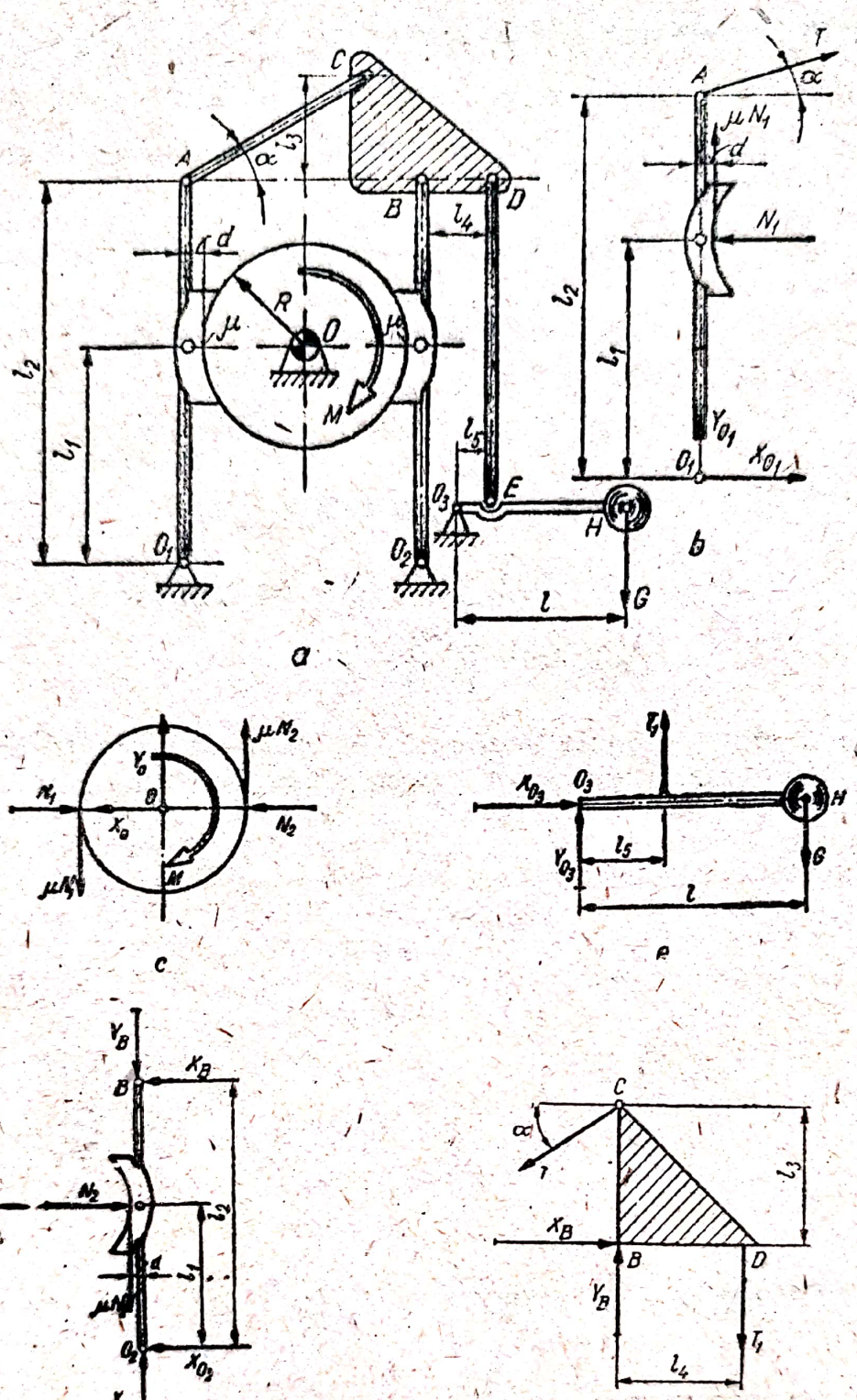


Fig. 4.35

Pentru echilibrul plăcii triunghiulare BCD este necesar să scriem toate ecuațiile de echilibru, respectiv (fig. 4.35, e)

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_B - T\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_B - T\sin\alpha - T_1 = 0$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0; \quad l_4 T_1 - l_3 T\cos\alpha = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Echilibrul pîrghiei O_3H (fig. 4.35, f)

$$\Sigma M_{(O_3)} = 0: \quad l_5 T_1 - l_6 G = 0.$$

Reunind toate ecuaţiile într-un sistem şi rezolvînd apoi sistemul obţinut, rezultă necunoscutele

$$T_1 = \frac{l_6}{l_5} G; \quad T = \frac{l_4}{l_3 \cos \alpha} \frac{l_6}{l_5} G; \quad X_B = \frac{l_6 l_4}{l_3 l_5} G;$$

$$Y_B = \frac{l_6}{l_5} G + \frac{l_6 l_4}{l_3 l_5} G \operatorname{tg} \alpha = \frac{l_6 G}{l_5}\left(1 + \frac{l_4}{l_3} \operatorname{tg} \alpha\right);$$

$$N_1 = \frac{l_6 l_2 l_4}{l_3 l_5 (\mu d + l_1)} G; \quad N_2 = \frac{l_2 l_4 l_6 X_B}{(\mu d - l_1) l_3 l_5} G.$$

Relaţia dintre momentul M şi greutatea G este

$$M = \mu l_4 l_2 l_6 R\left[\frac{1}{l_3 l_5}\left(\frac{1}{\mu d + l_1} + \frac{1}{\mu d - l_1}\right)\right] G$$

sau

$$G = \frac{l_3 l_5 (\mu^2 d^2 - l_1^2)}{l_6 l_2 l_4 \mu^2 d \cdot R} M.$$

4.36. În întreprinderile industriale se utilizează dispozitive de prindere şi ridicare, de tipul celor prezentate în fig. 4.36, a, compuse din elementele ABC, DEF, BE, AI, DI şi IJ, avînd dimensiunile indicate pe desen. Dacă elementul IJ este solicitat de o forţă verticală **P**, se cere să se determine valoarea minimă necesară a coeficientului de fercare μ dintre suprafaţa piesei şi capetele C şi F ale celor două elemente care strîng piesa de greutate G, pentru ca ridicarea să fie posibilă. Se consideră

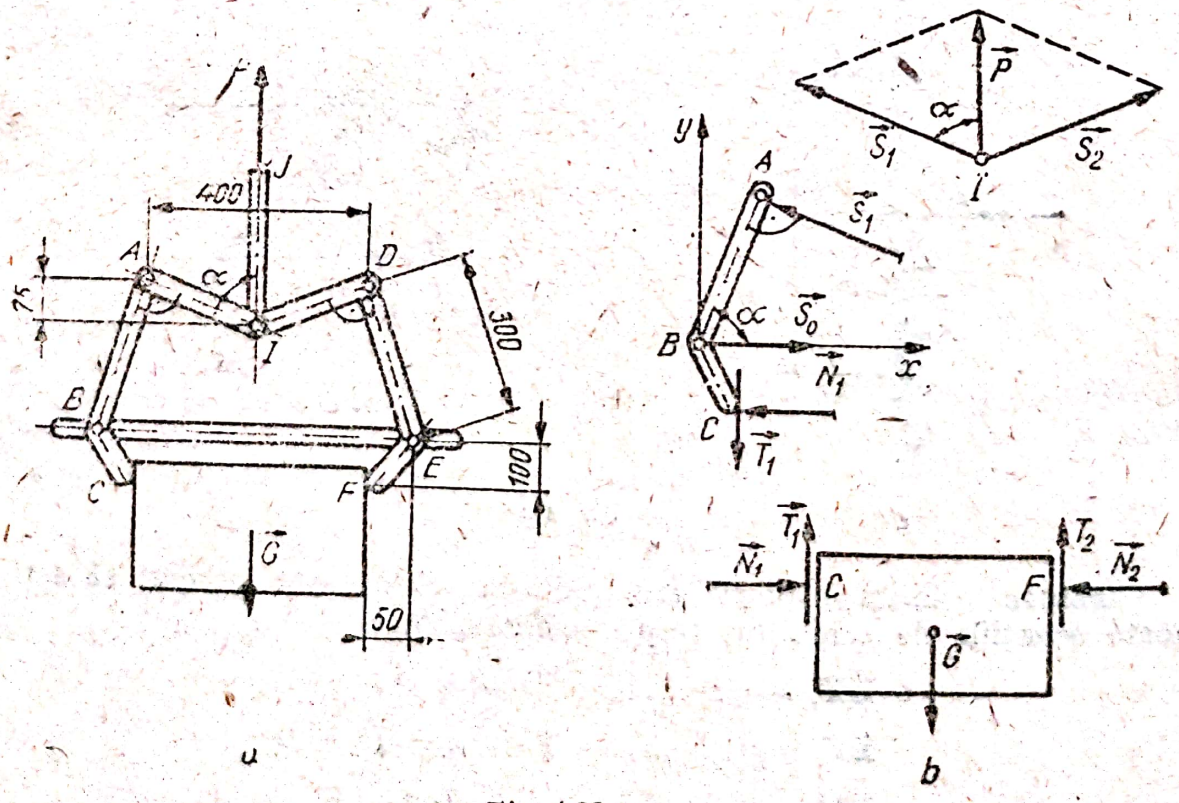


Fig. 4.36 a, b

neglijabile greutăţile părţilor componente ale dispozitivului. Se vor calcula şi toate forţele de legătură.

Rezolvare. Din condiţia de echilibru a sistemului, rezultă

$$P = G. \tag{1}$$

Pentru a determina eforturile din barele AI şi DI, se descompune forţa P după direcţiile celor două bare, ca în fig. 4.36, b, din care rezultă

$$P = 2S_1 \cos \alpha$$

de unde

$$S_1 = \frac{P}{2 \cos \alpha}. \tag{2}$$

Se observă că lungimea $\overline{AI}$ este:

$$\overline{AI} = \sqrt{75^2 + 200^2} = 231{,}6 \text{ mm}.$$

Se poate, acum, calcula valoarea unghiului α; avem

$$\cos \alpha = \frac{75}{AI} = \frac{75}{213{,}6} = 0{,}35112 \tag{3}$$

şi, prin urmare,

$$\alpha = \arccos 0{,}35112 = 1{,}12202 \text{ rad} = 69°26'37''. \tag{4}$$

Din relaţiile (1), (2) şi (3) rezultă

$$S_1 = 1{,}424G. \tag{5}$$

Descompunînd sistemul şi reprezentînd forţele de legătură, se pot scrie următoarele ecuaţii de echilibru

$$\Sigma X_i = 0: \quad S_0 - S_1 \sin \alpha - N_1 = 0 \tag{6}$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_1 \cos \alpha - T_1 = 0 \tag{7}$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad 300S_1 - 100N_1 - 50T_1 = 0 \tag{8}$$

$$T_1 \leqslant \mu N_1. \tag{9}$$

Echilibrul corpului care se ridică se efectuează prin următoarele ecuaţii

$$\Sigma X_i = 0: \quad N_1 - N_2 = 0 \tag{10}$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad T_1 + T_2 - G = 0 \tag{11}$$

$$T_2 \leqslant \mu N_2. \tag{12}$$

Din ecuaţiile (10) şi (11), rezultă:

$$N_1 = N_2$$

şi

$$2\mu N_1 = G \tag{13}$$

Ecuaţia (8) se mai poate scrie:

$$427{,}2G - 50(2 + \mu)N_1 = 0 \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de (13), ecuația (14) devine

$$427{,}2 - \frac{50(2+\mu)}{2\mu} = 0 \tag{15}$$

de unde se deduce valoarea minimă necesară a coeficientului de frecare

$$\mu_{min} = 0{,}124. \tag{16}$$

În cazul în care este îndeplinită condiția

$$\mu \geqslant \mu_{min}$$

ridicarea corpului este posibilă.

Din ecuațiile de echilibru se deduc și expresiile forțelor de legătură; se obține

$$N_1 = N_2 = \frac{G}{2\mu} \tag{18}$$

$$T_1 = T_2 = \frac{G}{2} \tag{19}$$

$$S_0 = N_1 + S_1 \sin\alpha = \left(\frac{1}{2\mu} + 1{,}33334\right)G. \tag{20}$$

4.37. Sistemul de frînare al tractorului „Universal" are în construcția sa doi saboți, fixați cu un ax comun și presați spre tambur cu ajutorul unui resort spiral. Se cere să se studieze echilibrul acestui sistem de frînă simplă cu saboți, considerînd presiunea saboților asupra tamburului constantă pe toată suprafața acestuia (fig. 4.37, a).

Rezolvare. Notăm forțele care acționează asupra sabotului, din partea camei, cu $\mathbf{P}_1$ și $\mathbf{P}_2$ și forțele de presiune a saboților asupra tamburului cu $\mathbf{Q}_1$ și $\mathbf{Q}_2$. Aceste forțe produc în suprafața de frecare forțele μQ_1 și μQ_2. Vom nota prin S forța de tensiune din resort și vom efectua echilibrul sabotului stîng (fig. 4.37, b)

$$\Sigma M_{(O_1)} = 0: \quad (a+c)P_1 + \mu r Q_1 - cQ_1 - (c+e)S = 0.$$

Rezultă

$$P_1 = \frac{(c-\mu r)Q_1 + (c+e)S}{a+c}.$$

Ecuația de echilibru a sabotului drept (fig. 4.37, c) se scrie

$$\Sigma M_{(O_2)} = 0: \quad -(a+c)P_2 + \mu r Q_2 + cQ_2 + (c+e)S = 0$$

de unde

$$P_2 = \frac{(c+\mu r)Q_2 + (c+e)S}{a+c}$$

Pentru a face echilibrul tamburului este suficient să scriem ecuația de momente în raport cu punctul O (fig. 4.37, d)

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \quad M_f - \mu r Q_1 - \mu r Q_2 = 0$$

se obține

$$M_f = \mu r(Q_1 + Q_2).$$

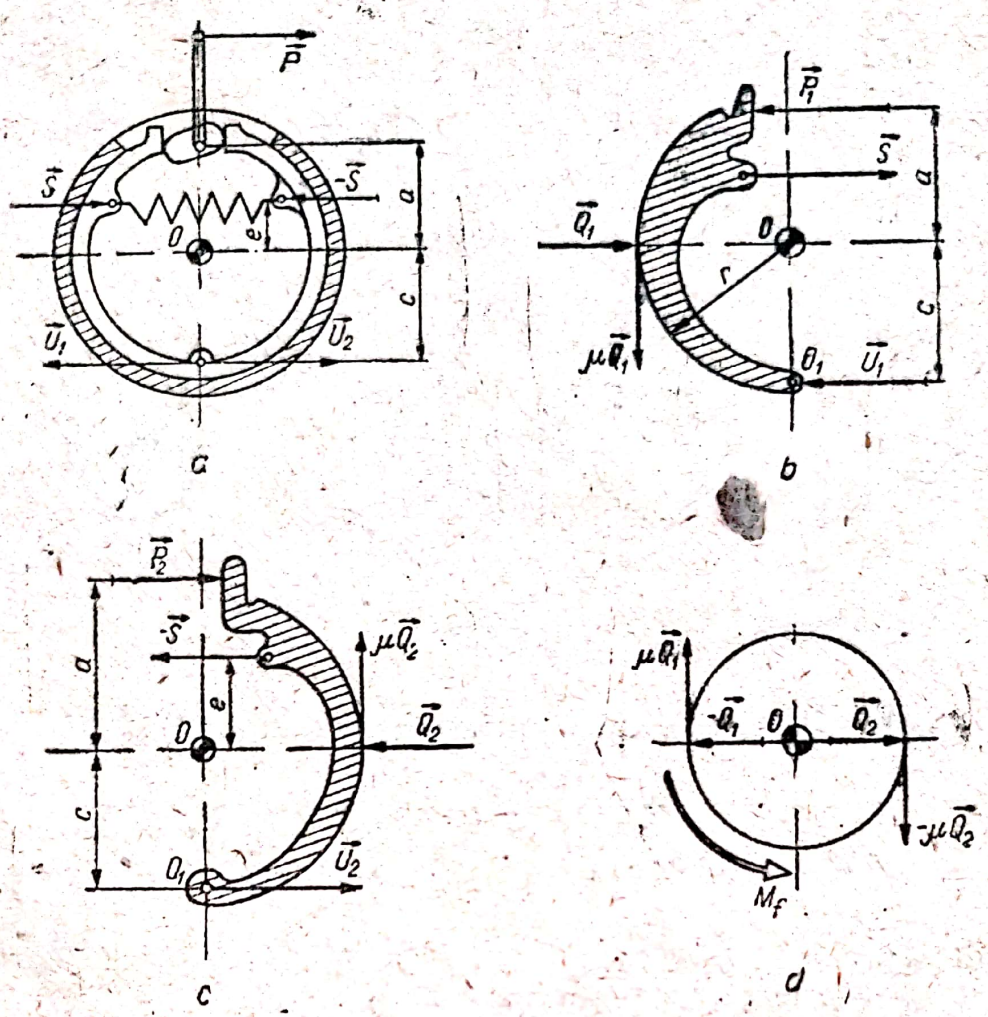


Fig. 4.37 a, b, c, d

Presupunînd $Q_1 = Q_2$, rezultă

$$M_f = 2\mu r Q_1 = 2\mu r Q_2.$$

Rezultă forţele cu care cama acţionează asupra celor doi saboţi:

$$P_1 = \frac{(c - \mu r)M_f}{2\mu r(a + c)} + \frac{(c + e)S}{a + c}$$

$$P_2 = \frac{(c + \mu r)M_f}{2\mu r(a + c)} + \frac{(c + e)S}{a + c}.$$

4.38. Să se determine forţele P' şi P'', pentru frîna cu doi saboţi cu camă (fig. 4.38), care intră în construcţia sistemului de frînare al tractoarelor.

Rezolvare. În cazul acestui tip de frînă, reacţiunile reale ale saboţilor asupra camei sînt P' şi P'', pe care le determinăm din condiţia ca momentul lor, faţă de punctul fix O_1, să fie egal cu momentul forţelor P_1 şi P_2 faţă de acelaşi punct (a se vedea fig. 4.37). Astfel, vom obţine

$$\left(a + c + \frac{h}{2}\right)P' - (a + c)P_1 = 0$$

$$\left(a + c - \frac{h}{2}\right)P'' - (a + c)P_2 = 0$$

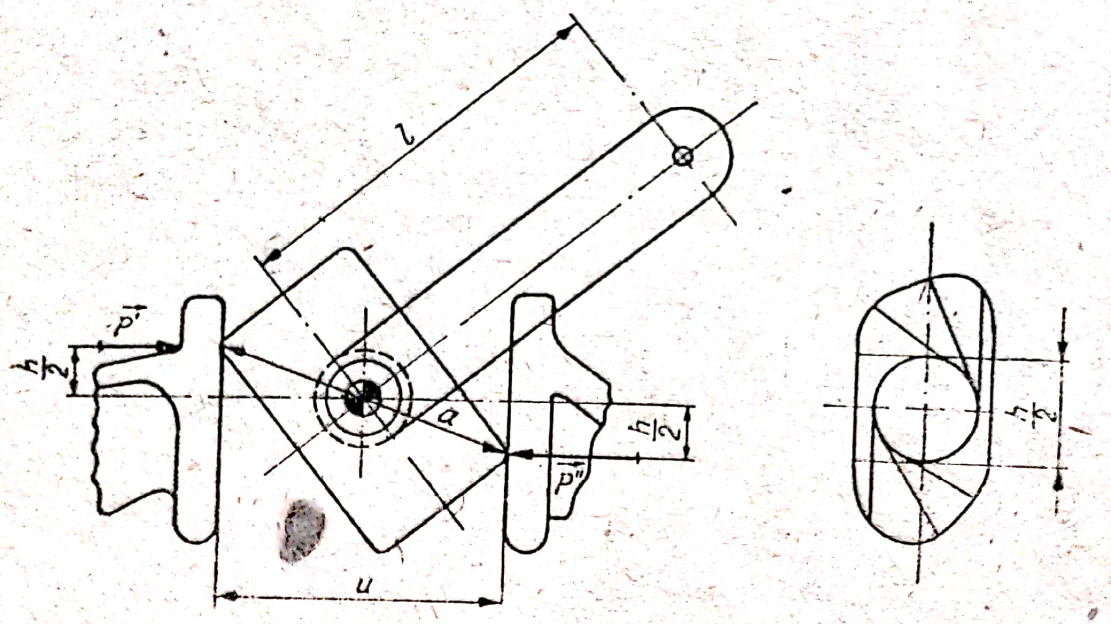


Fig. 4.38

unde $h = \sqrt{a^2 - u^2}$. Din relaţiile precedente, se obţine.

$$P' = \frac{a + c}{a + c + \frac{h}{2}} P_1; \quad P'' = \frac{a + c}{a + c - \frac{h}{2}} P_2$$

Înlocuind forţele P_1 şi P_2 în funcţie de momentul de frecare M_f, ale căror expresii s-au determinat în problema 4.37, se obţine

$$P' = \frac{(c - \mu r) M_f}{2\mu r \left(a + c + \frac{h}{2}\right)} + \frac{(c + e) S}{a + c + \frac{h}{2}}$$

$$P'' = \frac{(c + \mu r) M_f}{2\mu r \left(a + c - \frac{h}{2}\right)} + \frac{(c + e) S}{a + c - \frac{h}{2}}.$$

4.39. În transmiterea mişcării de rotaţie, atunci cînd între arborele conducător şi cel condus distanţa este mare, se folosesc transmisii prin curele, ca în fig. 4.39. Se cere să se determine tensiunile curelei cu roată liberă; roata motoare este roata mică şi transmite o putere $N = 300$ C.P. cu o turaţie $n = 400$ rot/min. Pe ramura condusă se aşează o roată liberă cu diametru $d_1 = 1000$ mm, al cărui centru O_1 se găseşte la 7250 mm distanţă de roata mare şi 500 mm deasupra liniei centrelor OO'.

Rezolvare. Determinăm unghiurile din consideraţii geometrice; avem

$$\overline{OO_1} = \sqrt{7{,}25^2 + 0{,}50^2} = 7{,}267 \text{ m} = 7267 \text{ mm}$$

$$\overline{O_1O'} = \sqrt{2{,}25^2 + 0{,}5^2} = 2{,}305 \text{ m} = 2305 \text{ mm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

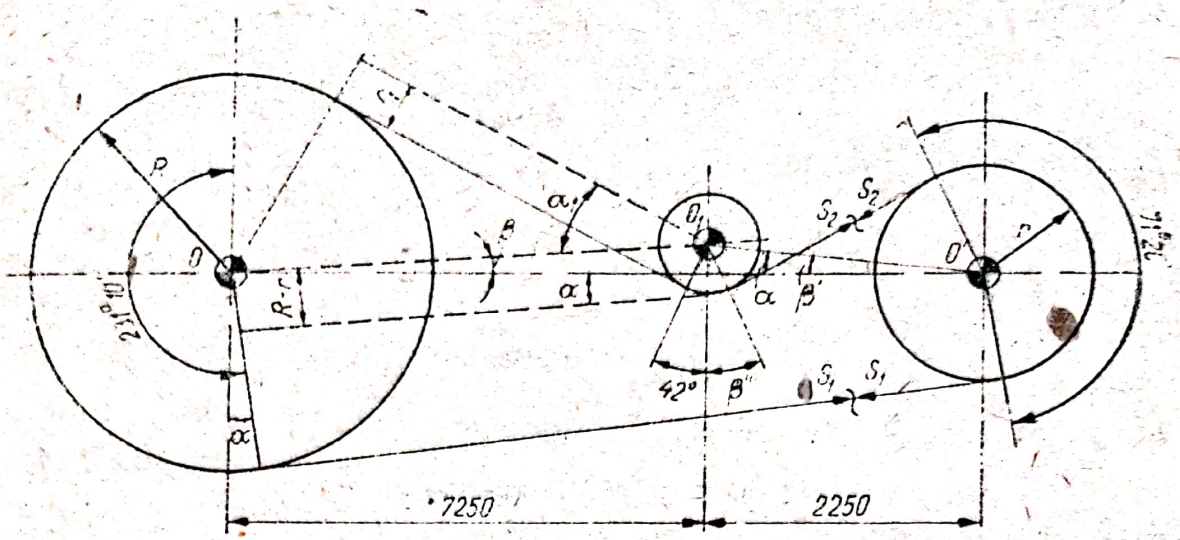


Fig. 4.39

Se obține

$$\sin \alpha = \frac{R - r}{OO_1} = \frac{7500 - 900}{2 \cdot 9500} = 0{,}347 \Rightarrow \alpha = 20°20'$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{R + r_1}{OO_1} = \frac{7500 + 1000}{2 \cdot 7267} = 0{,}585 \Rightarrow \alpha_1 = 35°50'.$$

Analog

$$\sin \alpha' = \frac{r_1 + r}{O_1O'} = \frac{1000 + 900}{2 \cdot 2305} = 0{,}412 \Rightarrow \alpha' = 24°20'.$$

Din triunghiul $OO'O_1$, determinăm unghiurile β și β'

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{9536 \cdot 7231}{9500 \cdot 7267}} = 0{,}999$$

$$\frac{\beta}{2} = 2°30' \Rightarrow \beta = 5°;$$

$$\cos \frac{\beta'}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} = \sqrt{\frac{9536 \cdot 2269}{9500 \cdot 2305}} = 0{,}994$$

$$\frac{\beta'}{2} = 6°20' \Rightarrow \beta' = 12°40'.$$

Relația dintre unghiurile roții mari este

$$\pi + \alpha + \alpha_1 - \beta = 180° + 20°20' + 35°50' - 5° = 231°10'.$$

deci 231°10' este unghiul de înfășurare al curelei pe roata mare. Analog se obține pentru roata mică

$$\pi - \alpha + \alpha' - \beta' = 180° - 20°20' + 24°20' - 12°40' = 171°20'.$$

Pentru roata liberă vom avea unghiul

$$\alpha_1 + \alpha' - \beta - \beta' = 35°50' + 24°20' - 5° - 12°50' = 42°30'.$$

Calculăm lungimea curelei; porțiunea de curea pe roata mare este

$$L_1 = \frac{60 \cdot 231 + 10}{60 \cdot 180} 7500\pi = 30{,}248 \text{ m.}$$

Pe roata mică, lungimea porțiunii de curea este

$$L_2 = \frac{60 \cdot 171 + 20}{60 \cdot 180} 900\pi = 2{,}690 \text{ m}$$

iar pe roata liberă

$$L_3 = \frac{60 \cdot 42 + 30}{60 \cdot 180} 1000\pi = 0{,}739 \text{ m.}$$

Lungimea curelei între roțile O și O' va fi:

$$L_4 = OO' \cos \alpha = 9500 \cdot 0{,}93769 = 8{,}908 \text{ m}$$

între roțile O și O_1:

$$L_5 = OO_1 \cos \alpha_1 = 7267 \cdot 0{,}81072 = 5{,}891 \text{ m.}$$

iar între roțile O' și O_1:

$$L_6 = O'O_1 \cos \alpha' = 2{,}305 \cdot 0{,}9116 = 2{,}100 \text{ m.}$$

Prin urmare, lungimea totală a curelei este

$$L = \sum_{i=1}^{6} L_i = 50{,}576 \text{ m.}$$

Determinăm viteza curelei

$$v = \frac{\pi n r}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}9 \cdot 400}{30 \cdot 2} = 18{,}84 \text{ m/s.}$$

Forța transmisă de arborele motor este

$$P = \frac{75N}{\eta v} = \frac{75 \cdot 300}{0{,}95 \cdot 18{,}84} = 1257 \text{ daN.}$$

Alegem $\mu = 0{,}22 + 0{,}012 \cdot 18{,}84 = 0{,}45$. Unghiul de înfășurare pe roata mică fiind

$$\alpha = 171°21' = 2{,}99 \text{ rad}$$

rezultă

$$e^{\mu\alpha} = e^{2{,}99 \cdot 0{,}45} = e^{1{,}34} = 3{,}819.$$

Tensiunile în curea vor fi

$$S_1 = \frac{P e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} = \frac{1257 \cdot 3{,}819}{2{,}819} = 1700 \text{ daN}$$

$$S_2 = \frac{S_1}{e^{\mu\alpha}} = \frac{1700}{3{,}819} = 445 \text{ daN.}$$

4.40. Pentru a mări tensiunea la cablurile de funiculare se utilizează o roată de întindere, ca în fig. 4.40.

Să se determine forța F_2, cunoscînd $F_1 = 2500$ daN și forța F care menține cablul sub tensiune, luînd $\mu = 0{,}165$ și cunoscînd că roțile O_1, O_2 și O_3 sînt actionate de cupluri rezistente.

Rezolvare. Aplicînd formula lui Euler pentru fiecare roată, se obţine

$$S_1 = F_1 e^{\mu\alpha}; \quad S_2 = S_1; \quad S_3 = S_2 e^{\mu\alpha};$$
$$S_3 = S_4$$

Rezultă

$$F_2 = S_4 e^{\mu\alpha} = S_2 e^{2\mu\alpha} = F_1 e^{3\mu\alpha}.$$

Forţa F care menţine cablul sub tensiune este

$$F = S_1 + S_2 = 2S_1 = 2F_1 e^{\mu\alpha}.$$

Prin urmare

$$F = 2F_1 e^{\mu\alpha};$$

însă

$$e^{\mu\alpha} = 0{,}165 \cdot 3{,}14 = 0{,}52$$

şi $e^{\mu\alpha} = e^{0{,}52} = 1{,}68.$

Rezultă

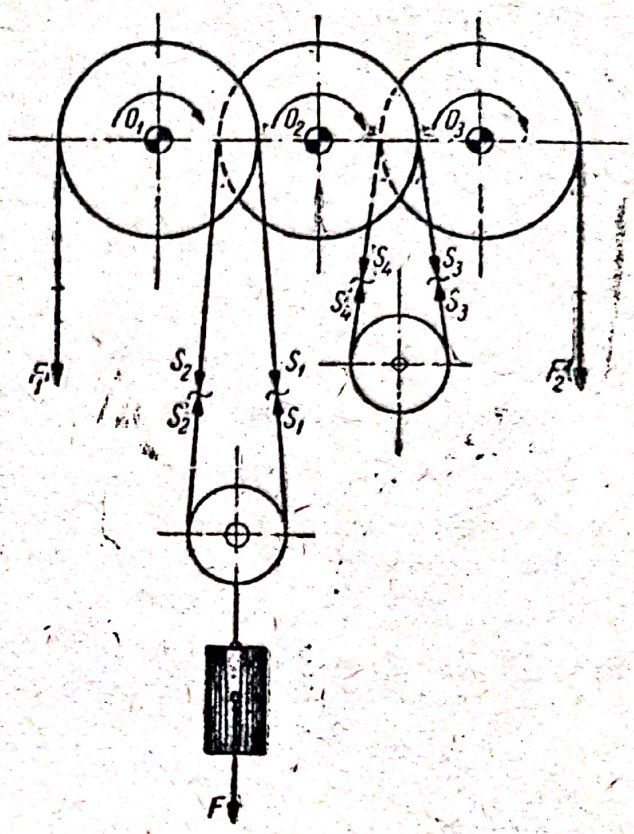


Fig. 4.40

$$F = 2 \cdot 2500 \cdot 1{,}68 = 8400 \text{ daN}$$

$$F_2 = F_1 e^{3\mu\alpha} = 2500 \cdot e^{1{,}6} = 2500 \cdot 4{,}95 = 12370 \text{ daN}.$$

4.41. Un cablu este înfăşurat pe două roţi motoare de diametru $D = 1200$ mm, aşezate la distanţa de 2 m şi depărtate pe verticală cu 0,30 m. Să se determine forţa F_2 care solicită ramura superioară a cablului (fig. 4.41).

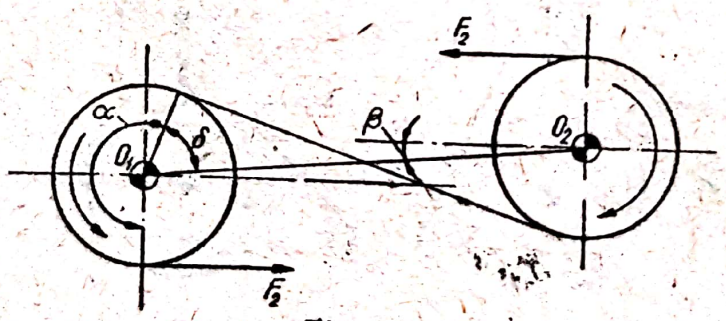


Fig. 4.41

Rezolvare. Tensiunile în firele dintre cele două roţi sînt

$$F = F_1 e^{\mu\alpha}$$

$$F_2 = F e^{\mu\alpha} = F_1 e^{2\mu\alpha}.$$

Puterea transmisă de fiecare dintre cele două roţi este

$$N_1 = \frac{F - F_1}{75} v$$

$$N_2 = \frac{F_2 - F}{75} v.$$

Puterea totală, notată cu N, va fi

$$N = N_1 + N_2 = \frac{F_2 - F_1}{75} = \frac{F_1 v}{75}(e^{2\mu\alpha} - 1).$$

Determinăm unghiurile δ și β

$$\cos\delta = \frac{2 \cdot 0{,}6}{\sqrt{2^2 + 0{,}3^2}} = 0{,}50347\,; \Rightarrow \delta = 53°35'$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 0{,}3^2}} = 0{,}98912\,; \Rightarrow \beta = 8°27'.$$

Unghiul α de înfășurare a cablului pe roată este

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} - \alpha - \beta = 207°56' = 3{,}63 \text{ rad};$$

rezultă

$$e^{2\mu\alpha} = e^{2 \cdot 0{,}18 \cdot 3{,}63} = 3{,}706.$$

Prin urmare, forța F_2 va fi

$$F_2 = \frac{75 \cdot 30 \cdot 3{,}706}{1{,}8(3{,}706 - 1)} = 1710 \text{ daN}.$$

4.42. Frîna simplă cu bandă are construcția dată în fig. 4.42, a. Se cere să se determine forța cu care trebuie să se acționeze asupra pîrghiei O_1A, P_p, necesară frînării momentului M_f.

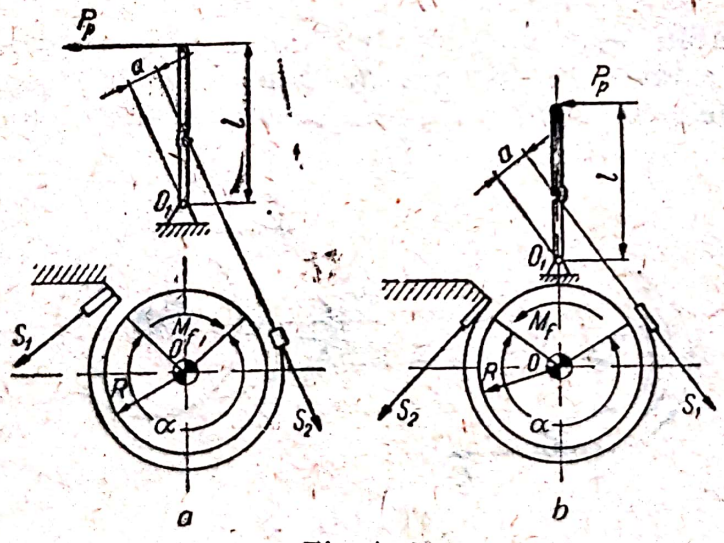


Fig. 4.42

Rezolvare. Vom scrie ecuația de momente față de punctul O

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \quad -M_f - RS_2 + RS_1 = 0.$$

Rezultă

$$M_f = R(S_1 - S_2).$$

Asociem formula lui Euler

$$S_1 = S_2 e^{\mu\alpha}$$

Scanned with OKEN Scanner

și obținem

$$M_f = RS_2(e^{\mu\alpha} - 1).$$

Ecuația de echilibru a pîrghiei O_1A se scrie

$$\Sigma M_{(O_1)} = 0: \quad lP_p - aS_2 = 0.$$

Rezultă

$$S_2 = \frac{l}{a} P_p.$$

Înlocuim în expresia momentului, se obține

$$M_f = \frac{Rl}{a} (e^{\mu\alpha} - 1) P_p$$

de unde

$$P_p = \frac{a}{Rl} \cdot \frac{M_f}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Dacă se schimbă sensul de rotație al tamburului, ceea ce corespunde la mersul înapoi, forța de acționare a pîrghiei P'_p este cu mult mai mare și se calculează astfel (fig. 4.42, b)

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \quad M_f + RS_2 - RS_1 = 0;$$

rezultă

$$M_f = R(S_1 - S_2) = RS_2(e^{\mu\alpha} - 1).$$

Ecuația de momente față de punctul O_1, se scrie

$$\Sigma M_{(O_1)} = 0: \quad -aS_1 + lP'_p = 0.$$

Se obțin:

$$S_1 = \frac{l}{a} P'_p; \quad S_2 = \frac{S_1}{e^{\mu\alpha}} = \frac{lP'_p}{ae^{\mu\alpha}}$$

deci

$$M_f = \frac{RlP'_p}{ae^{\mu\alpha}} (e^{\mu\alpha} - 1)$$

$$P'_p = \frac{M_f ae^{\mu\alpha}}{Rl(e^{\mu\alpha} - 1)}.$$

Din raportul $P'_p/P_p = e^{\mu\alpha}$ deducem

$$P'_p = e^{\mu\alpha} P_p.$$

Pentru $\alpha = 330°$ și $\mu = 0{,}3$ rezultă

$$P'_p \simeq 5{,}6P_p.$$

4.43. Ca mecanism de frînare la întoarcerea tractoarelor se utilizează frîna cu bandă dublă. În acest caz, banda de frînare are un punct de fixare imobil, A (fig. 4.43). Se cere să se determine forța de frînare P_p (fig. 4.43).

Rezolvare. Considerăm rotația în sensul invers acelor de ceasornic. Pentru partea din stînga a benzii, formula lui Euler se scrie

$$S_1 = U_1 e^{\mu\alpha_1}$$

Scanned with OKEN Scanner

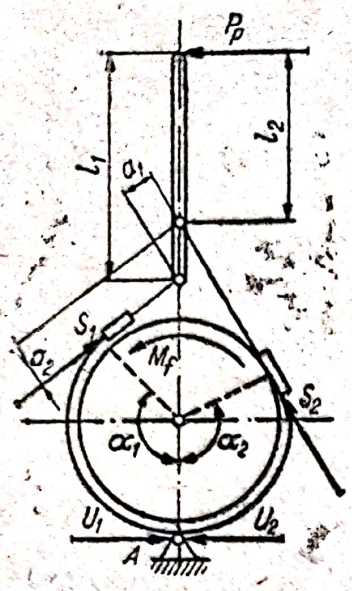


Fig. 4.43

iar pentru partea din dreapta benzii

$$U_2 = S_2 e^{\mu\alpha_2}.$$

Momentul de frînare se determină prin ecuația de momente în raport cu punctul O; avem:

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \quad M_f - RS_1 - RU_2 + RU_1 + RS_2 = 0.$$

Efectuînd înlocuirile, se obține

$$M_f = R\left[S_1 + S_2 e^{\mu\alpha_1} - \frac{S_1}{e^{\mu\alpha_1}} - S_2\right]$$

$$M_f = R\left[S_1\left(1 - \frac{1}{e^{\mu\alpha_1}}\right) + S_2(e^{\mu\alpha_1} - 1)\right].$$

Dacă printr-o construcție corespunzătoare a mecanismului, forțele de întindere pot fi făcute egale, adică dacă: $S_1 = S_2 = S$, atunci momentul de frînare devine

$$M_f = RS\left[e^{\mu\alpha_1} - \frac{1}{e^{\mu\alpha_1}}\right].$$

Scriind ecuațiile de momente în raport cu punctele B și C, avem

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad -a_1 S_2 + l_1 P_p = 0$$

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad l_2 P_p - a_2 S_1 = 0$$

de unde

$$P_p = \frac{a_2}{l_2} S_1 = \frac{a_1}{l_1} S_2.$$

Din condiția ca $S_1 = S_2 = S$, rezultă condiția constructivă:

$$\frac{a_1}{l_1} = \frac{a_2}{l_2}.$$

Pentru a avea același moment de frînare prin schimbarea sensului de rotație, trebuie să avem

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

4.44. Un tren accelerat este compus dintr-o locomotivă seria 142.000 și zece vagoane a $5 \cdot 10^4$ daN fiecare. Se cere să se calculeze:

1) Dacă locomotiva este în stare să urce singură trenul la Predeal, știind că rampa maximă între Timiș și Predeal este de 25 mm/m.

2) Dacă este suficientă o singură locomotivă pe distanța Brașov—Timiș, rampa maximă fiind de 10 mm/m și ce cuplu este necesar aici pentru urcarea trenului în rampă?

Se dau $\mu = 0{,}15$ și coeficienții de frecare de rostogolire $s_r = 0{,}05$ cm și $s_R = 0{,}1$ cm.

Încărcările pe cele șapte osii ale locomotivei sînt respectiv: $P_1 = 16 \cdot 10^3$ daN; $P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 19 \cdot 10^3$ daN, $P_6 = 17 \cdot 10^3$ daN, $P_7 = 16 \cdot 10^3$ daN. Greutatea tenderului locomotivei este $G = 70 \cdot 10^3$ daN (fig. 4.44).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Trenul se compune din patru perechi de roți motoare și

$$3 + 4 \cdot 10 + 4 = 47$$

roți trase. Pentru ca urcarea în rampă să fie posibilă este necesar ca roțile motoare să nu patineze.

Considerăm trenul între Brașov și Predeal; suma forțelor de frecare de alunecare care mențin trenul pe planul înclinat va fi:

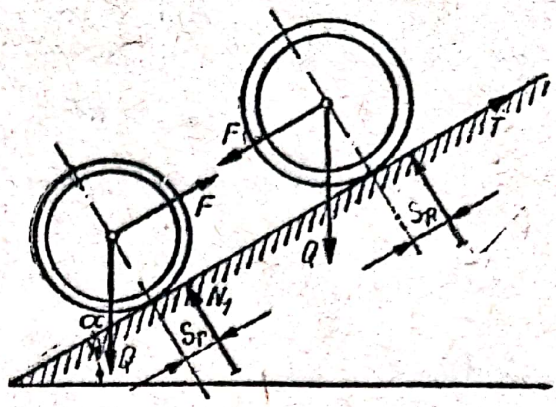


Fig. 4.44

— forța de aderență maximă, luînd $\cos \alpha = 1$

$$T_{max} = 4\mu Q \cos \alpha = 4 \cdot 0{,}15 \cdot 19 \cdot 10^3 = 11{,}4 \cdot 10^3 \text{ daN.}$$

— componenta greutății după direcția planului înclinat care se opune înaintării este

$$\Sigma Q \sin \alpha = \sin \alpha \Sigma Q = \frac{25}{1000}(16 + 4 \cdot 19 + 17 + 16 + 70 +$$

$$+ 10 \cdot 50) \cdot 10^3 = 17{,}4 \cdot 10^3 \text{ daN.}$$

Trebuie, însă, învinsă și frecarea de rostogolire; avem

$$\Sigma \frac{s}{R} Q \cos \alpha \simeq \Sigma \frac{s}{R} Q = \frac{4 \cdot 0{,}1}{90} \cdot 19 \cdot 10^3 + \frac{0{,}05}{40}(16 + 17 + 16 + 70 +$$

$$+ 70 + 70 + 10 \cdot 50) \cdot 10^3 = 860 \text{ daN.}$$

Se observă că forța de aderență este mai mică decît suma forțelor rezistente

$$11{,}4 \cdot 10^3 < 17{,}4 \cdot 10^3 + 0{,}86 \cdot 10^3$$

Concluzia este că o singură locomotivă nu poate urca trenul la Predeal.

Pentru distanța Brașov—Timiș, forța de aderență rămîne neschimbată, fiind

$$T_{max} = 11{,}4 \cdot 10^3 \text{ daN}$$

iar

$$\Sigma Q \sin \alpha = \sin \alpha \Sigma Q = \frac{10}{1000} \cdot 695 \cdot 10^3 = 6{,}95 \cdot 10^3 \text{ daN}$$

și

$$\Sigma \frac{s}{R} Q \cos \alpha \simeq 860 \text{ daN.}$$

Se observă că pe această distanță, o singură locomotivă poate urca trenul.

Determinarea momentului motor se efectuează scriind ecuația de momente, pentru întreg sistemul, în momentul pornirii; vom avea

$$\Sigma M_{mot} = RF_{tras} + \Sigma(RQ \sin \alpha + sQ \cos \alpha)$$

$$F_{tras} = \Sigma\left(Q \sin \alpha + \frac{s}{R} Q \cos \alpha\right) = \frac{10}{1000} (6 + 17 + 16 + 70 +$$

$$+ 10 \cdot 50) \cdot 10^3 + \frac{0{,}05}{40} (16 + 17 + 16 + 70 + 10 \cdot 50) \cdot 10^3 = 7000 \text{ daN}$$

$$\Sigma M_{mot} \geqslant 7 \cdot 0{,}9 \cdot 10^3 + 4 \cdot 0{,}19\left(90 \frac{10}{1000} + 0{,}1\right) \cdot 10^3 = (6{,}3 + 0{,}76) \cdot 10^3 =$$

$$= 7{,}06 \cdot 10^3 \text{ daN} \cdot \text{m}.$$

4.45. În secțiile de forjă ale întreprinderilor industriale se utilizează prese cu fricțiune, de tipul celei din fig. 4.45, a, la care se cunosc: $Q = 250$ kN; $r = 40$ mm; $\alpha = 8°$; $a = 300$ mm; $b = 100$ mm; $d = 500$ mm; $e = 100$ mm; $R = 800$ mm; $R_1 = 400$ mm; $R_2 = 1300$ mm; $\mu = 0{,}08$; $\mu_1 = 0{,}25$; $s = 0{,}05$ mm.

Să se stabilească condițiile de echilibru $F = f(Q)$ și $P = f(Q)$.

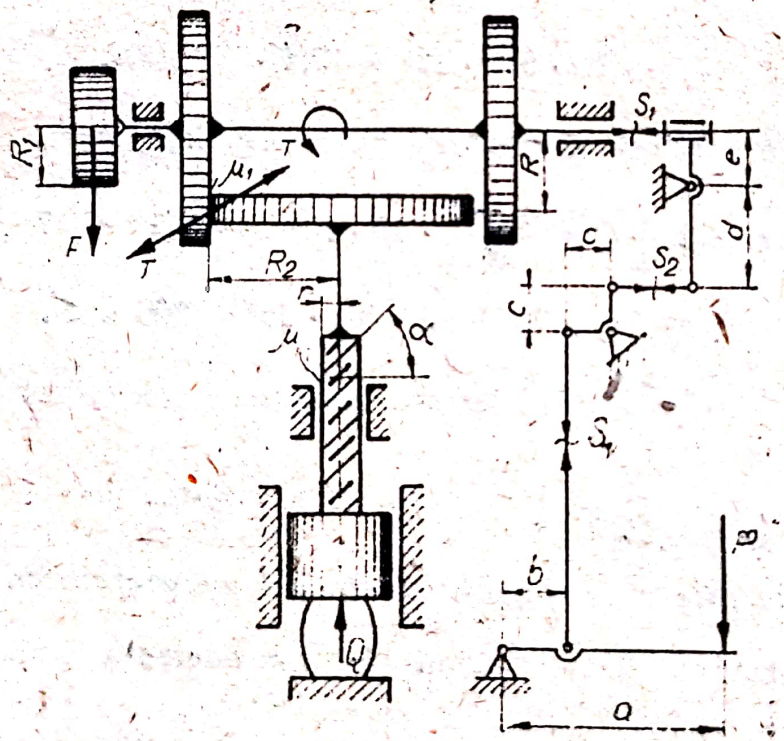


Fig. 4.45 a

Rezolvare. Din ecuația de echilibru a șurubului (fig. 4.45, a) se deduce

$$TR_2 + sN = rQ \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

și

$$\mu_1 N R_2 + sN = rQ \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

Rezultă

$$N = \frac{r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{s + \mu_1 R_2} Q.$$

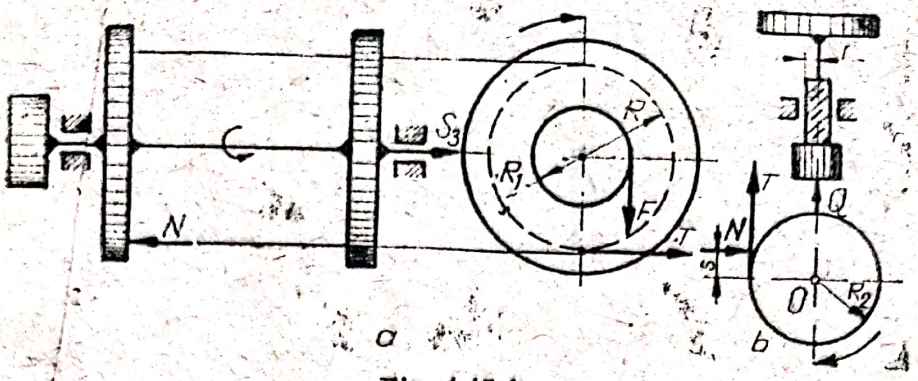


Fig. 4.45 b

Ecuaţiile de echilibru ale axului (fig. 4.45, b) se scriu

$$\Sigma X_i = 0: \quad S_3 - N = 0$$

$$\Sigma M_x = 0: \quad R_1 F - RT = 0$$

de unde

$$S_3 = N \text{ şi } R_1 F = \mu_1 \cdot RN.$$

Rezultă

$$F = \frac{\mu_1 RN}{R_1} = \frac{\mu_1 r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{s + \mu_1 R_2} \frac{R}{R_1} Q.$$

Cu valorile numerice date, avem

$$F = \frac{0{,}25 \cdot 4 \cdot \operatorname{tg}(8° + 5°)}{0{,}005 + 0{,}25 \cdot 130} \frac{80}{40} 250 = 1413 \text{ N} = 141{,}3 \text{ daN}.$$

Ecuaţiile de echilibru al pîrghiilor (fig. 3.44, a) sînt respectiv

$$\Sigma M_{(O_1)} = 0: \quad -aP + bS_1 = 0$$

$$\Sigma M_{(O_2)} = 0: \quad cS_1 - cS_2 = 0$$

$$\Sigma M_{(O_3)} = 0: \quad eS_3 - dS_2 = 0.$$

Rezultă forţa P

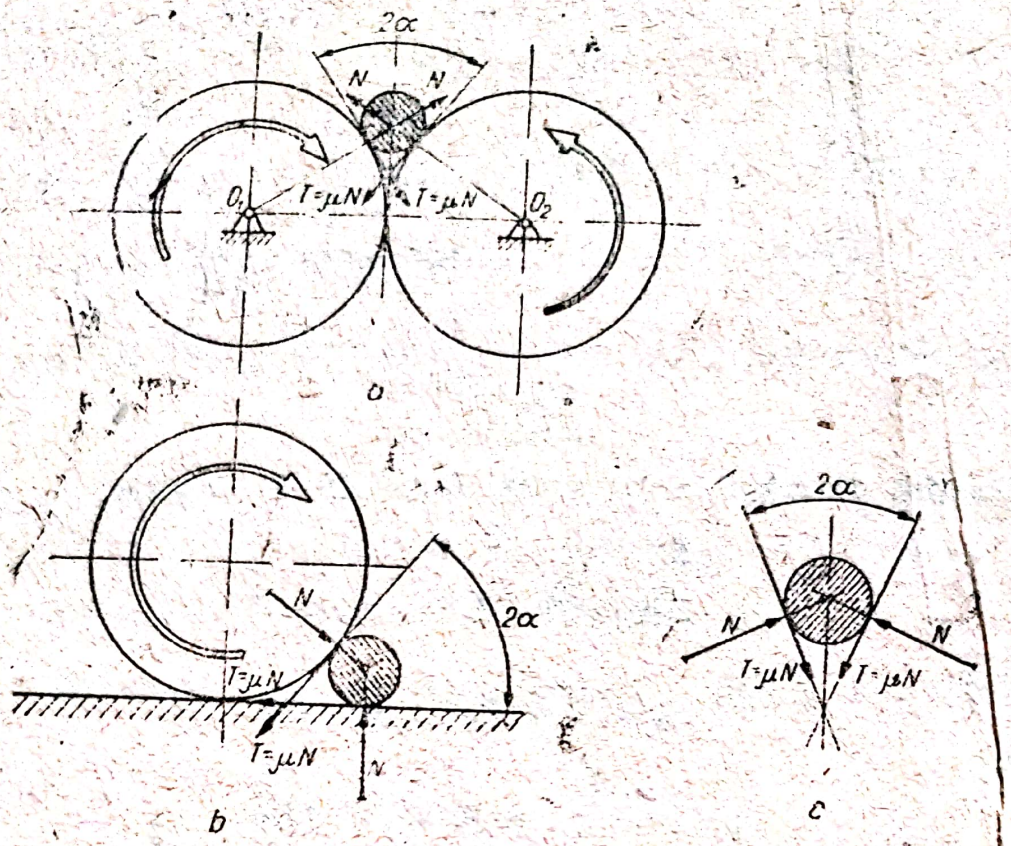
$$P = \frac{be}{ad} S = \frac{bert\operatorname{g}(\alpha + \varphi)}{ad(s + \mu_1 R_2)} Q$$

sau cu valori numerice

$$P = \frac{10 \cdot 10 \cdot 4 \operatorname{tg}(8° + 5°)}{30 \cdot 50 \cdot (0{,}005 + 0{,}25 + 130)} 250 = 0{,}472 \text{ kN} = 47{,}2 \text{ daN}.$$

4.46. Pentru sfărîmarea unor materiale, se folosesc diferite dispozitive cum se poate vedea în fig. 4.46. În figura a valţurile O_1 şi O_2 se rotesc în sensurile indicate de săgeţi. În figura b roata se rostogoleşte pe planul orizontal; în figura c planul înclinat AB este fix, iar planul OC se poate roti cu ajutorul unui mecanism în jurul articulaţiei O.

Se cere să se determine condiţia ca materialul, asimilat cu o sferă, să poată fi prins în dispozitiv,



4.46 a, b, c

Rezolvare. La fiecare dintre cele trei dispozitive, în momentul prinderii materialului în formă de bulgăre, asupra acestuia acţionează reacţiunile normale N şi forţele de frecare tangenţiale μN. În timp ce componenta verticală a forţei de frecare (fig. a şi c) — respectiv cea orizontală (fig. b) împinge bulgărele în dispozitivul de sfărîmare, componenta corespunzătoare a reacţiunii normale se opune acestei tendinţe de mişcare. Rezultă că pentru prinderea bulgărelui este necesar ca

$$2N \sin \alpha \leqslant 2\mu N \cos \alpha$$

de unde $\operatorname{tg} \alpha \leqslant \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \alpha \leqslant \varphi$

Prin urmare, este necesar ca unghiul α să fie mai mic decît unghiul de frecare φ.

4.47. Pentru compactarea unor materiale, se folosesc prese cu articulaţii, formate dintr-un romb articulat, care are două vîrfuri fixate prin articulaţii, de piuliţele B şi C ale unui şurub cu două filete. Axul şurubului se poate deplasa liber, prin mişcări de translaţie în sus şi în jos, alunecînd cu extremităţile în cadrul presei. Se cere să se determine forţa de presare Q care se poate realiza utilizînd forţa P.

Rezolvare. Efectuăm echilibrul şurubului; avem

$$lP = 2rF \operatorname{tg} (\alpha + \varphi);$$

rezultă forţa din piuliţă

$$F = \frac{lP}{2r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)}.$$

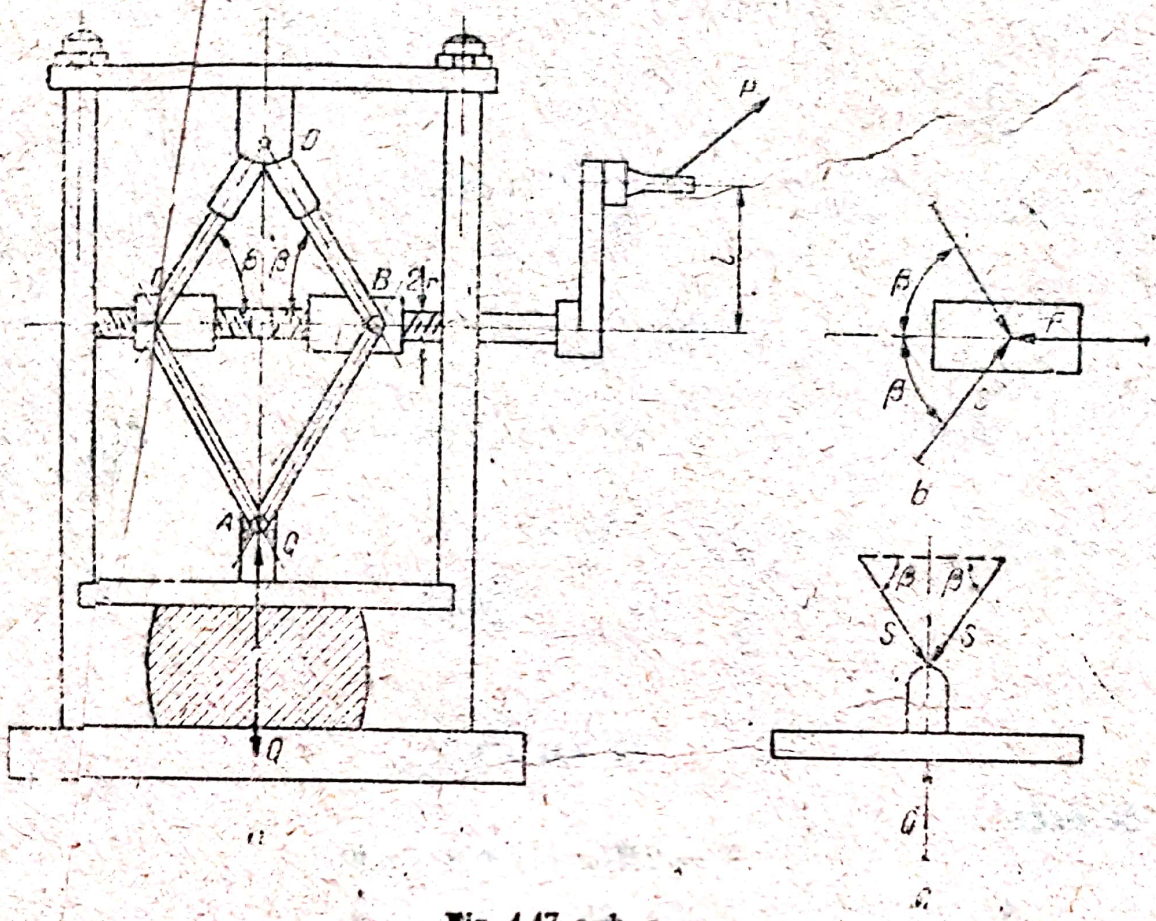


Fig. 4.47 a, b, c

Ecuația de echilibru a piuliței (fig. 4.46, b) este

$$\Sigma X_i = 0: \quad 2S\cos\beta - F = 0$$

de unde

$$S = \frac{F}{2\cos\beta}.$$

Ecuația de echilibru a platoului de compresiune se scrie (fig. 4.47,c)

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Q - 2\sin\beta = 0.$$

Rezultă

$$Q = 2S\sin\beta = F\operatorname{tg}\beta$$

În final se obține

$$Q = \frac{lP\operatorname{tg}\beta}{2r\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}.$$

4.48. O presă cu șurub are construcția arătată în fig. 4.48. Se cere să se determine relația dintre forțele **P** și **Q** la limita echilibrului.

Rezolvare. Efectuăm, mai întîi, echilibrul șurubului; rezultă forța F:

$$F = \frac{RP}{r\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}.$$

Ecuația de echilibru a penei de formă triunghiulară este (fig. 4.48, b)

$$\Sigma X_i = 0: \quad -F + 2\mu_1 N\cos\beta - 2N\sin\beta = 0,$$

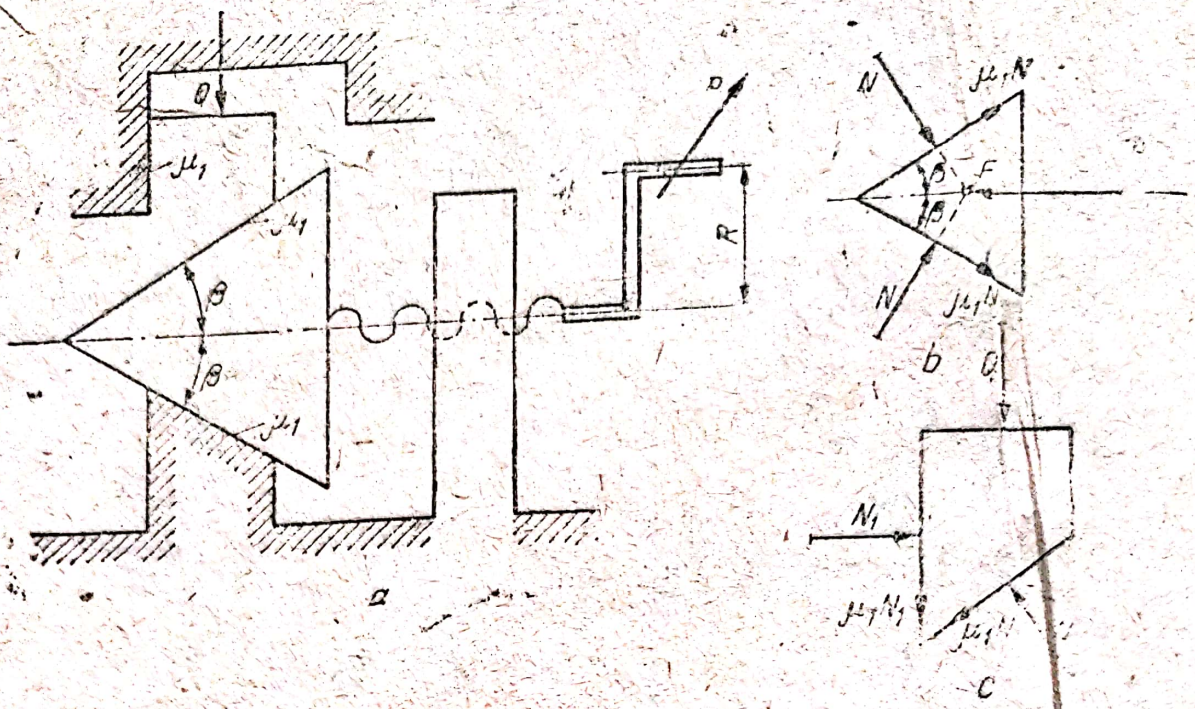


Fig. 4.48 a, b, c

de unde

$$F = 2N(\mu_1 \cos \beta + \sin \beta)$$

sau

$$F = \frac{2N}{\cos \varphi_1} \sin (\beta + \varphi_1)$$

Se obține reacțiunea N

$$N = \frac{F}{2} \frac{\cos \varphi_1}{\sin (\beta + \varphi_1)}.$$

Ecuațiile de echilibru ale penei trapezoidale sînt respectiv (fig. 4.48, c)

$$\Sigma X_i = 0: \quad N_1 - \mu_1 N \cos \beta - N \sin \beta = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -Q - \mu_1 N_1 - \mu_1 N \sin \beta + N \cos \beta = 0.$$

Rezultă

$$N_1 = N(\sin \beta + \mu_1 \cos \beta)$$

sau

$$N_1 = \frac{\sin (\beta + \varphi_1)}{\cos \varphi_1} N = \frac{F}{2 \cos \varphi_1} \frac{\cos \varphi_1 \sin (\beta + \varphi_1)}{\sin (\beta + \varphi_1)}.$$

Prin urmare, $N_1 = F/2$. Substituind valoarea lui N în cea de-a doua ecuație de echilibru, deducem

$$Q = (\cos \beta - \mu_1 \sin \beta) N - \frac{\mu_1 F}{2}$$

sau

$$Q = \frac{\cos \varphi_1}{2 \sin (\beta + \varphi_1)} \frac{\cos (\beta + \varphi_1)}{\cos \varphi_1} \frac{F}{2}$$

deci

$$Q = \frac{F}{4} \operatorname{ctg} (\beta + \varphi_1).$$

Substituind pe F cu valoarea dedusă mai sus, rezultă

$$Q = \frac{\operatorname{ctg}(\beta + \varphi_1)}{4r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} RP.$$

4.49. Pentru brichetarea unor materiale, se folosesc prese manuale (fig. 4.49), formate dintr-un cadru rigid R, în interiorul căruia se poate deplasa vertical, în sus și în jos, platoul C. Comanda se face cu ajutorul manivelei M, care acționează asupra șurubului S, care posedă două filete în sens contrar. În lungul șurubului se deplasează piulițele A și B, care acționează prin partea lor superioară, avînd formă de pană, asupra platoului C. Dacă asupra manivelei acționează forța $F = 10$ daN, se pune întrebarea ce forță de presare se obține? Se dau: $l = 0{,}5$ m; $r = 2$ cm, $\mu_1 = 0{,}1$.

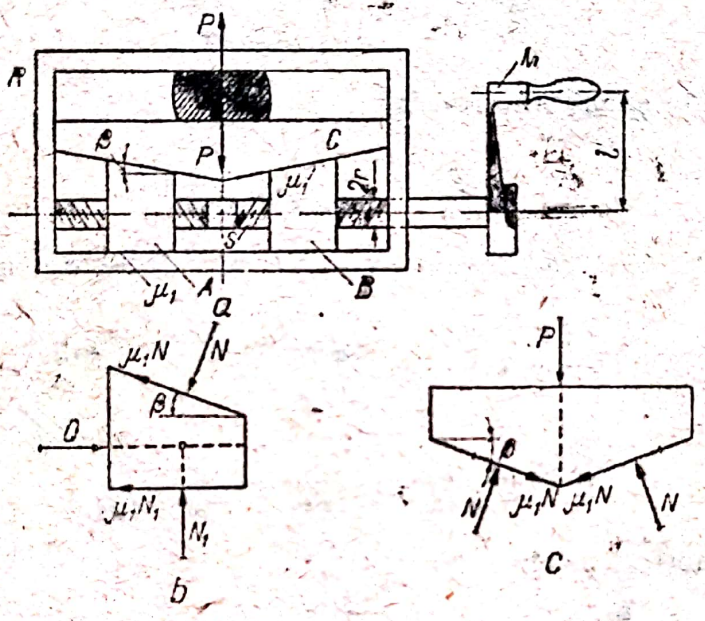


Fig. 4.49 a, a, c

Rezolvare. Efectuăm echilibrul șurubului; avem:

$$F \cdot l = 2rQ \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Ecuațiile piuliței A (fig. 4.48, b) sînt respectiv

$$\Sigma X_i = 0: \quad Q - \mu_1 N \cos\beta - \mu_1 N_1 - N \sin\beta = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_1 + \mu_1 N \sin\beta - N \cos\beta = 0.$$

Din ecuația a doua deducem

$$N_1 = N(\cos\beta - \mu_1 \sin\beta).$$

Substituind în prima ecuație, se obține

$$Q - \mu_1 N(\cos\beta - \mu_1 \sin\beta) - N(\sin\beta + \mu_1 \cos\beta) = 0;$$

rezultă

$$N = \frac{Q}{\mu_1(\cos\beta - \mu_1 \sin\beta) + (\sin\beta + \mu_1 \cos\beta)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația de echilibru a platoului C (fig. 4.48, c) este

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -P + 2N\cos\beta - 2\mu_1 N\sin\beta = 0,$$

de unde

$$N = \frac{P}{2(\cos\beta - \mu_1\sin\beta)}.$$

Egalînd cele două expresii ale forței P, se obține egalitatea

$$\frac{Q}{P} = \frac{\mu_1(\cos\beta - \mu_1\sin\beta) + (\sin\beta + \mu_1\cos\beta)}{2(\cos\beta - \mu_1\sin\beta)}$$

sau

$$\frac{Q}{P} = \frac{\mu_1}{2} + \frac{\sin\beta + \operatorname{tg}\varphi_1\cos\beta}{2(\cos\beta - \operatorname{tg}\varphi_1\sin\beta)}$$

și încă

$$\frac{2Q}{P} = \mu_1 + \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\varphi_1}{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Din ecuația șurubului rezultă:

$$2Q = \frac{Fl}{r\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Substituind această expresie a lui $2Q$ în relația de mai sus, se obține

$$\frac{Fl}{rP\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}(\beta + \varphi_1)$$

sau

$$P = \frac{Fl}{r\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)[\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}(\beta + \varphi_1)]}.$$

Cu valori numerice, avem:

$$P = 10\,\frac{50}{2}\,\frac{1}{\operatorname{tg}(5^\circ + 6^\circ)[\operatorname{tg}(10^\circ + 5^\circ 40') + 0{,}1)]} = 3380 \text{ daN}.$$

4.50. În construcția de mașini, cupla șurub-piuliță are o largă utilizare. Se pune problema efectuării studiului acestei cuple.

Rezolvare. Vom considera, mai întîi, cazul unei pietre de culisă așezată pe un ghidaj înclinat, care face cu orizontala un unghi α.

Rezultanta **P** a tuturor forțelor care acționează asupra pietrei de culisă (exclusiv greutatea G a acesteia) face unghiul β cu normala la ghidaj.

În tendința de mișcare a pietrei se deosebesc două cazuri:

a) piatra are tendința să urce pe ghidajul înclinat (fig. 4.50, a);

b) piatra tinde să coboare pe ghidajul înclinat (fig. 4.50, b).

Studiem, în continuare cazul cînd piatra urcă pe ghidajul înclinat. Forța P, greutatea **G** și reacțiunea **R** a ghidajului asupra pietrei de culisă sînt în echilibru; prin urmare, ele formează un poligon închis (fig. 4.49, b). Componentele lui **R**, pe direcția ghidajului și perpendiculară pe ghidaj, rezultă ușor din poligonul forțelor; se obțin:

Reacțiunea normală

$$N = G\cos\alpha - P\cos\beta;$$

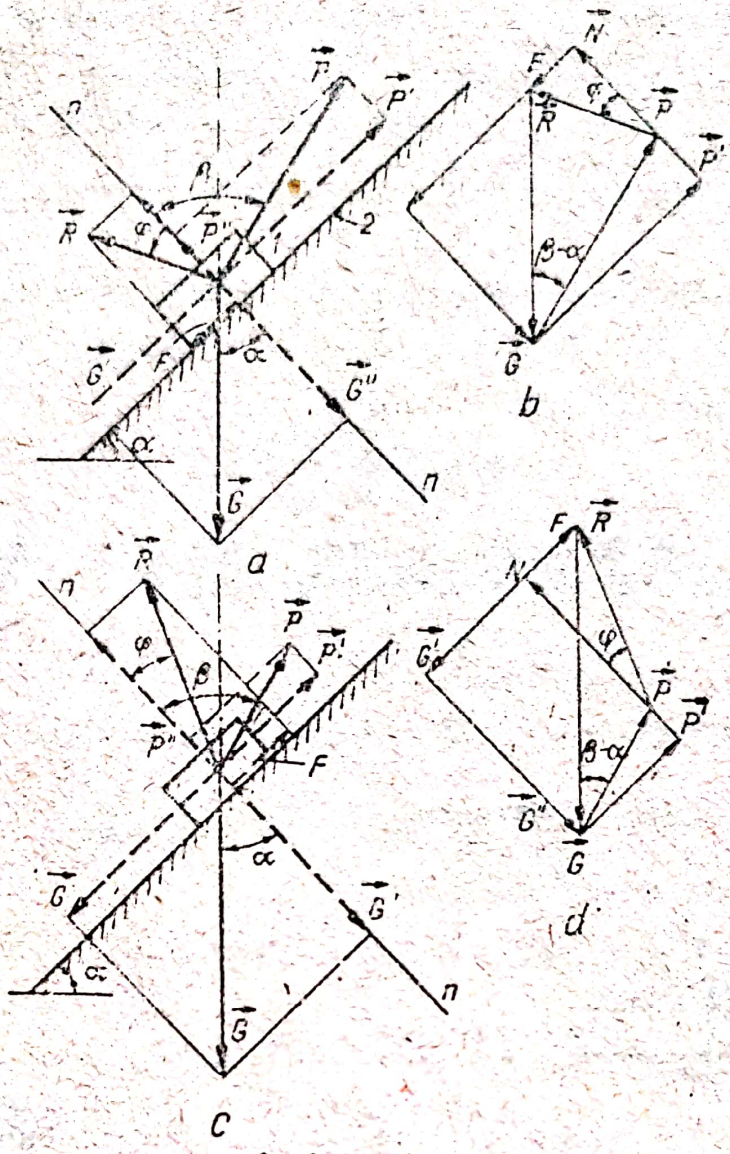


Fig. 4.50 a, b, c, d

Forța de frecare

$$F = (G \cos \alpha - P \cos \beta) \operatorname{tg} \varphi.$$

Pentru echilibru, se poate scrie imediat ecuația de proiecții a poligonului forțelor pe direcția ghidajului, rezultă:

$$P \sin \beta = G \sin \alpha + (G \cos \alpha - P \cos \beta) \operatorname{tg} \varphi,$$

de unde

$$P = \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha}{\sin \beta + \operatorname{tg} \varphi \cos \beta} G.$$

Efectuînd calculul, se obține

$$P = \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\sin (\beta + \varphi)} G. \qquad (1)$$

Se constată că, pentru ca piatra să urce, trebuie ca reacțiunea totală R să cadă în stînga normalei la ghidaj, $n - n$.

Considerăm acum, cazul în care piatra coboară pe ghidajul înclinat (fig. 4.50, c).

În acest caz, dacă forța P este mică, construind poligonul forțelor (fig. 4.50, d), se observă că reacțiunea R cade în dreapta normalei $n - n$ pe ghidaj și făcînd cu aceasta unghiul de fercare φ.

Ecuația vectorială a forțelor, din poligonul acestora este

$$\mathbf{G} + \mathbf{R} + \mathbf{P} = 0;$$

scriind suma proiecțiilor acestor forțe pe direcția ghidajului, se obține:

$$G \sin \alpha - P \sin \beta - \mu(G \cos \alpha - P \cos \beta) = 0,$$

de unde, în urma efectuării calculelor,

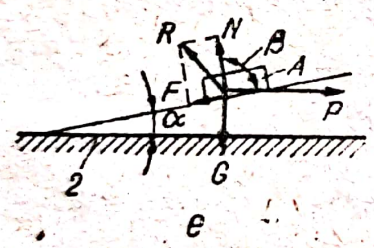
$$P = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)} G. \qquad (2)$$

Din formulele (1) și (2) se deduce relația dintre P și G, în cazul cuplei șurub-piuliță, dacă se face înlocuirea (fig. 4.50, e)

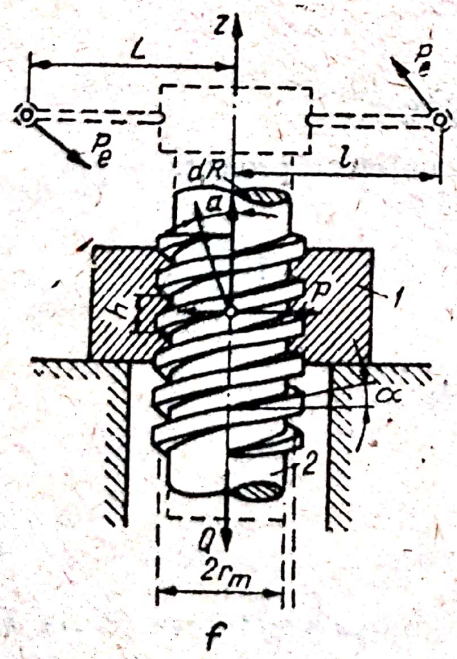
$$\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Substituind în formulele (1) și (2) valoarea lui β, se obține, în cazul ridicării piuliței:

$$P = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)} G = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi); \qquad (3)$$



e



f

Fig. 4.50 e, f

în cazul în care piulița coboară, rezultă

$$P = G \operatorname{tg}(\alpha - \varphi). \qquad (4)$$

În figura 4.50, f se prezintă cazul înșurubării piuliței 1, sau a rotirii piuliței 1, rotire care imprimă șurubului 2 o mișcare elicoidală în lungul axei z, care apare în cazul vinciurilor pentru ridicat piese. Forța P_l, care rotește șurubul, acționează la extremitatea unei manivele de lungime l față de axa z.

Relația dintre forțele P_l și P se obține calculînd momentele în raport cu axa z; avem

$$M = P_l l = P r_m = G r_m \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Rezultă

$$P_l = \frac{r_m}{l} G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \qquad (5)$$

r_m fiind raza medie a filetului.

În cazul cînd sarcina G coboară, formula (5) devine

$$P_l = \frac{r_m}{l} G \operatorname{tg}(\alpha - \varphi). \qquad (6)$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care filetul nu este drept, flancurile filetului făcînd un unghi β (fig. 4.50, g) cu o dreaptă perpendiculară pe axa șurubului, formulele (5) și (6) devin

$$P_l = \frac{r_m}{l} G \operatorname{tg} (\alpha + \varphi') \tag{7}$$

$$P_l = \frac{r_m}{l} G \operatorname{tg} (\alpha - \varphi') \tag{8}$$

în care

$$\operatorname{tg} \varphi' = \mu' = \frac{\mu}{\cos \frac{\beta}{2}} . \tag{9}$$

Expresia mai exactă a unghiului φ' este dată de relația

$$\operatorname{tg} \varphi' = \mu' = \frac{\mu}{\cos \frac{\beta}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \frac{\beta}{2}} . \tag{9'}$$

Pentru determinarea expresiei (9') se poate utiliza calculul vectorial, presupunînd că drumul parcurs de reacțiunea **R** a șurubului se află pe o elice virtuală cu înclinarea $\alpha \pm \varphi$; semnul (+) se adoptă dacă piulița urcă și (—), dacă coboară, astfel încît reacțiunea să fie totdeauna perpendiculară pe drumul parcurs și, prin urmare, lucrul său mecanic să fie nul.

Pentru stabilirea relației (9') se alege un sistem de referință de versori **u**, **v** și **n** (fig. 4.50, h), după cum urmează: **u** — dirijat după flancul filetului, cuprins în planul xOz și făcînd unghiul $\frac{\beta}{2}$ cu axa Ox; **v** — dirijat pe direcția tangentei la elicea medie de înclinare, cuprins în planul

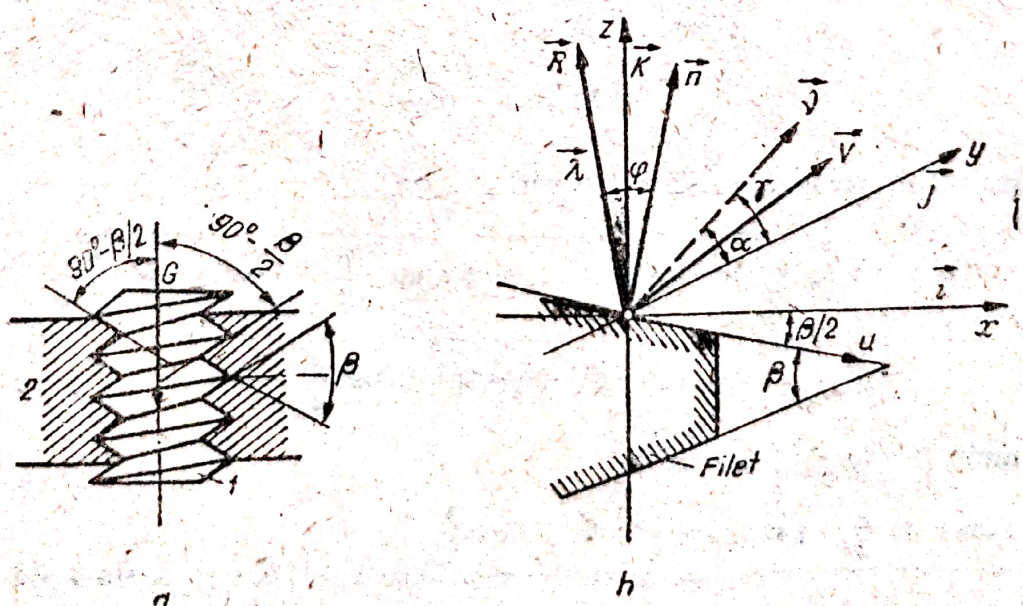


Fig. 4.50 g, h

yOz, şi făcînd unghiul α cu axa *Oy*; $\mathbf{n}$ — perpendicular pe planul versorilor $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$. Din figura 4.50, h rezultă uşor:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}\cos\frac{\beta}{2} - \mathbf{k}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{j}\cos\alpha + \mathbf{k}\sin\alpha \qquad (1)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}$$

Versorul $\boldsymbol{\lambda}$ al reacţiunii $\mathbf{R}$, situat în planul $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$, face unghiul $(\pm\varphi)$, după cum este cazul, cu versorul $\mathbf{n}$.

În cazul cînd unghiul este $(+\varphi)$, ca în fig. 4.50, h, expresia lui $\boldsymbol{\lambda}$ este

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{n}\cos\varphi - \mathbf{v}\sin\varphi. \qquad (2)$$

Versorul $\boldsymbol{\upsilon}$ al elicei virtuale, versor conţinut în planul *yOz* şi făcînd unghiul γ cu axa *Oy*, are următoarea expresie:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{j}\cos\gamma + \mathbf{k}\sin\gamma. \qquad (3)$$

Condiţia de perpendicularitate dintre $\boldsymbol{\lambda}$ şi $\boldsymbol{\upsilon}$ se scrie vectorial sub forma

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\upsilon} = 0. \qquad (4)$$

Substituind valorile lui $\mathbf{n}$ şi $\mathbf{v}$ în (2), rezultă

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}\cos\varphi - (\mathbf{j}\cos\alpha + \mathbf{k}\sin\alpha)\sin\varphi. \qquad (5)$$

Însă

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\frac{\beta}{2} & 0 & -\sin\frac{\beta}{2} \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2} - \mathbf{j}\sin\alpha\cos\frac{\beta}{2} + \mathbf{k}\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}.$$

Modulul acestui produs vectorial este

$$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = \sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}} = \cos\alpha\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}},$$

aşa încît (5) capătă forma

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{i}\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2} - \mathbf{j}\sin\alpha\cos\frac{\beta}{2} + \mathbf{k}\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}}\cos\varphi - (\mathbf{j}\cos\alpha + \mathbf{k}\sin\alpha)\sin\varphi. \qquad (6)$$

Scanned with OKEN Scanner

Substituind expresiile lui v și λ din (3), respectiv (6) în (4) și scoțînd valoarea lui tg γ, se obține

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{\mu}{\cos\dfrac{\beta}{2}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\dfrac{\beta}{2}}}{1-\operatorname{tg}\alpha\dfrac{\mu}{\cos\dfrac{\beta}{2}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\dfrac{\beta}{2}}} = \operatorname{tg}(\alpha+\varphi')$$

unde tg φ' este dat de (9').

Pentru valori mici ale lui α, se poate neglija termenul $\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}$ astfel că, în acest caz, formula (9') devine identică cu (9).

4.51. Mecanismul camă-tachet cu mișcare rectilinie a tachetului este utilizat mai ales la mecanismele cu frecare uscată și semiuscată, cum ar fi ascensoarele și mașinile de găurit. Se cere să se efectueze studiul acestui tip de mecanism (fig. 4.51, a).

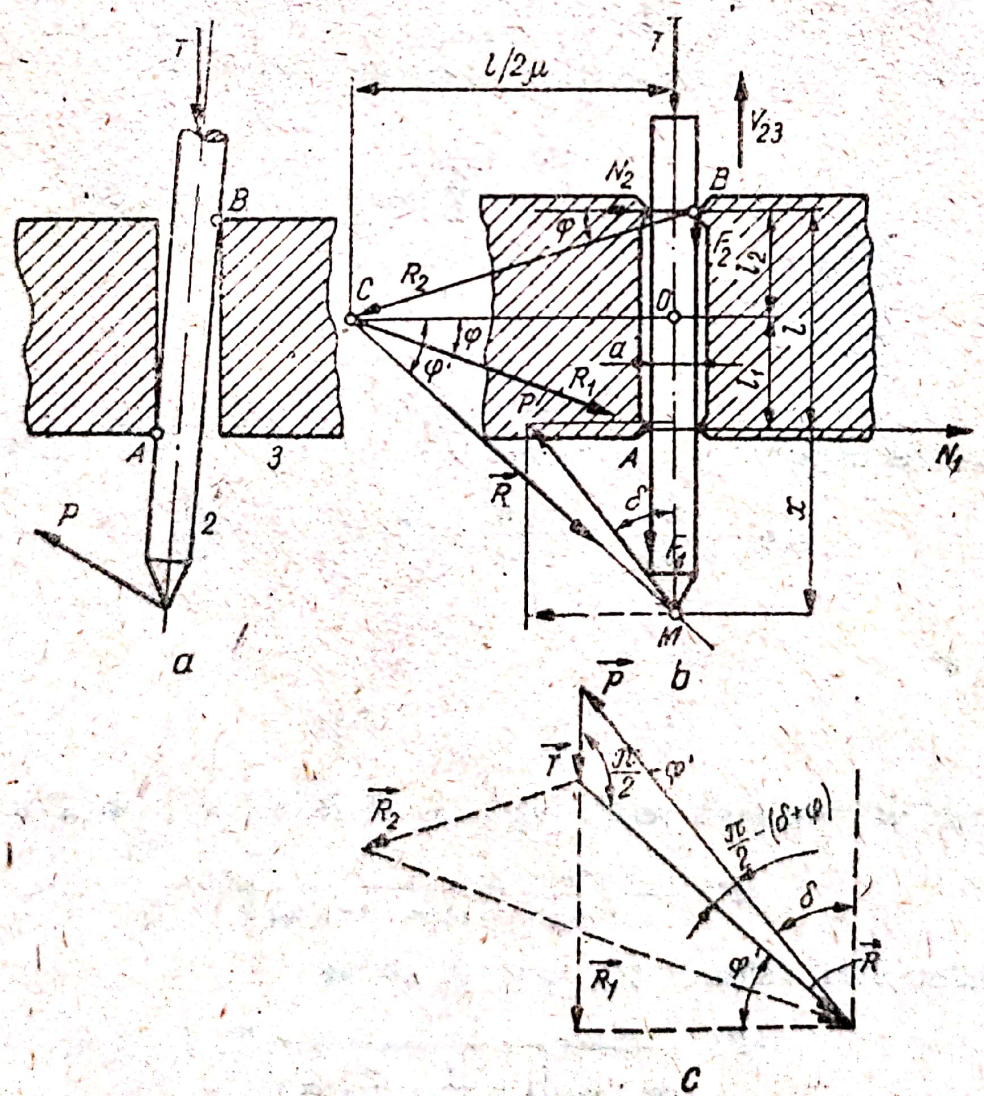


Fig. 4.51 a, b, c

Rezolvare. În studiul mecanismelor cu came, se utilizează relația dintre unghiul δ, coeficientul de frecare μ și elementele geometrice ale mecanismului, pentru evitarea fenomenului de autoblocare, relație care se folosește în proiectare. În cele ce urmează, se determină atît această relație, precum și relația dintre forțele care acționează asupra tachetului cu vîrf în cazul limită.

În figura 4.51, b este reprezentat ghidajul în contact cu tija numai în punctele A și B pentru evitarea poziției din fig. 4.51, a.

Asupra tijei acționează următoarele forțe: P — acțiunea camei asupra tachetului; T — reacțiunea arcului, inclusiv forțele de inerție; N_1, N_2 — reacțiunile ghidajului asupra tijei în punctele A și, respectiv B; $F_1 = \mu N_1$; $F_2 = \mu N_2$ — frecările dintre ghidaj și tijă, care au sensurile inverse direcției de deplasare a tijei față de ghidaj.

Relația dintre P și R în cazul limită rezultă din echilibrul tijei tachetului sub acțiunea forțelor de mai sus.

Notînd cu μ coeficientul de frecare în punctele A și B, rezultanta reacțiunilor $\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{N}_1$ și $\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{N}_2$ trece prin punctul C, aflat la distanța $l/2\mu$ de axa tijei tachetului. Pentru echilibru, rezultanta $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$, $\mathbf{P}$ și $\mathbf{T}$ trebuie să fie concurente în punctul M.

Direcția forței $\mathbf{R}$ este, deci, cunoscută; construind poligonul forțelor, se determină forțele $\mathbf{T}$ și $\mathbf{R}$ (fig. 4.51, c). Unghiul φ' pe care rezultanta $\mathbf{R}$ îl face cu normala la ghidaj, se numește unghi de frecare redus.

Aplicînd teorema sinusurilor, din poligonul forțelor, rezultă:

$$\frac{T}{P} = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\delta + \varphi')\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi'\right)} = \frac{\cos(\delta + \varphi')}{\cos\varphi'} \tag{1}$$

$$\frac{R}{P} = \frac{\sin\delta}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi'\right)} = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi'}. \tag{2}$$

Valoarea unghiului φ' rezultă imediat din triunghiul CDM (fig. 4.51, b)

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{MD}{DC} = \frac{x + l_1}{\frac{l}{2\mu}} = \frac{2\mu}{l}\left(x + \frac{l}{2} - \frac{\mu a}{2}\right)$$

prin urmare

$$\operatorname{tg}\varphi' = \left(1 + \frac{2x}{l} - \frac{\mu a}{l}\right)\mu. \tag{3}$$

Ținînd seama de această relație, valoarea lui P în funcție de T devine:

$$P = \frac{T\cos\varphi'}{\cos(\delta + \varphi')} = \frac{1}{\cos\delta - \operatorname{tg}\varphi'\sin\delta}T. \tag{4}$$

Substituind valoarea lui $\operatorname{tg}\varphi'$ se obține

$$P = \frac{1}{\cos\delta - \mu\left(1 + \frac{2x}{l} - \frac{\mu a}{l}\right)\sin\delta}T. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru evitarea autoblocării este necesar ca numitorul relației (5) să fie pozitiv, deoarece în caz contrar ar trebui schimbat sensul lui $\mathcal{F}$ pentru a se putea menține egalitatea. Ori, în acest caz, rezultă că pentru a putea deplasa tija în sensul săgeții, ar trebui ca și rezistența $\mathcal{F}$ să acționeze în același sens cu P.

De asemenea, cînd numitorul este nul, rezultă că este necesară o forță $P = \infty$ pentru mișcarea tijei, ceea ce practic echivalează cu imposibilitatea funcționării mecanismului.

Punînd condiția ca mecanismul să nu se blocheze, rezultă ușor

$$\cos\delta - \mu\left(1 + \frac{2x}{l} - \frac{\mu a}{l}\right)\sin\delta \geqslant 0,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\delta < \frac{1}{1 + \frac{2x}{l} - \frac{\mu a}{l}}\,\frac{1}{\mu}. \qquad (6)$$

4.52. În construcția de mașini, se utilizează pe scară largă tachetul plat (fig. 4.52). Se cere să se studieze și să se determine condiția de funcționare a tachetului.

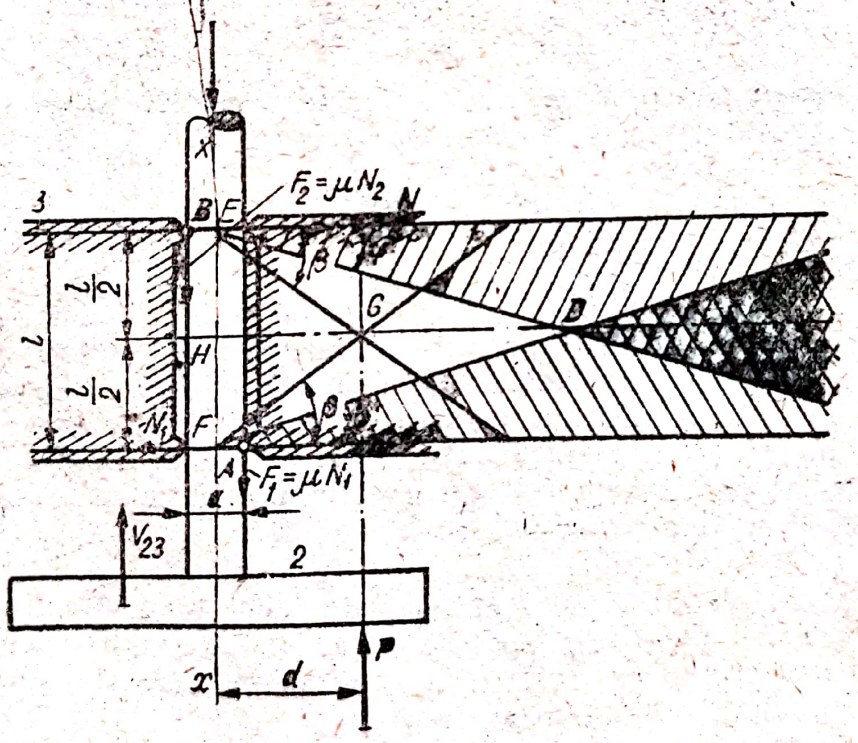


Fig. 4.52

Rezolvare. În poziția din figură, forța P acționează paralel cu axa $x - x$ a tijei, și la distanța d de aceasta. Tija tachetului, în mișcarea ei în sensul de acțiune a lui P, ajunge în contactul limită cu ghidajul în punctele A și B. Pentru funcționare trebuie evident ca

$$P \geqslant \mathcal{F} + \mu N_1 + \mu N_2. \qquad (1)$$

Din ecuația de proiecții pe direcția perpendiculară pe $x - x$ rezultă

$$N_1 = N_2 = N.$$

Calculînd momentele tuturor forțelor care acționează asupra tijei în raport cu unul dintre punctele E sau F, se obține

$$N = \frac{d}{l} P. \tag{2}$$

Substituind această valoare în (1) și efectuînd calculele, se obține

$$T \leqslant \left(1 - 2\mu \frac{d}{l}\right) \cdot P \tag{3}$$

Pentru ca această inegalitate să fie valabilă, este necesar ca

$$1 - 2\mu \frac{d}{l} > 0$$

de unde se deduce

$$\mu < \frac{l}{2d}; \tag{4}$$

Din figură se observă că:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{HE}{HG} = \frac{l}{2d}.$$

Înlocuind această valoare în (4) rezultă că pentru ca tija să nu se blocheze în ghidaj este necesar și suficient ca

$$\operatorname{tg} \varphi < \operatorname{tg} \beta$$

și, prin urmare,

$$\varphi < \beta. \tag{5}$$

De aici, rezultă următoarea concluzie: în cazul cînd suportul forței care acționează asupra tijei tachetului trece prin interiorul triunghiului DEF, format de cele două unghiuri de frecare, mișcarea tijei este posibilă.

În cazul în care această direcție trece prin zona comună celor două unghiuri de frecare corespunzătoare reacțiunilor normale N_1 și N_2 (zona haşurată dublu), tija tachetului se blochează.

4.53. Între ghidajul tachetului și tijă jocul nu poate fi prea mare astfel încît forma pe care o poate lua variația presiunii specifice și prin urmare și a reacțiunii se arată în fig. 4.53, a. Se cere să se studieze frecarea dintre tijă și ghidaj în acest caz.

Rezolvare. Pe porțiunea ab, de o parte și cd de cealaltă parte a tijei 2 vor apărea, datorită reacțiunilor N_1 și N_2, forțele de frecare: $F_1 = \mu N_1$ și $F_2 = \mu N_2$. Determinarea acestora este dificilă, din cauza imposibilității determinării exacte a legilor de variație a presiunilor specifire, care să permită determinarea rezultantelor N_1 și N_2.

Pentru simplificarea calculului, se consideră o variație liniară pentru presiunile specifice (fig. 4.53, b). În acest caz, reacțiunile normale rezultante N_1 și N_2 sînt aplicate la distanțele $\frac{l-x}{3}$, respectiv $\frac{x}{3}$, de marginile ghidajului, unde $l - x$ și x sînt lungimile bazelor celor două triunghiuri, care reprezintă legea de variație a presiunilor.

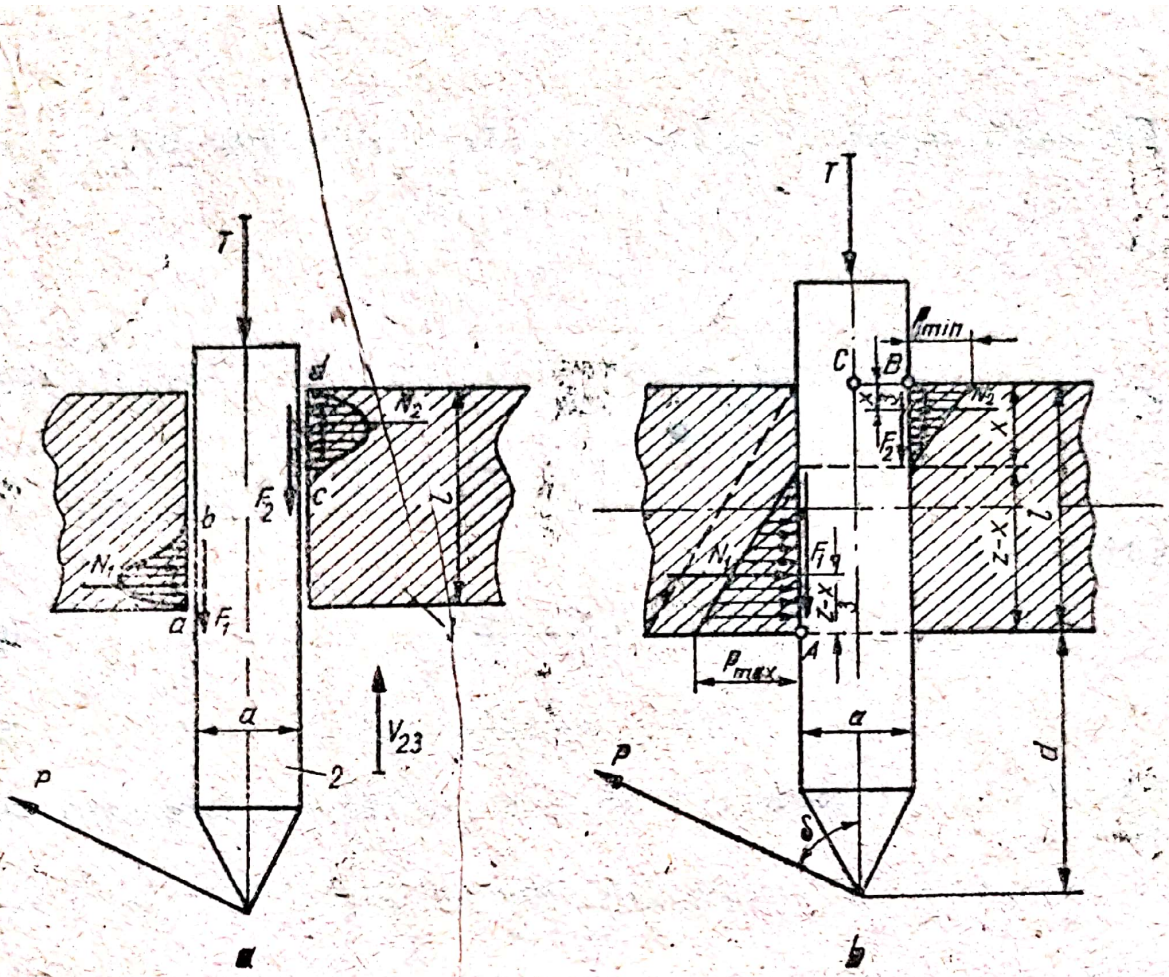


Fig. 4.53 a, b

Pentru a găsi condiția ca tija să nu se blocheze în ghidaj, în ipoteza repartizării liniare a presiunilor p_{max}, la marginea inferioară a ghidajului și p_{min} la marginea superioară, se scrie, mai întîi, ecuația de proiecții pe direcția perpendiculară pe axa tijei; se obține

$$N_1 - N_2 - P \sin \delta = 0. \tag{1}$$

Determinăm valorile lui N_1 și N_2, în funcție de p_{max}. Din triunghiurile de repartizare a presiunii, rezultă

$$\frac{p_{max}}{l - x} = \frac{p_{min}}{x}$$

de unde

$$p_{min} = \frac{x}{l - x} p_{max}.$$

Pe de altă parte, din aceleași triunghiuri se obține

$$N_1 = \frac{1}{2}(l - x)p_{max} \tag{2}$$

$$N_2 = \frac{1}{2} x p_{min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{l - x} p_{max}. \tag{3}$$

Substituind aceste valori în (1), în urma efectuării calculelor, se obține

$$p_{max} = \frac{2P}{l} \cdot \frac{l - x}{l - 2x} \sin \delta \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu această expresie a lui p_{max} în relațiile (2) și (3), deducem

$$N_1 = \frac{P}{l}\frac{(l-x)^2}{l-2x}\sin\delta \tag{5}$$

$$N_2 = \frac{P}{l}\frac{x^2}{l-2x}\sin\delta. \tag{6}$$

Scriind ecuația de momente ale tuturor forțelor care acționează asupra tijei, în raport cu punctul C, se obține

$$(d+l)P\sin\delta - \left(l - \frac{l-x}{3}\right)N_1 - \frac{a}{2}F_1 + \frac{x}{3}N_2 + \frac{a}{2}F_2 = 0 \tag{7}$$

Ținînd seama că

$$F_1 = \mu N_1 = \mu\frac{P}{l}\cdot\frac{(l-x)^2}{l-2x}\sin\delta, \tag{8}$$

$$F_2 = \mu N_2 = \mu\frac{P}{l}\frac{x^2}{l-2x}\sin\delta. \tag{9}$$

Înlocuind F_1, F_2, N_1 și N_2 în (7) și efectuînd calculele, se deduce valoarea lui x

$$x = \frac{l}{6}\frac{6d - 3\mu a + 2l}{2d - \mu a + l}. \tag{10}$$

Pentru $x = 0$, adică în cazul repartizării presiunii numai pe o parte a ghidajului printr-o lege triunghiulară (linia întreruptă), distanța d de la marginea ghidajului la punctul de aplicație a forței P rezultă din relația

$$6d - 3\mu a + 2l = 0$$

de unde

$$d = \mu\frac{a}{2} - \frac{l}{3}. \tag{11}$$

Cum, de regulă, $\mu\frac{a}{2} < l/3$, rezultă că o repartizare triunghiulară a presiunii nu poate avea loc decît dacă forța P acționează în interiorul ghidajului, lucru care nu se întîmplă în practică.

Dacă $d \to \infty$, din (10) rezultă $x = l/2$, ceea ce practic este imposibil, deoarece $N_1 = N_2 \to \infty$

Evitarea autofrînării (blocării tijei în ghidaj) se va realiza cînd va fi satisfăcută inegalitatea

$$P\cos\delta \geq F_1 + F_2 + T. \tag{12}$$

Substituind în (12) expresiile (8) și (9) ale lui F_1 și F_2, se obține

$$P \geqslant \frac{1}{\cos\delta - \frac{l^2 - 2lx + 2x^2}{l(l-2x)}\mu\sin\delta}T. \tag{13}$$

Relația de mai sus nu este valabilă decît dacă:

$$\cos\delta - \frac{l^2 - 2lx + 2x^2}{l(l-2x)}\mu\sin\delta > 0$$

sau, efectuînd calculele, se obține condiția pe care trebuie s-o îndeplinească δ și x pentru evitarea autofrînării

$$\operatorname{ctg}\delta > \mu\left[1 + \frac{2x^2}{l(l-2x)}\right]. \qquad (14)$$

4.54. Pentru transportul blocurilor de piatră, se folosesc două rulouri (role) egale, de rază r, ca în fig. 4.54. Cunoscînd că greutatea unui bloc este **P** și că forța orizontală cu care este împins blocul este **Q**, se cere să se determine relația dintre forța de împingere **Q** și greutatea blocului **P**, pentru ca blocul să poată să înainteze, dacă coeficientul frecării de rostogolire între rolă și bloc este s, iar cel dintre rolă și sol, este s_1.

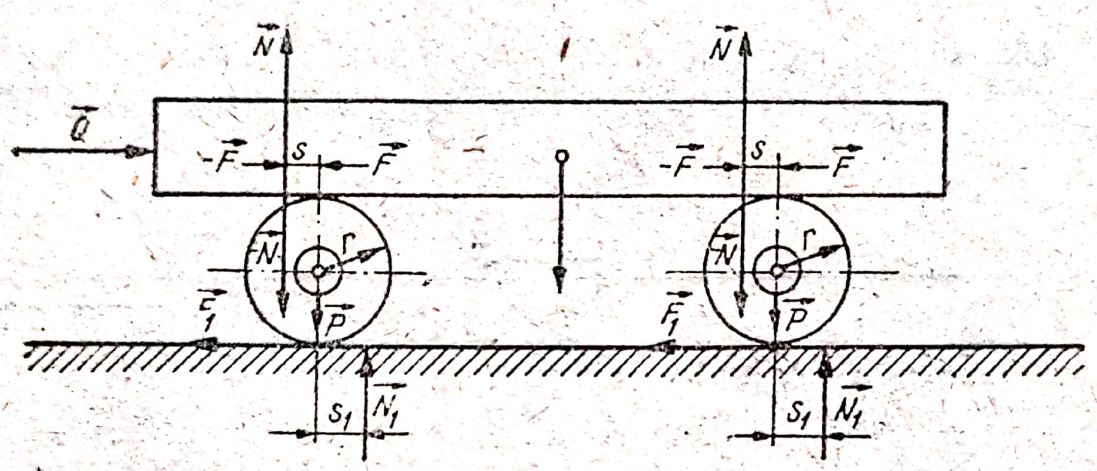


Fig. 4.54

R e z o l v a r e. Fie p greutatea unei role; reprezentînd reacțiunile și efectuînd echilibrul blocului, se pot scrie următoarele ecuații de echilibru

$$\Sigma X_i = 0: \quad Q - 2F = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad 2N - P = 0$$

Rezultă

$$F = \frac{Q}{2} \quad \text{și} \quad N = \frac{P}{2}.$$

Pentru ca blocul să nu alunece pe role, trebuie ca

$$F < \mu N$$

deci

$$\frac{Q}{2} < \mu\frac{P}{2} \quad \text{sau} \quad Q < \mu P.$$

Efectuînd echilibru unei role, se obține: $F = F_1$. Pentru ca rolele să nu alunece pe sol, este necesar ca

$$F_1 < \mu_1 N_1$$

Din

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_1 - p - N = 0$$

deducem

$$p + N = N_1 \quad \text{sau} \quad N_1 = p + \frac{P}{2}.$$

Ecuația de momente în raport cu centrul rolei se scrie

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \quad rF + rF_1 - sN - s_1 N_1 = 0.$$

Rezultă, în urma înlocuirilor,

$$rQ = s\frac{P}{2} + s_1\left(p + \frac{P}{2}\right).$$

Pentru ca mișcarea să se producă trebuie ca să avem satisfăcută inegalitatea:

$$rQ > s\frac{P}{2} + s_1\left(p + \frac{P}{2}\right).$$

4.55. Un bloc de greutate G este supus unei forțe de tracțiune T și se de plasează pe n rulouri de același diametru d și greutate Q. Să se determine condiția de rostogolire a sistemului (fig. 4.55).

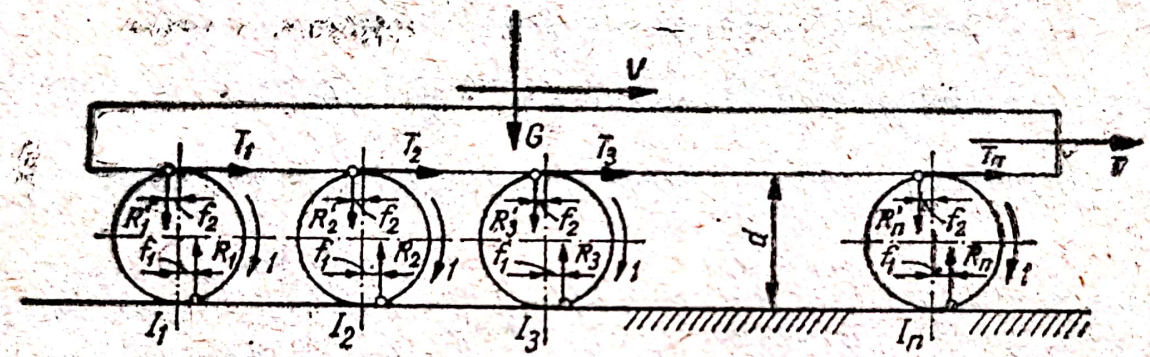


Fig. 4.55

Rezolvare. Sub acțiunea forței T, rolele se vor roti în sensul săgeților 1, astfel că reacțiunile $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ale terenului și reacțiunile $R'_1, R'_2, \ldots, R'_n$ ale blocului asupra rulourilor vor produce un moment rezistent, care se opune sensului de rotație 1, imprimat de forța de tracțiune T.

Dacă se notează cu f_1 și f_2 brațele frecărilor de rostogolire ale rulourilor față de teren și bloc, atunci momentele $M_1, M_2, \ldots M_n$, ale rezistențelor de rostogolire se determină luînd momentele tuturor forțelor care acționează asupra fiecărui rulou în raport cu punctele $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ale rulourilor în raport cu terenul.

Dacă $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sînt părțile din forța de tracțiune T, care revin rulourilor $1, 2, \ldots, n$, atunci ecuația de momente pentru ruloul de ordinul j este

$$R_j f_1 + R'_j f_2 - T_j d = 0, \quad (j = 1, n); \tag{1}$$

dar

$$R_j = R'_j + Q; \tag{2}$$

$$\sum_1^n R'_j = G; \quad \sum_1^n R_j = G + nQ; \quad \sum_1^n T_j = T. \tag{3}$$

Dacă se adună cele n ecuații din (1) și se ține seama de (2) și (3), se obține

$$f_1 \sum_1^n R_j + f_2 \sum_1^n R'_j = d \sum_1^n T_i$$

de unde

$$T = \frac{f_1 + f_2}{d} G + \frac{f_1}{d} nQ. \tag{4}$$

Dacă se neglijează greutatea nQ a rulourilor față de greutatea G a blocului, se obține

$$T = \frac{f_1 + f_2}{d} G.$$

Rostogolirea va avea loc dacă

$$F_0 > T.$$

Înlocuind $F_0 = \mu_0(G + nQ)$ și T cu expresia dată de (4), va rezulta

$$\mu_0 > \frac{f_1 + f_2}{d} \frac{G}{G + nQ} + \frac{f_1}{d} \frac{nQ}{G + nQ}; \tag{5}$$

neglijînd nQ, inegalitatea (4) devine

$$\mu_0 > \frac{f_1 + f_2}{d} \tag{6}$$

Dacă

$$T > F_0, \tag{7}$$

blocul va aluneca pe rolele care rămîn fixe.

Deplasarea blocurilor pe role are o largă utilizare în uzinele de laminoare.

4.56. Ce forță P este necesară pentru a ridica pe o cale cu role un lingou de greutatea $Q = 1\,000$ daN. Diametrul unei role este $D_\rho = 10$ cm, iar unghiul α al căii de rulare, de 25°. Diametrul axului rolei este $d = 3$ cm; coeficientul frecării de alunecare, $\mu = 0,1$, iar coeficientul frecării de rostogolire, $s = 0,05$ cm. Greutatea unei role este $q = 20$ daN.

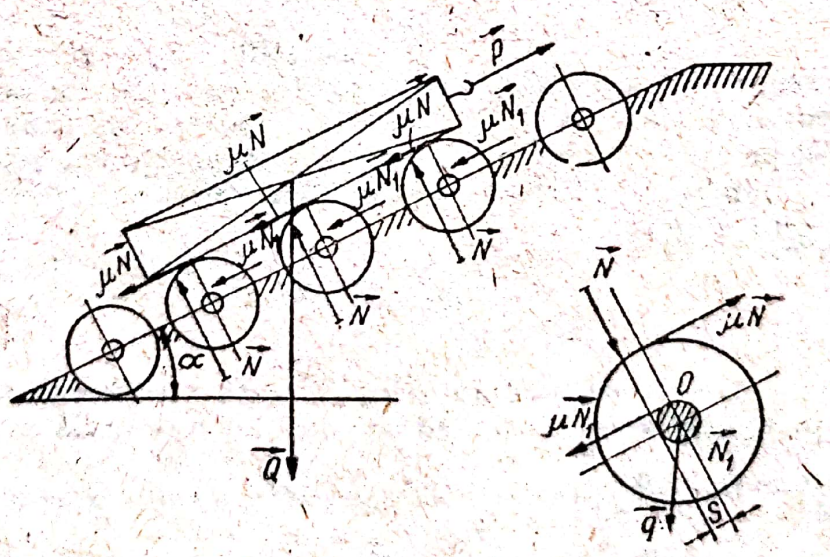


Fig. 4.56

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru ale lingoului sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad P - 3\mu N - 3\mu N_1 = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Q - 3N = 0 \tag{2}$$

Efectuăm echilibrul unei role; ecuația de momente față de axul rolei se scrie

$$\Sigma M_{(o)} = 0: \quad -\frac{D_\rho}{2}\mu N + sN + \frac{d}{2}\mu N_1 = 0. \tag{3}$$

Din (2) rezultă $N = Q/3$, substituind în (3), se obține

$$N_1 = \frac{D_\rho \mu \frac{Q}{3} - 2s\frac{Q}{3}}{\mu d} = \frac{D_\rho}{3d}Q - \frac{2s}{3\mu d}Q.$$

Înlocuind valorile lui N și N_1 în (1), rezultă

$$P = \mu Q\left(1 + \frac{D}{d} - \frac{2s}{\mu d}\right).$$

4.57. Se consideră rulmentul din figura 4.57, asupra căruia acționează sarcina fusului P, care se transmite prin intermediul carcasei interioare la bile și, de aici, la carcasa exterioară.

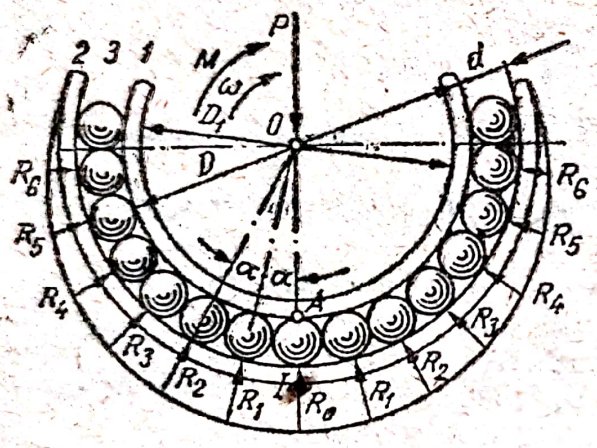


Fig. 4.57

Din cauza poziției diferite a bilelor față de linia de acțiune a lui P, reacțiunile bilelor aflate sub planul orizontal asupra carcasei interioare și reacțiunile carcasei exterioare asupra bilelor vor varia cu poziția acestora față de linia de acțiune a lui P.

Să se stabilească legea de variație a reacțiunilor $R_j (j = \overline{1, n})$ ale carcasei exterioare asupra bilelor.

Rezolvare. Introducem notațiile: R_0 — reacțiunea carcasei exterioare asupra bilei, al cărui centru se află pe linia de acțiune a sarcinii P, reacțiune care în acest caz are valoarea maximă $R_0 = R_{max}$; α — unghiul pe care-l fac între ele razele care trec prin centrele a două bile vecine; n — numărul de bile cuprinse într-un sfert de cerc, astfel că n și α sînt legate prin relația

$$n\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Proiectînd pe direcția de acțiune a lui P toate reacțiunile R_j ale bilelor aflate sub planul orizontal, și scriind că suma lor este egală cu P, se obține

$$P = R_0 + 2R_1 \cos\alpha + 2R_2 \cos 2\alpha + \ldots + 2R_n \cos n\alpha$$

sau

$$P = R_0 + 2\sum_1^n R_j \cos j\alpha. \tag{2}$$

Se va presupune că deformațiile δ_j, produse în suprafețele de contact ale bilelor și carcasei de către R_j au următoarea lege

$$\delta_j = \delta_n \cos i\alpha, \ (j = \overline{1, n}). \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația dintre deformația U_j, care apare în apropierea locului de contact dintre bilă și carcasă și R_j este dată de următoarea formulă, stabilită de Herz

$$U_j^3 = 2{,}25(1 - \mu^2)\frac{R_j^2}{rE^2} \tag{4}$$

Făcînd $j = 0$ și $j = j$, prin împărțire se obține

$$\frac{U_0^3}{U_j^3} = \frac{R_0^2}{R_j^2}$$

de unde

$$R_j = R_0\left(\frac{U_j}{U_0}\right)^{3/2} \tag{5}$$

sau, ținînd seama de (3),

$$R_j = R_0 \cos^{3/2} j\alpha, \quad (j = \overline{1, n}). \tag{6}$$

Formula (6) dă legea de variație a reacțiunilor în funcție de poziția bilelor. Înlocuind aceste valori în (2), se obține

$$P = R_0\left(1 + 2\sum_1^n \cos^{5/2} j\alpha\right),$$

de unde

$$R_0 = \frac{P}{\left(1 + 2\sum\limits_1^n \cos^{5/2} j\alpha\right)}. \tag{7}$$

Valoarea numitorului din formula de mai sus depinde de numărul m al bilelor aflate sub planul orizontal ce trece prin axa de rotație a rulmentului. Astfel,

— pentru $m = 10$ bile, $R_0 = \frac{P}{2{,}28} = \frac{4{,}38}{m}P$;

— pentru $m = 15$ bile, $R_0 = \frac{P}{3{,}44} = \frac{4{,}36}{m}P$;

— pentru $m = 20$ bile, $R_0 = \frac{P}{4{,}58} = \frac{4{,}37}{m}P$.

Se poate considera, deci, că pentru rulmenții cu $m = 10 \ldots 20$ bile, valoarea lui R_0 este dată de formula

$$R_0 = \frac{4{,}37}{m}P. \tag{8}$$

4.58. În figura 4.58, se prezintă un mecanism de frînare cu saboți, în componența căruia intră și șurubul de rază r. Se cere forța totală de frecare. Se cunosc: $P = 50$ daN, $a = 50$ cm, $b = 30$ cm, $c = 20$ cm, $d = 40$ cm, $l = 35$ cm, $r = 2$ cm, $\mu = 0{,}2$ $\alpha = 5°$, $\varphi = 8°$.

Rezolvare. Din ecuația de echilibru a șurubului

$$lP = rQ\,\mathrm{tg}(\alpha + \varphi)$$

deducem forța Q

$$Q = \frac{lP}{r\,\mathrm{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

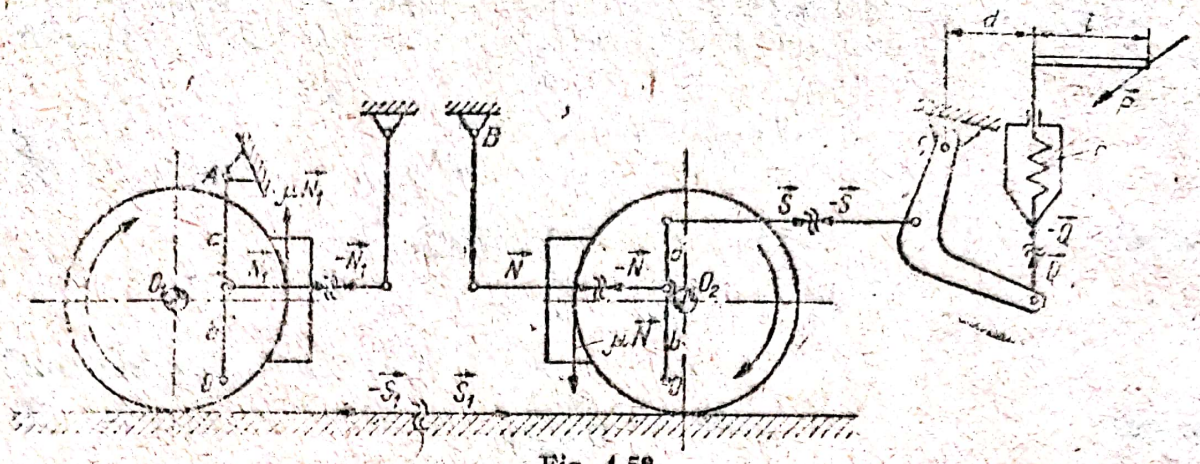


Fig. 4.58

Scriind ecuaţia de momente în raport cu punctul C, se obţine

$$dQ - cS = 0.$$

Rezultă:

$$S = \frac{d}{c} Q.$$

Ecuaţia de momente faţă de punctul O, permite determinarea reacţiunii din sabotul O_2; avem

$$bN - (a + b)S = 0$$

şi, prin urmare,

$$N = \frac{a + b}{b} S.$$

Din ecuaţia de momente faţă de punctul A se deduce reacţiunea din sabotul O_1

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad aN_1 - (a + b)S_1 = 0$$

$$N_1 = \frac{a + b}{a} S_1.$$

Pentru a stabili relaţia dintre forţe S şi S_1 vom scrie ecuaţia de momente în raport cu punctul O'

$$\Sigma M_{(O')} = 0: \quad bS_1 - aS = 0$$

deci

$$S_1 = \frac{a}{b} S = \frac{a}{b} \frac{d}{c} Q.$$

Se obţine

$$N_1 = \frac{a + b}{a} \frac{a}{b} \frac{d}{c} Q = N.$$

Forţa totală de frecare va fi deci

$$F = \mu N + \mu N_1 = 2\mu N = 2\mu \frac{a + b}{b} \frac{d}{c} Q$$

sau

$$F = 2\mu \frac{a + b}{b} \frac{d}{c} \frac{Pl}{r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)}.$$

Înlocuind valorile numerice date rezultă

$$F = 2 \cdot 0{,}2 \frac{50 + 30}{30} \frac{40}{60} \frac{50}{2 \operatorname{tg} 13^\circ} = 233 \text{ daN}.$$

4.59. Se cere să se determine forța necesară frînării momentului M, pentru frîna cu saboți din fig. 4.59, prevăzută cu un sistem mecanic de frînare, în componența căruia intră și un șurub.

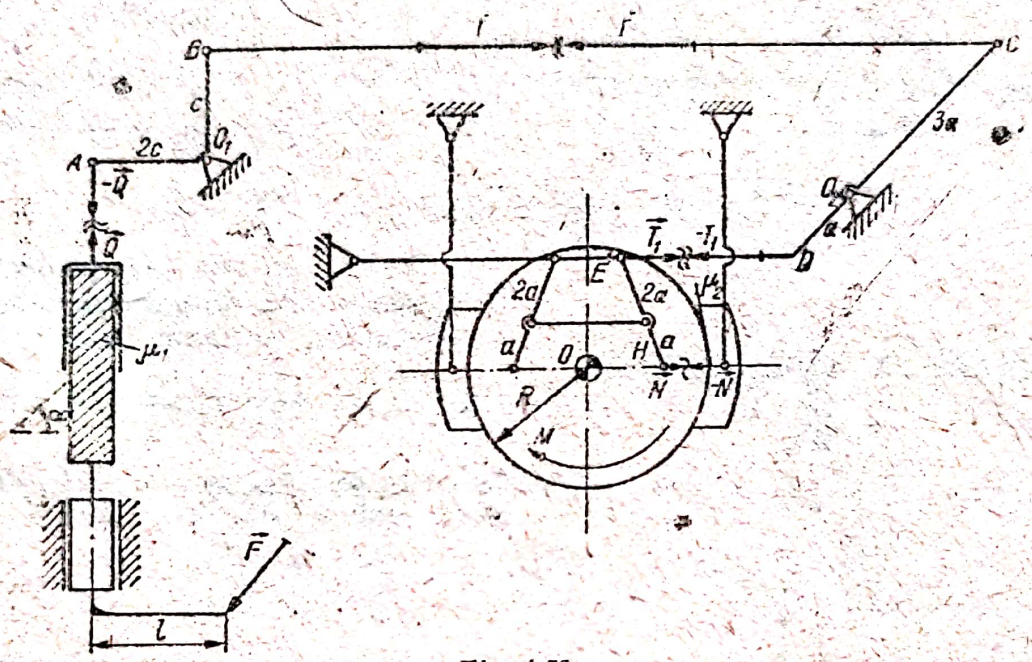


Fig. 4.59

Rezolvare. Efectuînd echilibrul șurubului, determinăm forța Q

$$Q = \frac{Fl}{r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi_1)}.$$

Din echilibrul pîrghiei O_1AB, deducem

$$T = 2Q = \frac{2lF}{r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi_1)}.$$

În mod analog, din ecuația de echilibru a pîrghiei CO_2D, obținem tensiunea T_1

$$T_1 = 3T = \frac{6lF}{r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi_1)}.$$

Ecuația de echilibru a pîrghiei EH ne conduce la

$$N = 2T_1 = \frac{12lF}{r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi_1)}.$$

Momentul de frînare fiind

$$M = 2\mu_2 RN = \frac{24\mu_2 RlF}{r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi_1)}$$

rezultă forța F

$$F = \frac{rM \operatorname{tg} (\alpha + \varphi_1)}{24\mu_2 lR}.$$

Scanned with OKEN Scanner

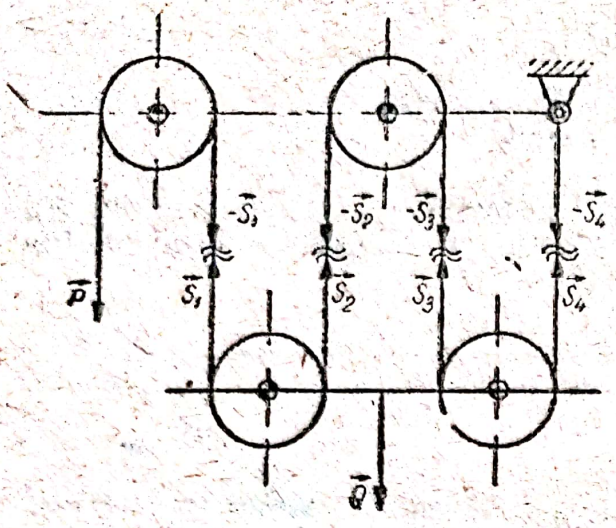


Fig. 4.60

4.60. Sarcina Q este ridicată cu ajutorul sistemului de scripeți din fig. 4.60. Să se determine forța P necesară ridicării sarcinii Q, ținînd seama și de frecări, precum și de rigiditatea cablului.

Rezolvare. Secționăm firele și punem tensiuni pe direcția firelor. Vom putea scrie următoarele relații $P = \lambda S_1$; $S_1 = \frac{P}{\lambda}$ $S_1 = \lambda S_2$; $S_2 = \frac{P}{\lambda^2}$; $S_2 = \lambda S_3$; $S_3 = \frac{S_2}{\lambda} = \frac{P}{\lambda^3}$ $S_3 = \lambda S_4$; $S_4 = \frac{S_3}{\lambda} = \frac{P}{\lambda^4}$.

Scriind ecuația de proiecții pe verticală pentru jumătatea inferioară a sistemului, obținem ecuația

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - Q = 0.$$

Substituind S_1, S_2, S_3 și S_4 cu valorile deduse mai sus, rezultă

$$\frac{P}{\lambda} + \frac{P}{\lambda^2} + \frac{P}{\lambda^3} + \frac{P}{\lambda^4} = Q$$

sau $$P\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4}\right) = Q$$

și încă $$\frac{P}{\lambda^4} \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = Q,$$

de unde $$P = \frac{\lambda^4(\lambda - 1)}{\lambda^4 - 1} Q.$$

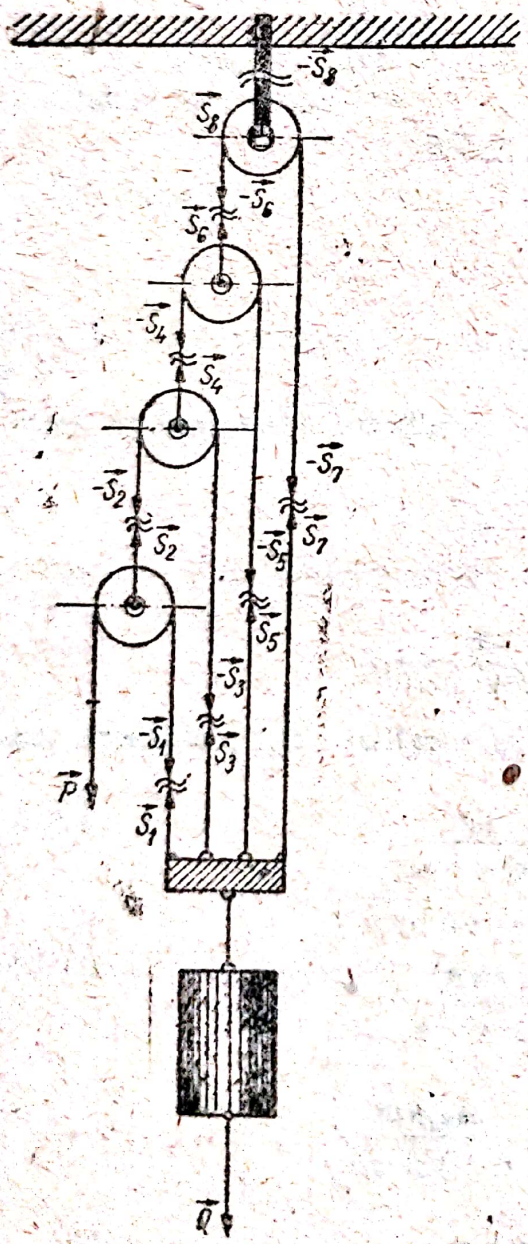


Fig. 4.61

4.61. Sistemul de scripeți din fig. 4.61 servește la ridicarea sarcinilor. Se cere să se determine forța P, necesară ridicării sarcinii Q.

Rezolvare. Secționînd firele, tensiunile pe direcțiile acestora sînt respectiv $S_1, S_2, \ldots, S_7$. Se pot scrie următoarele relații între forțe și tensiuni

$$P = \lambda S_1; \; P + S_1 = S_2; \; S_2 = \lambda S_3;$$

$$S_2 + S_3 = S_4; \; S_4 = \lambda S_5;$$

$$S_4 + S_5 = S_6;$$

$$S_6 = \lambda S_7; \; S_6 + S_7 = S_8.$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuînd echilibrul părții care conține sarcina Q, obținem

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_1 + S_3 + S_5 + S_7 - Q = 0. \tag{1}$$

Din relațiile de mai sus deducem

$$S_1 = \frac{P}{\lambda}; \; S_2 = P + \frac{P}{\lambda} = \frac{1+\lambda}{\lambda} P; \; S_3 = \frac{S_2}{\lambda} = \frac{1+\lambda}{\lambda^2} P;$$

$$S_4 = S_2 + S_3 = \frac{1+\lambda}{\lambda} P + \frac{1+\lambda}{\lambda^2} P = \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 P.$$

Observînd legea după care se formează un termen din cel anterior putem scrie direct ceilalți termeni

$$S_5 = \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^3} P; \; S_6 = \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^3 P; \; S_7 = \frac{(1+\lambda)^3}{\lambda^4} P$$

Înlocuind în ecuația (1), rezultă

$$Q = \frac{P}{\lambda}\left[1 + \frac{1+\lambda}{\lambda} + \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^3\right].$$

Generalizînd, pentru cazul a n scripeți mobili, se obține

$$Q = \frac{P}{\lambda}\left[1 + \frac{1+\lambda}{\lambda} + \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^n\right]$$

În paranteza dreptunghiulară este o progresie geometrică cu rația $\frac{1+\lambda}{\lambda}$; prin urmare, vom putea scrie

$$Q = \frac{P}{\lambda} \frac{\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^n \frac{1+\lambda}{\lambda} - 1}{\frac{1+\lambda}{\lambda} - 1} = \frac{(1+\lambda)^{n+1} - \lambda^{n+1}}{\lambda^{n+1}} P,$$

de unde

$$P = \frac{Q\lambda^{n+1}}{(1+\lambda)^{n+1} - \lambda^{n+1}}.$$

4.62. În construcția unor mașini de ridicat intră sisteme de scripeți cum este cel din fig. 4.62, compus din trei scripeți mobili, așezați într-o furcă, de care este suspendată greutatea Q și un plan format din trei scripeți ficși. Se cere să se determine forța P, necesară ridicării sarcinii Q, luînd în considerație atît frecările cît și rigiditatea cablului.

Rezolvare. Relațiile dintre tensiunile din fire și forțele **P** și **Q** sînt respectiv:

$$P = \lambda S_1; \; S_1 = \lambda S_2; \; S_2 = \lambda S_3; \; S_3 = \lambda S_4; \; S_4 = \lambda S_5 \text{ și } S_5 = \lambda S_6.$$

Ecuația de proiecții pe verticală pentru furca cu cei trei scripeți mobili se scrie

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 - Q = 0.$$

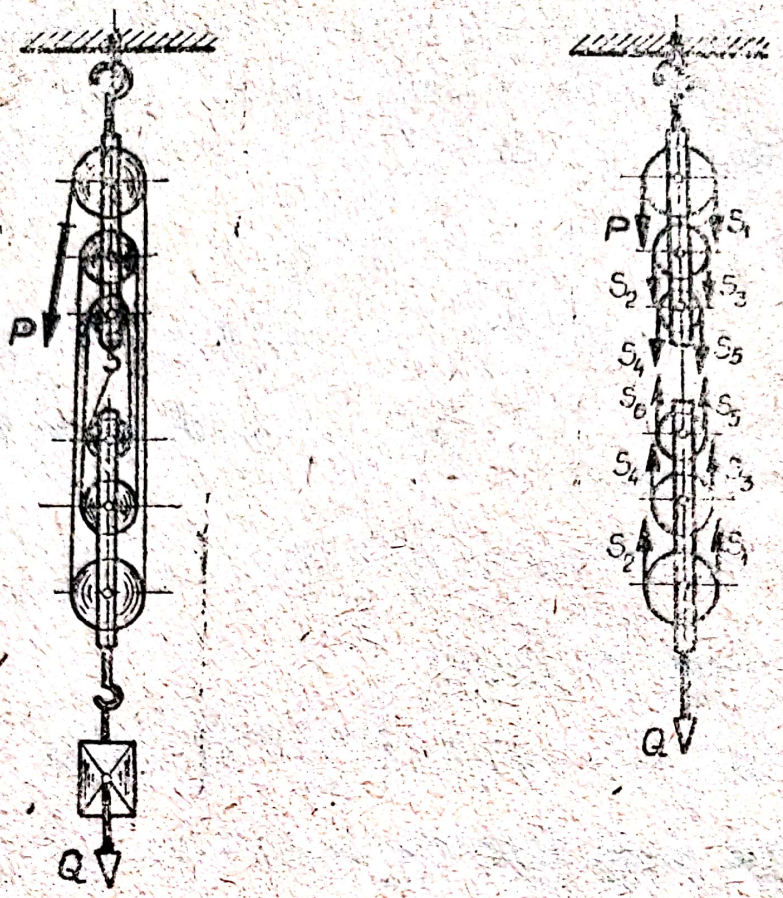


Fig. 4.62

Ţinînd seama de relaţiile de mai sus, rezultă

$$\frac{P}{\lambda}+\frac{P}{\lambda^2}+\frac{P}{\lambda^3}+\frac{P}{\lambda^4}+\frac{P}{\lambda^5}+\frac{P}{\lambda^6}=Q$$

sau $$\frac{P}{\lambda}\left(1+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^3}+\frac{1}{\lambda^4}+\frac{1}{\lambda^5}\right)=Q$$

de unde se obţine forţa P

$$P=\frac{Q\lambda^6}{1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4+\lambda^5}=\frac{Q\lambda^6(\lambda-1)}{\lambda^6-1}.$$

În cazul în care sistemul are n scripeţi, se obţine

$$P=\frac{\lambda^n(\lambda-1)}{\lambda^n-1}Q.$$

4.63. În componenţa unui aparat de ridicat, intră o presă hidraulică A, care are o cursă mică a pistonului. Aparatul ridică o greutate Q la o înălţime mare, prin intermediul unui palan, căruia îi ajută scripeţii din fig. 4.63. Se cere să se determine raportul dintre presiunea p care se exercită asupra pistonului presei şi greutatea Q, într-o poziţie de echilibru, neglijînd frecările.

Rezolvare. Forţa P ce acţionează pistonul este

$$P=\frac{\pi d^2}{4}p.$$

Secționînd cablurile și înlocuindu-le cu tensiuni pe direcțiile acestora, ecuațiile de echilibru ale scripeților sînt respectiv

$$Q = \lambda S_1;\ S_1 = \lambda S_2;\ S_2 = \lambda S_3;$$
$$S_3 = \lambda S_4;\ S_4 = \lambda S_5;\ S_6 = \lambda S_7;$$
$$S_7 = \lambda S_8.$$

Se mai pot scrie, încă, următoarele două ecuații

$$S_2 + S_3 + S_4 + S_5 - S_6 = 0$$
$$S_7 + S_8 - P = 0.$$

În continuare, rezolvăm sistemul de ecuații obținut; avem:

$$S_1 = \frac{Q}{\lambda};\ S_2 = \frac{Q}{\lambda^2};\ S_3 = \frac{Q}{\lambda^3};$$
$$S_4 = \frac{Q}{\lambda^4};\ S_5 = \frac{Q}{\lambda^5}$$
$$\frac{Q}{\lambda^2}\left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3}\right) = S_6.$$

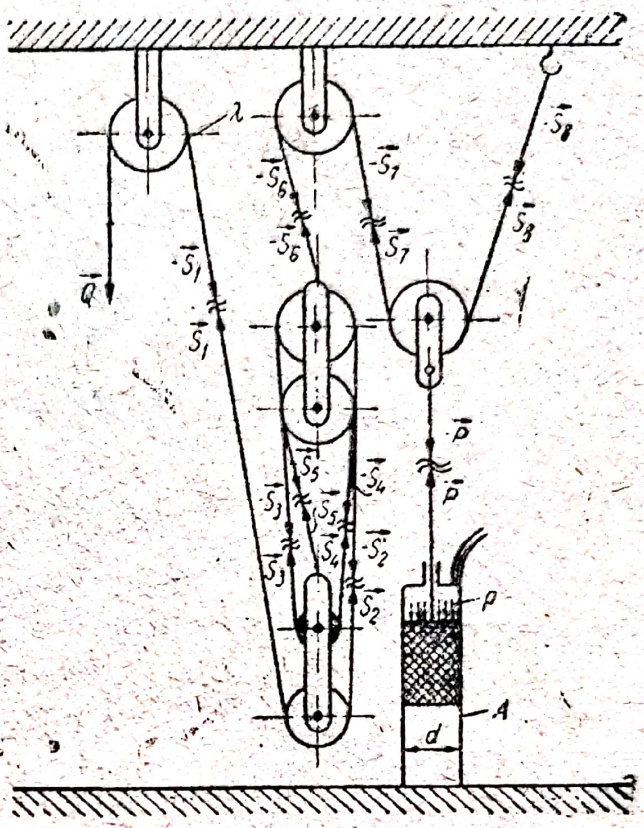


Fig. 4.63

Rezultă

$$S_6 = \frac{1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3}{\lambda^5} Q;\ S_7 = \frac{1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3}{\lambda^6} Q$$
$$S_8 = \frac{1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3}{\lambda^7} Q;\ P = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3}{\lambda^6} Q.$$

Expresia forței P capătă următoarea formă

$$P = \frac{(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3)(1 + \lambda)}{\lambda^7} Q.$$

Raportul dintre presiunea p și Q este

$$\frac{p}{Q} = \frac{4(1 + \lambda)}{\pi d^2 \lambda^7}(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3).$$

4.64. Se consideră un cuplaj spațial (fig. 3.64, a), avînd distanța dintre cele două axe g_2 și unghiul dintre axele cuplajului λ_2. Cunoscîndu-se raza r_1 și distanța d_1, se cere să se determine pentru poziția din schiță, determinată de unghiul de rotație u_1 al arborelui motor, momentul motor M_m care trebuie să acționeze asupra arborelui motor, astfel încît să poată să învingă momentul rezistent M_r de pe arborele condus, precum și torsorul forțelor de legătură din cele două cuple de rotație și din cupla „sferă-plan".

Rezolvare. Cuplajul sferic posedă două elemente mobile: elementul motor *1* și elementul condus *2*. Se alege un sistem de referință fix $OXYZ$ astfel încît axa OZ să fie orientată pe direcția arborelui motor, iar

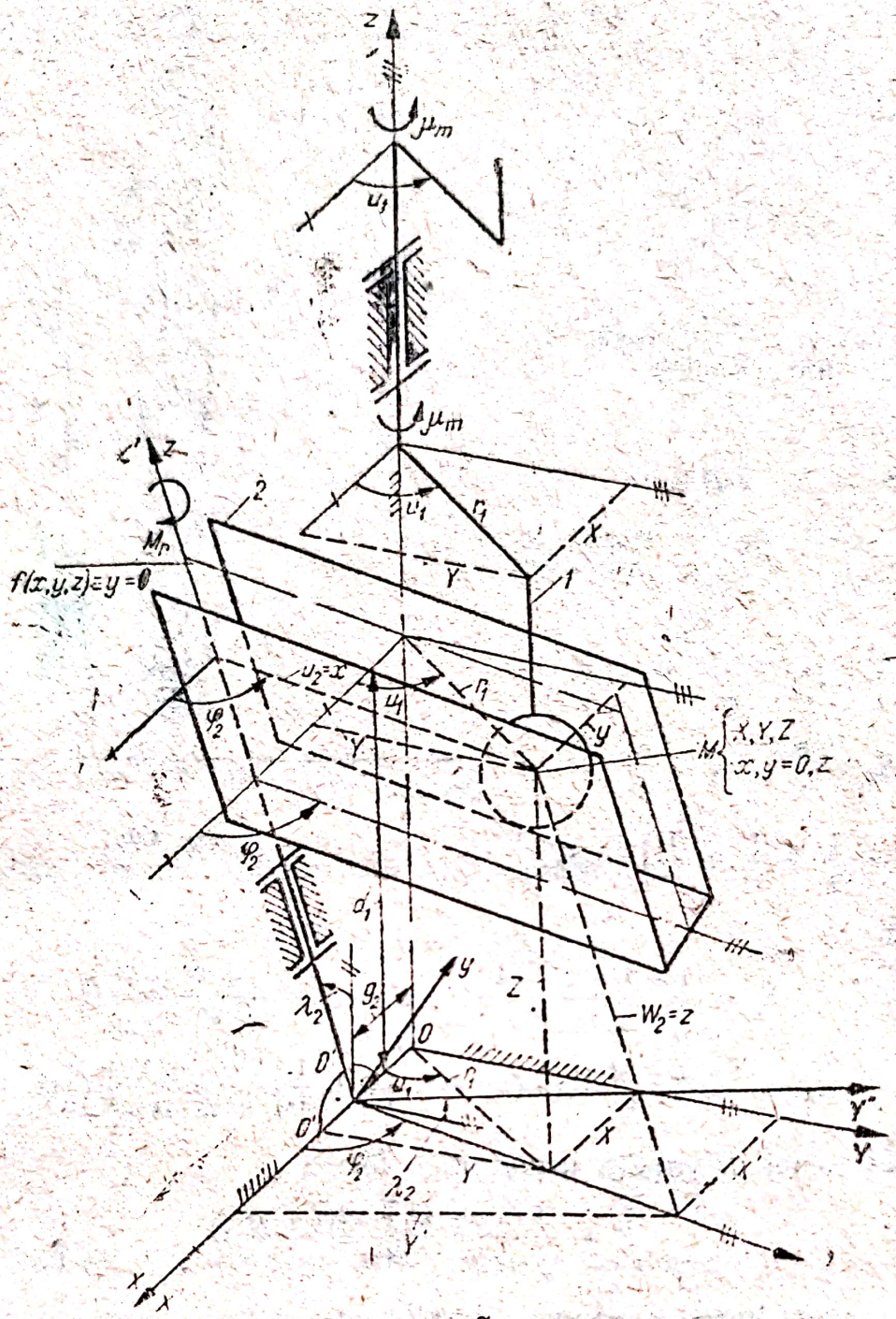


Fig. 4.64 a

axa OX pe normala comună a axelor de simetrie a celor doi arbori, cum se poate vedea în fig. 4.64, a. Se consideră încă un sistem de axe $O'X'Y'Z'$, avînd axa $O'X'$ dirijată pe direcţia axei OX, iar axa $O'Z'$ — pe axa arborelui condus; prin urmare, sistemul $O'X'Y'Z'$ este rotit în jurul axei OX cu unghiul λ_2 faţă de sistemul $OXYZ$. De elementul condus 2, se leagă sistemul de axe $Oxyz$, cu axa Oz pe axa arborelui condus, care coincide cu axa $O'Z'$ şi, axa Ox rotită cu unghiul φ_2 faţă de axele $O'X'$ sau OX.

Poziţia elementului condus 2 este determinată de unghiul de rotaţie φ_2, iar prin poziţia relativă a centrului M al sferei în raport cu elementul mobil 2 este determinată de parametrii geometrici (coordonatele) u_2 şi w_2.

În continuare, se vor introduce notațiile: S — sinus; C — cosinus. Din fig. 4.64, a, se obțin coordonatele centrului M al sferei în raport cu sistemul de referință fix $OXYZ$

$$X = r_1 C u_1;\ Y = r_1 S u_1;\ Z = d_1. \tag{1}$$

Coordonatele punctului M în raport cu sistemul $OXYZ$ se pot exprima în funcție de coordonatele aceluiași punct cu sistemul $O'X'Y'Z'$, prin relațiile

$$X = X' + g_2,\ Y = Y' + C\lambda_2 - Z'S\lambda_2,\ Z = Y'S\lambda_2 + Z'C\lambda_2. \tag{2}$$

Coordonatele punctului M în raport cu sistemul $O'X'Y'Z'$ se pot exprima în funcție de coordonatele aceluiași punct în raport cu sistemul $Oxyz$, cu ajutorul relațiilor

$$X' = xC\varphi_2 - yS\varphi_2;\ Y' = xS\varphi_2 + yC\varphi_2;\ Z' = z. \tag{3}$$

Din (2) și (3) deducem

$$X = g_2 + xC\varphi_2 - yS\varphi_2,\ Y = (xS\varphi_2 + yC\varphi_2)C\lambda_2 - zS\lambda_2 \tag{4}$$
$$Z = (xS\varphi_2 + yC\varphi_2)S\lambda_2 + zC\lambda_2.$$

Din fig. 4.64, a rezultă

$$x = u_2;\ y = 0;\ z = w_2. \tag{5}$$

Utilizînd relațiile (5), relațiile (4) devin

$$X = g_2 + u_2C\varphi_2;\ Y = u_2C\lambda_2S\varphi_2 - w_2S\lambda_2;\ Z = u_2S\varphi_2S\lambda_2 + w_2C\lambda_2. \tag{6}$$

Comparînd relațiile (1) și (6) se obține sistemul de ecuații avînd ca necunoscute φ_2, u_2 și w_2

$$\begin{aligned} g_2 + u_2C\varphi_2 - rCu_1 &= 0 \\ u_2S\varphi_2C\lambda_2 - wS\lambda_2 - r_1Su_1 &= 0 \\ u_2S\varphi_2 - w_2C\lambda_2 - d_1 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

de unde se obțin

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{r_1Su_1C\lambda_2 + d_1S\lambda_2}{r_1Cu_1 - g_2} \tag{8}$$

$$u_2 = \sqrt{(r_1Su_1C\lambda_2 + d_1S_2)^2 + (r_1Cu_1 - g_2)^2} \tag{9}$$

$$w_2 = \frac{1}{C\lambda_2}(d_1 - u_2S\varphi_2S\lambda_2). \tag{10}$$

Din fig. 4.64, a deducem relațiile

$$x = X'C\varphi_2 + Y'S\varphi_2;\ y = Y'C\varphi_2 - X'S\varphi_2;\ z = Z' \tag{11}$$

$$X' = X - g_2;\ Y' = YC\lambda_2 + ZS\lambda_2;\ Z' = ZC\lambda_2 - YS\lambda_2 \tag{12}$$

Din relațiile (11) și (12) se obține

$$\begin{aligned} x &= (X - g_2)C\varphi_2 + (YC\lambda_2 + ZS\lambda_2)S\varphi_2 \\ y &= (YC\lambda_2 + ZS\lambda_2)C\varphi_2 - (X - g_2)S\varphi_2 \\ z &= ZC\lambda_2 - YS\lambda_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația planului mobil în raport cu sistemul mobil $Oxyz$ este

$$f(x, y, z) = y = 0. \tag{14}$$

Ecuația aceluiași plan mobil în raport cu sistemul fix $OXYZ$ se obține utilizînd relația (14) în care se înlocuiește valoarea lui y dată de a doua relație a sistemului (13)

$$F(\varphi_2, X, Y, Z) \equiv (YC\lambda_2 + ZS\lambda_2)C\varphi_2 - (X - g_2)S\varphi_2 = 0. \tag{15}$$

Pentru determinarea momentului motor M_m și a torsorului forțelor de legătură se vor separa cele două corpuri (fig. 4.64, b, c) și se scriu pentru fiecare corp în parte cîte șase ecuații de echilibru. Reacțiunea normală a bilei asupra planului este

$$\mathbf{N} = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right). \tag{16}$$

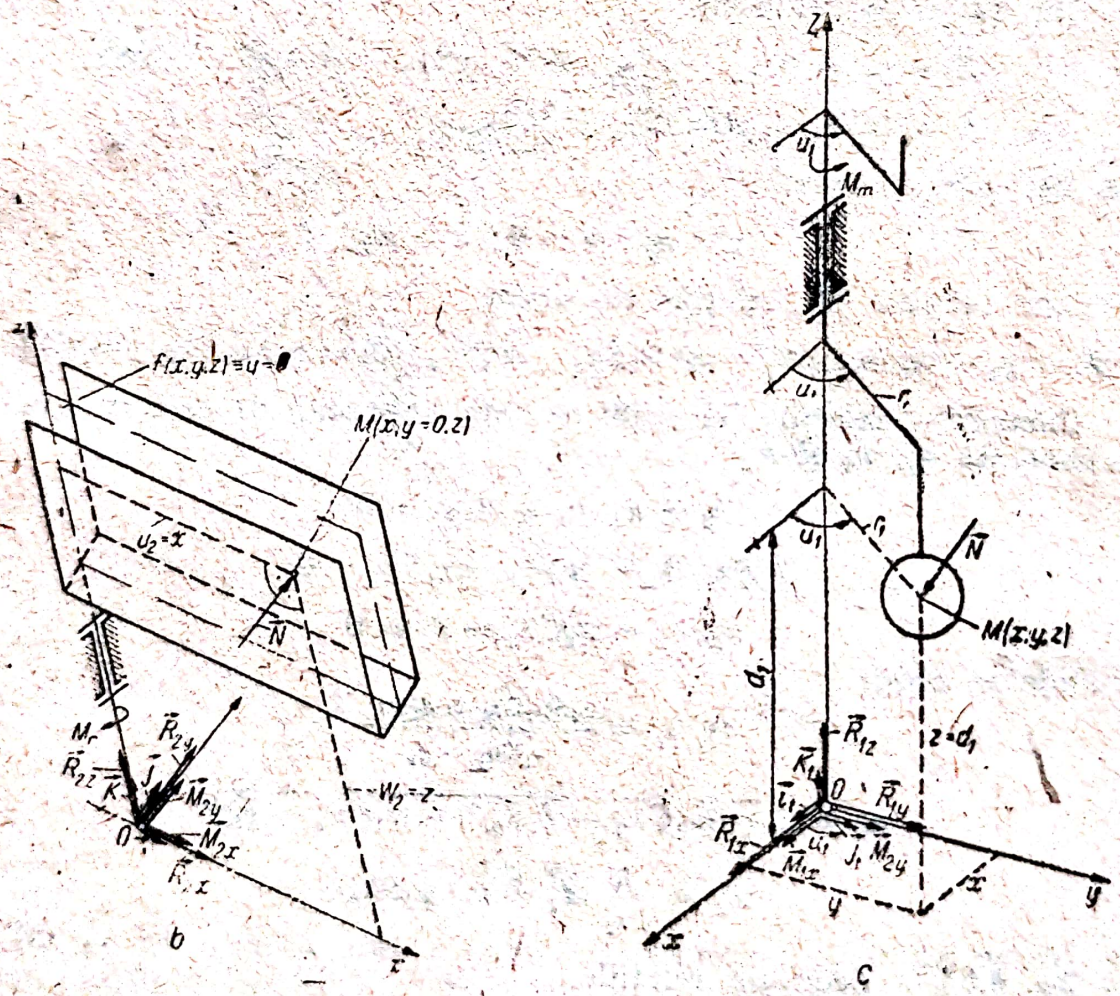


Fig. 4.64 b, c

În baza relației (14) rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1\,; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{17}$$

Utilizînd relațiile (17), relația (16) devine

$$\mathbf{N} = \lambda\mathbf{j}. \tag{18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţiile de echilibru ale corpului condus 2 în raport cu sistemul mobil de axe $Oxyz$ vor fi:

$$R_{2x} = 0;\ R_{2y} + \lambda = 0;\ M_{2x} - \lambda\, w_2 = 0;\ M_r - u_2\lambda = 0 \qquad (19)$$

de unde se obţin necunoscutele

$$\lambda = N = \frac{M_r}{u_2};\ R_{2x} = 0;\ R_{2y} = -\lambda = -\frac{M_r}{u_2};\ R_{2z} = 0;$$

$$M_{2x} = \lambda w_2 = M_r \frac{w_2}{u_2};\ M_{2y} = 0. \qquad (20)$$

În relaţiile (20), u_2 şi w_2 se vor substitui cu valorile date de (9) şi (10).

Reacţiunea normală a planului asupra bilei se va exprima în sistemele de axe $OXYZ$

$$-\mathbf{N} = -\left(\frac{\partial F}{\partial X}\mathbf{i}_1 + \frac{\partial F}{\partial Y}\mathbf{j}_1 + \frac{\partial F}{\partial Z}\mathbf{k}_1\right). \qquad (21)$$

Pe baza relaţiei (15), se obţine

$$\frac{\partial F}{\partial X} = -S\varphi_2;\ \frac{\partial F}{\partial Y} = C\lambda_2 C\varphi_2;\ \frac{\partial F}{\partial Z} = S\lambda_2 C\varphi_2. \qquad (22)$$

Utilizînd (22), relaţia (21) devine

$$-\mathbf{N} = \lambda(S\varphi_2\mathbf{i}_1 - C\lambda_2 C\varphi_2\mathbf{j}_1 - S\lambda_2 C\varphi_2\mathbf{k}_1). \qquad (23)$$

Ecuaţiile de echilibru ale momentului motor 1 vor fi

$$R_{1x} - \lambda\frac{\partial F}{\partial X} = 0;\ R_{1y} - \lambda\frac{\partial F}{\partial Y} = 0;\ R_{1z} - \lambda\frac{\partial F}{\partial Z} = 0$$

$$M_{1x} - \lambda\left(Y\frac{\partial F}{\partial Z} - Z\frac{\partial F}{\partial Y}\right) = 0;\ M_{1y} - \lambda\left(Z\frac{\partial F}{\partial X} - Y\frac{\partial F}{\partial Z}\right) = 0 \qquad (24)$$

$$M_{1z} - \lambda\left(X\frac{\partial F}{\partial Y} - Y\frac{\partial F}{\partial X}\right) = 0$$

de unde se obţine

$$R_{1x} = \lambda\frac{\partial F}{\partial X} = -\frac{M_r}{u_2}S\varphi_2;\ R_{1y} = \lambda\frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{M_r}{u_2}C\lambda_2 C\varphi_2$$

$$R_{1z} = \lambda\frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{M_r}{u_2}S\lambda_2 C\varphi_2$$

$$M_{1x} = \lambda\left(Y\frac{\partial F}{\partial Z} - Z\frac{\partial F}{\partial Y}\right) = \frac{M_r}{u_2}(r_1 S u_1 S\lambda_2 C\varphi_2 - d_1 C\lambda_2 C\varphi_2)$$

$$M_{1y} = \lambda\left(Z\frac{\partial F}{\partial X} - X\frac{\partial F}{\partial Z}\right) = -\frac{M_r}{u_2}(d_1 S\varphi_2 + r_1 C u_1 S\varphi_2 C\lambda_2) \qquad (25)$$

$$M_m = \lambda\left(X\frac{\partial F}{\partial Y} - Y\frac{\partial F}{\partial X}\right) = M_r\frac{r_1}{u_2}(C u_1 C\lambda_2 C\varphi_2 + S u_1 S\varphi_2).$$

În relaţiile (25), φ_2, u_2 şi w_2 sînt determinaţi în funcţie de unghiul de rotaţie u_1 al elementului motor de relaţiile (8), (9) şi (10).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $g_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$ (axele de simetrie ale celor doi arbori sînt coliniare) se obține din relațiile (8), (9) și (10)

$$u_2 = r_1; \quad v_2 = u_1; \quad w_2 = d_1. \tag{26}$$

Utilizînd relațiile (26), din ultima relație (25), se obține pentru acest caz

$$M_m = M_r. \tag{27}$$

C. PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

4.65. O structură mecanică este formată din două arce $\widehat{AB}$ și $\widehat{BC}$ fiind încărcată ca în figură. Presupunînd arcele articulate în A, B și C se cere să se determine reacțiunile din articulații, în funcție de forțele **F** și **H**.

R. $X_A = \dfrac{2{,}828F - 5{,}828H}{7{,}424}$; $Y_A = \dfrac{5{,}242F - 1{,}5H}{7{,}242}$

$X_B = X_C = \dfrac{1{,}414}{7{,}242}(1{,}5H + 2F)$; $Y_B = Y_C = \dfrac{1{,}5H + 2F}{7{,}242}$.

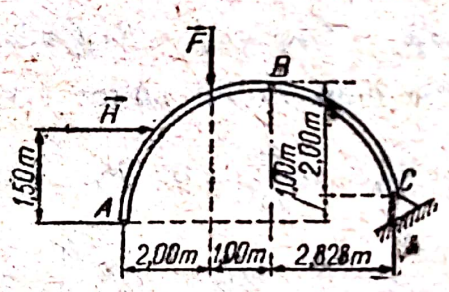


Fig. 4.65

4.66. O placă de greutate **P**, avînd forma unui triunghi echilateral ABC cu latura a, se reazemă cu vîrfurile A, B, C pe trei plane perpendiculare între ele: xOy, yOz și zOx, ca în figură. În vîrful A placa este legată de punctul O printr-un fir de lungime l, care împarte unghiul xOy în două

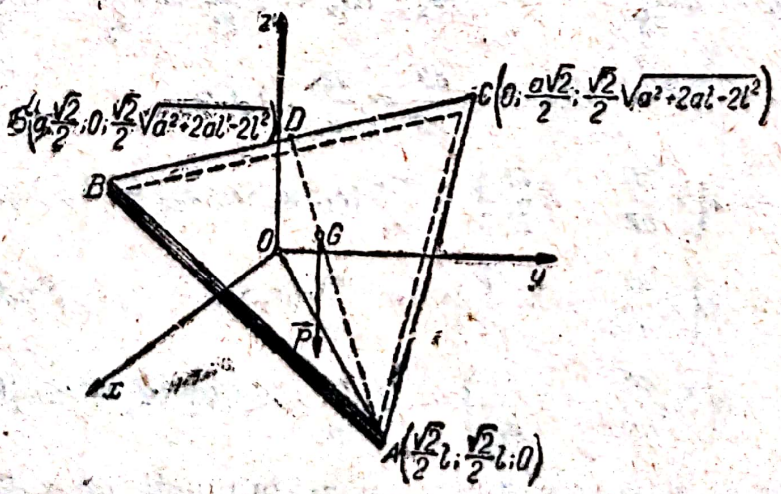


Fig. 4.66

părți egale. Să se afle reacțiunile din punctele A, B, C și tensiunea T a firului, dacă $OB' = OC'$.

R. $N_A = P$, $N_B = N_C = \dfrac{2l - a}{3\sqrt{a^2 + 2al - 2l^2}} P$;

$$T = \frac{\sqrt{2}(2l - a)P}{3\sqrt{a^2 + 2}}.$$

4.67. Un lanț de lungime l și greutate p daN/m alunecă pe sistemul de plane înclinate ABC, cum se poate vedea în fig. 4.67, coeficientul de frecare dintre plan și lanț fiind μ. Să se determine lungimea x pentru care lanțul se află în echilibru.

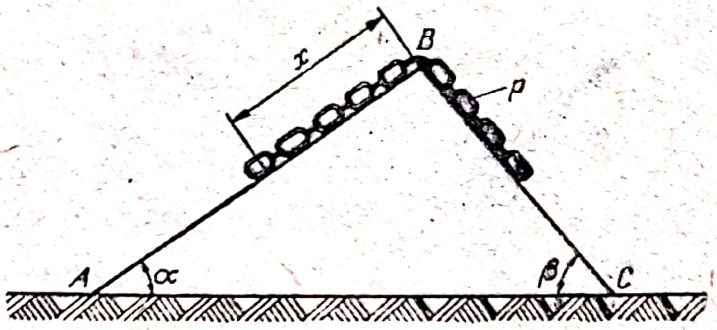


Fig. 4.67

R. $\dfrac{l - x}{x} \leqslant \dfrac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\beta - \mu\cos\beta}$;

$$\frac{l - x}{x} \geqslant \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\beta + \mu\cos\beta}.$$

4.68. Să se determine reacțiunile din reazemele A, B și D ale grinzii cu articulații $ABCDE$ din fig. 4.68, încărcată pe consola DE cu o sarcină uniform distribuită de p kN/m și având la mijlocul deschiderii AB o sarcină $\mathbf{P}$, înclinată cu unghiul α față de orizontală.

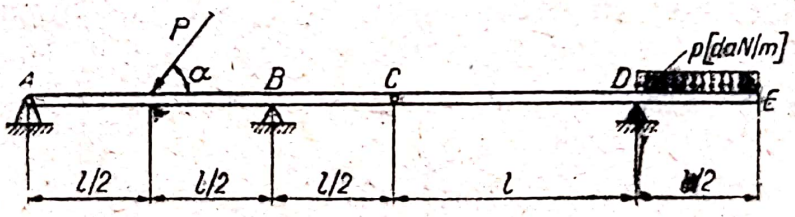


Fig. 4.68

R. $H_A = P\cos\alpha$; $V_A = \dfrac{P}{2}\sin\alpha + \dfrac{pl}{16}$;

$$V_B = \frac{P}{2}\sin\alpha - \frac{3}{16}pl;\quad V_D = \frac{5}{8}pl.$$

4.69. Se consideră mecanismul din fig. 4.69, pentru care se cere să se afle coeficientul de frecare μ dintre patina C și ghidajul acesteia, pentru ca sistemul să rămînă în poziție de echilibru determinată prin unghiul α. Se cunosc greutățile $\mathbf{P}$ și $\mathbf{G}$ ale celor două brațe și lungimile $AB = BC = l$.

R. $\mu \geqslant \dfrac{P + G}{3P + G}\operatorname{ctg}\alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

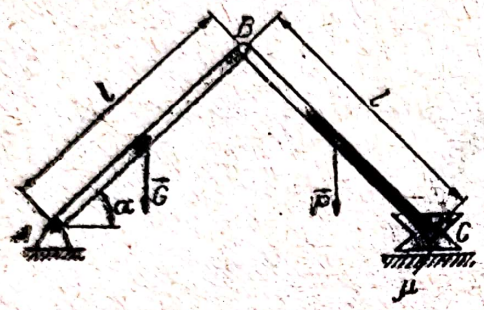


Fig. 4.69

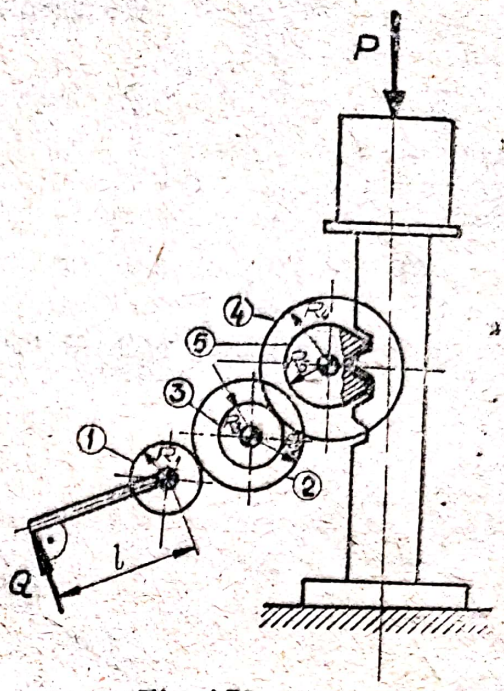


Fig. 4.70

4.70. Se consideră cricul din fig. 4.70. Cunoscînd razele roților dințate din construcția cricului și lungimea l a pîrghiei O_1A, se cere să se determine relația dintre forțele P și Q.

R. $P = \dfrac{r_2 \cdot r_4 \cdot l}{r_1 \cdot r_3 \cdot r_5} Q$.

4.71. Ciocanul cu tijă AB este pus în funcțiune de bolțurile M, fixate pe un arbore. Greutatea ciocanului este de 180 daN. Distanța dintre ghidajele C și D este $b = 1{,}5$ m, iar distanța de la punctul de atingere al bolțului cu proeminența tijei ciocanului, pînă la axa ciocanului este egală cu $a = 0{,}15$ m. Să se determine forța P, necesară ridicării ciocanului, dacă se consideră că forța de frecare dintre tija ciocanului și ghidaje este egală cu 0,15 din presiunea dintre părțile în frecare (fig. 4.71).

R. $P = 186$ daN.

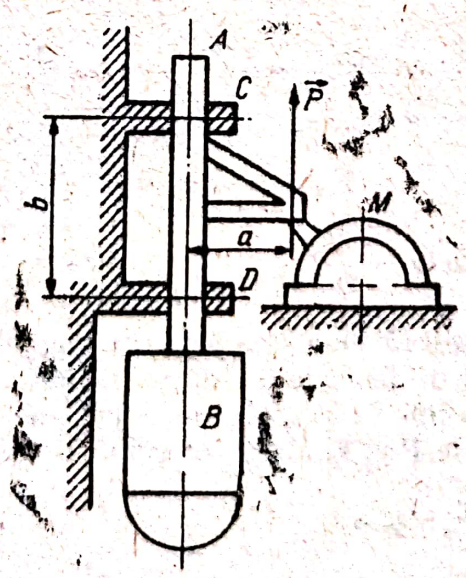
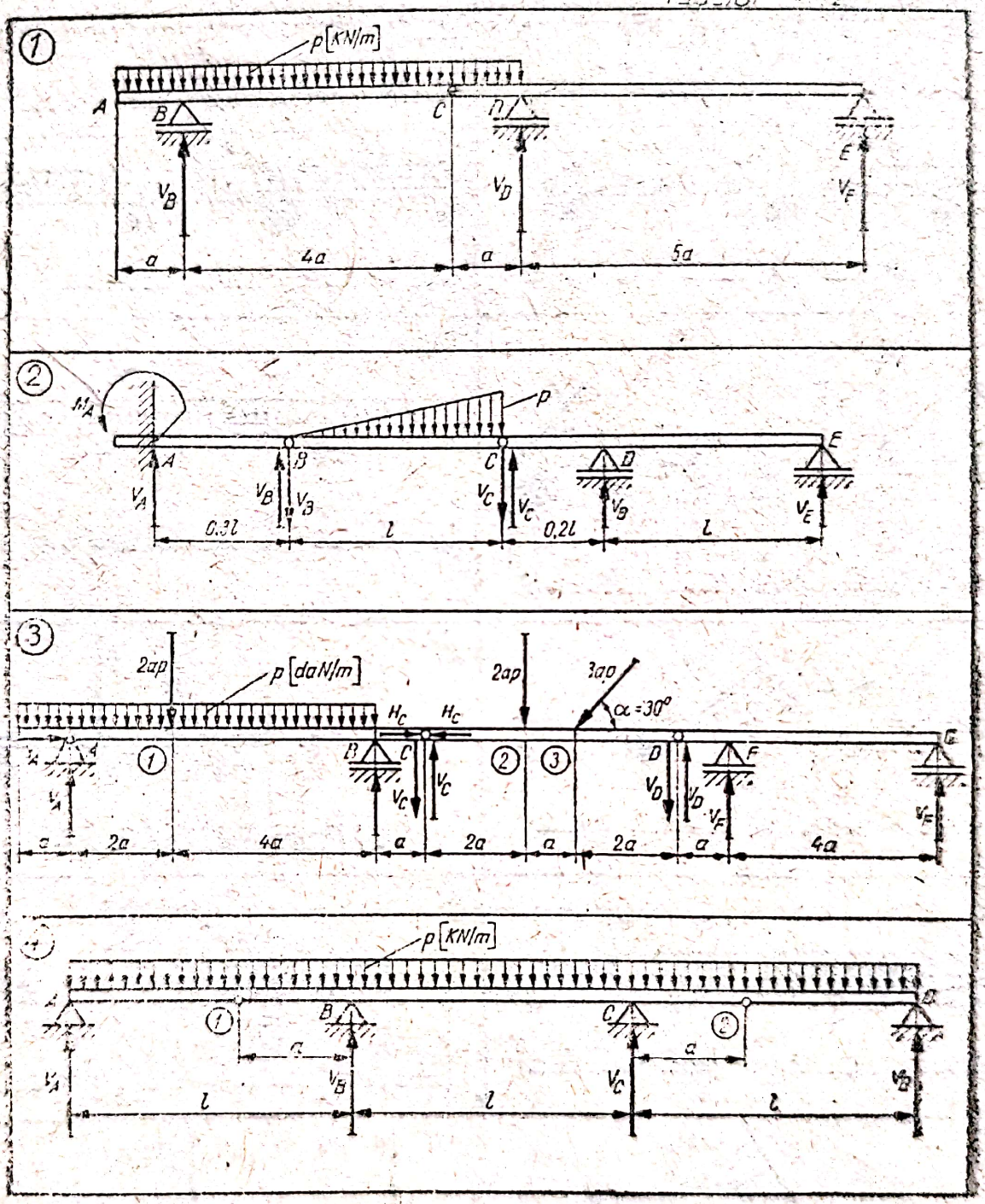


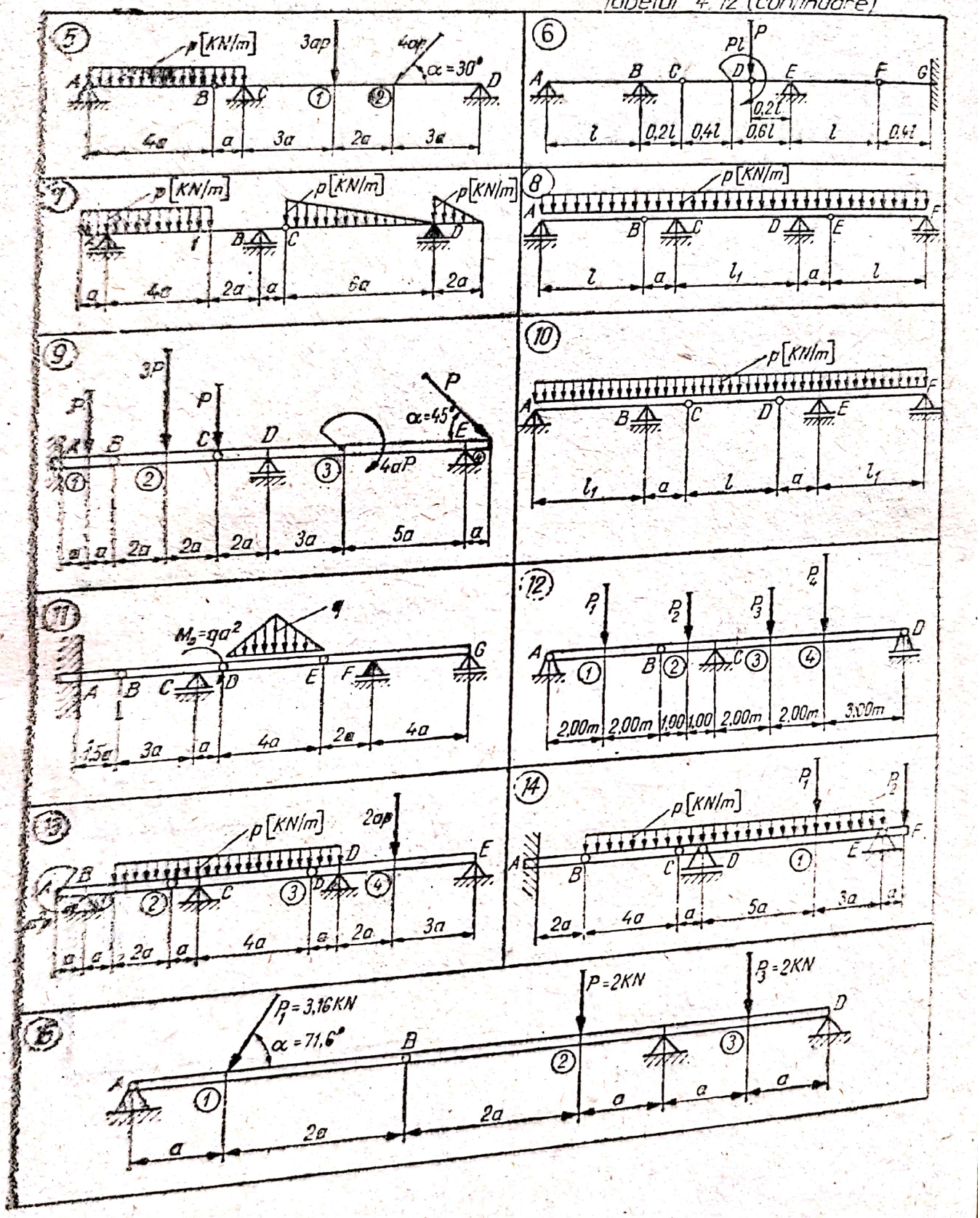
Fig. 4.71

4.72. Să se rezolve problemele din tabelul 4.72.
Enunţurile şi răspunsurile sînt date în tabelul 4.72, a.

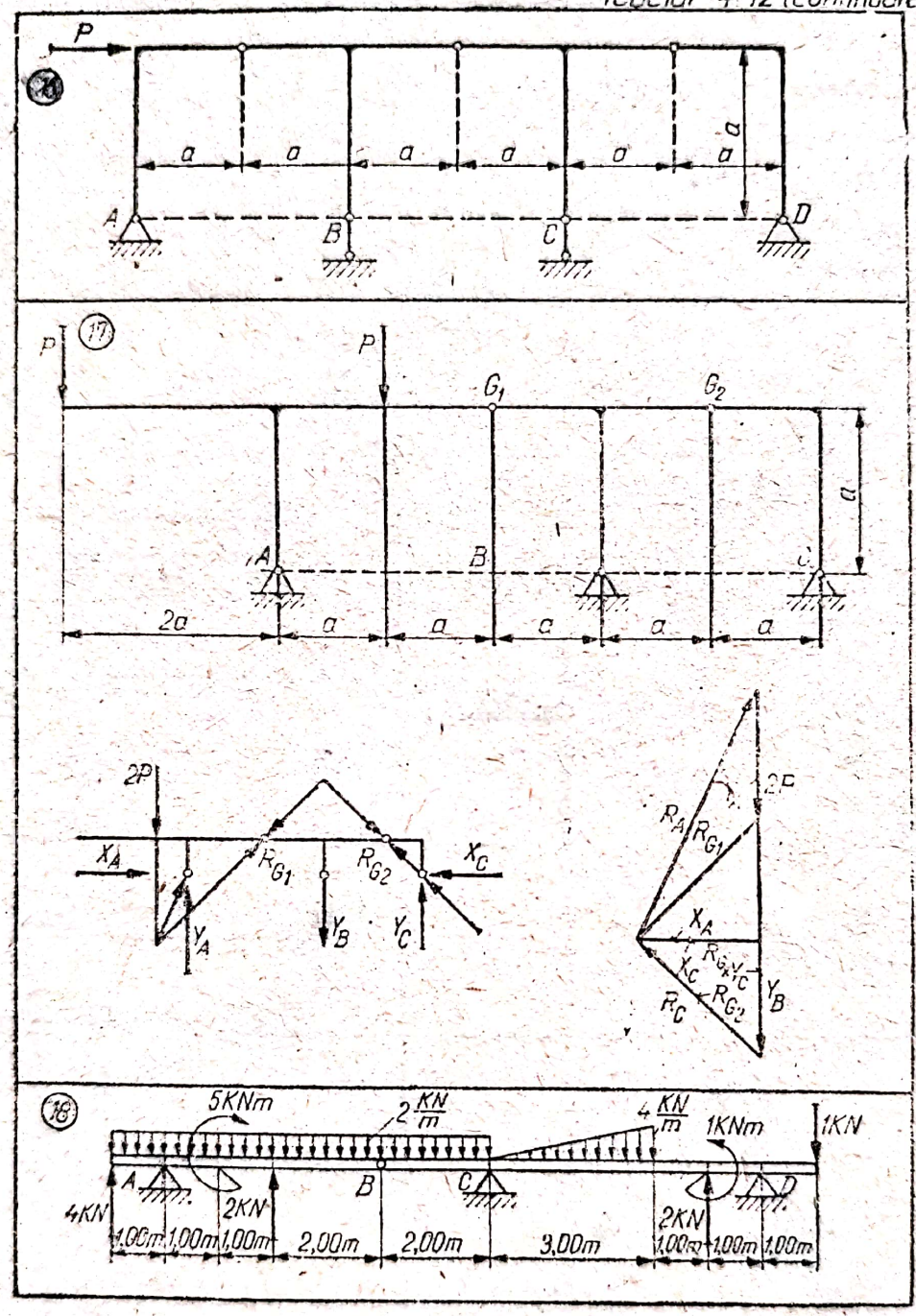
Tabelul 4.72



Tabelul 4.72 (continuare)

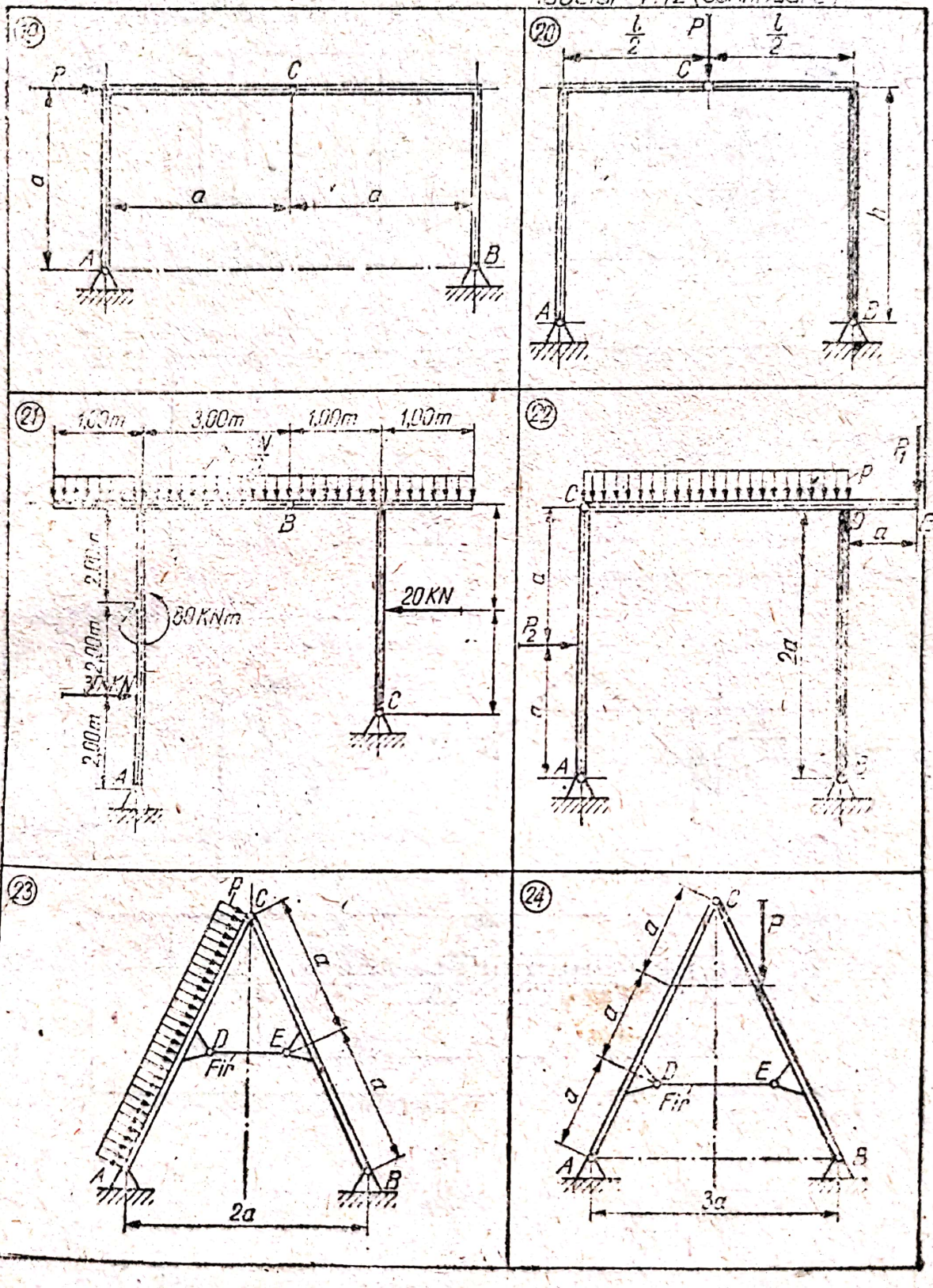


Tabelul 4.72 (continuare)



Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.72 (continuare)



Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.72 (continuare)

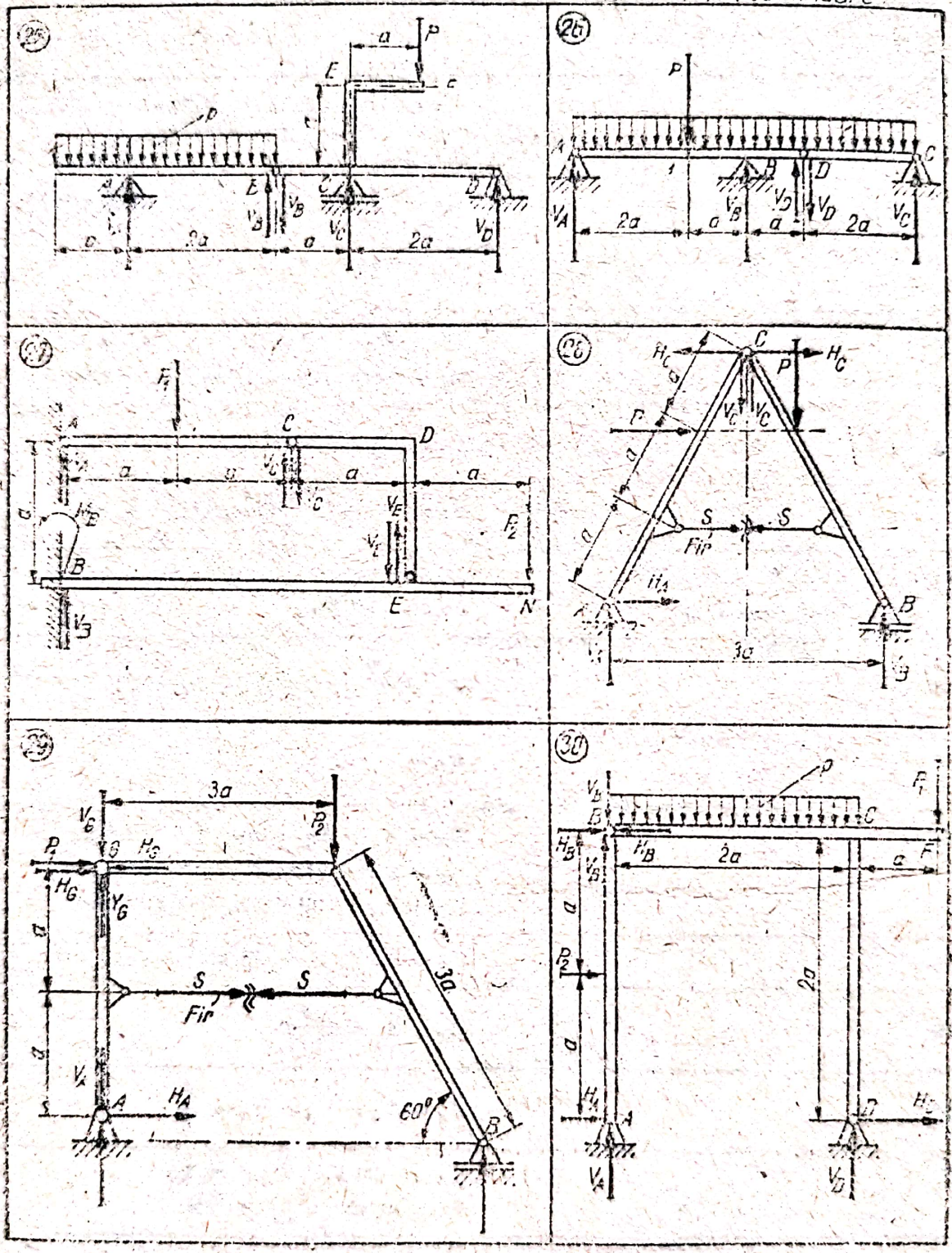


Fig.	Enunț	Răspuns
1.		$V_B = 3{,}125pa$; $V_C = 1{,}875pa$; $V_D = 3{,}35pa$; $V_E = -0{,}475pa$.
2.		$V_A = 0{,}16pl$; $M_A = \frac{pl^2}{20}$; $V_B = 0{,}16pl$; $V_C = 0{,}33pl$; $V_E = -\frac{pl}{15}$;
3.		$H_A = H_C = 1{,}5\sqrt{3}ap$; $V_A = 4{,}9ap$; $V_C = 1{,}8ap$; $V_D = 1{,}7ap$; $V_F = 2{,}125ap$.
4.		$V_A = V_D = \frac{(l-a)p}{2}$; $V_B = V_C = \frac{(2l+a)p}{2}$;
15.	$P_1 = 3{,}16$ kN; $P = 2$ kN; $P_3 = 2$ kN; $\alpha = 71{,}6°$.	$X_A = 1$ kN; $V_A = 2$ kN; $V_C = 6{,}5$ kN; $V_D = -1{,}5$ kN;
16.		$R_A = \frac{\sqrt{2}}{2}P$; $R_B = P$; $R_C = P$; $R_D = \frac{\sqrt{2}}{2}P$.
17.		$X_A = X_C = X_{G_1} = X_{G_2} = P = 10^3$ N; $Y_A = 3{,}16 \cdot 10^3$ N; $Y_B = 2 \cdot 10^3$ N; $Y_{G_1} = Y_{G_2} = 10^3$ N; $R_C = 1{,}41 \cdot 10$ N
18.		$Y_A = 1$ kN; $Y_C = 15$ kN; $Y_D = 1$ kN.
19.		$R_A = R_B = \frac{\sqrt{2}}{2}P$;
20.		$X_A = X_B = Y_A = Y_B = \frac{P}{2}$.
21.		$X_A = -20$ kN; $Y_A = 80$ kN; $X_C = 10$ kN; $Y_C = 40$ kN.
22.	$P_1 = \frac{1}{2}P_2 = 4ap$.	$X_A = -P_1$; $Y_A = -\frac{5}{4}P_1$; $X_B = -P_1$; $Y_B = \frac{11}{4}P_1$; $X_C = P_1$; $Y_C = -\frac{5}{4}P_1$.

Scanned with OKEN Scanner

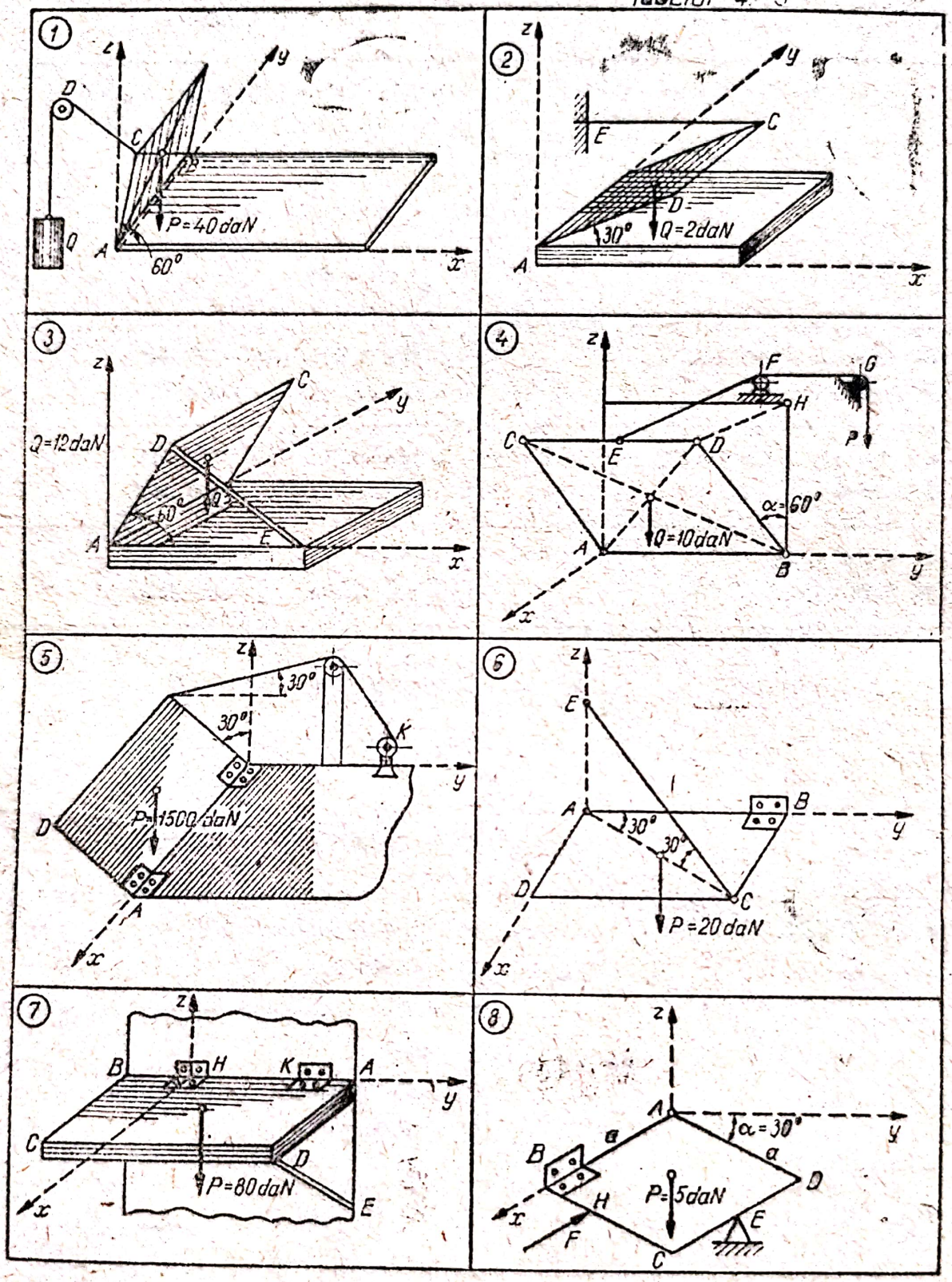
Tabelul 4.72,a (continuare

Fig.	Enunț	Răspuns
23.	$a = 1$ m; $p = 2 \cdot 10^3$ daN · m^{-1}	$X_A = 3{,}46 \cdot 10^3$ daN; $Y_A = 0$; $X_B = 0$; $Y_B = 2 \cdot 10^3$ daN; $S = 2{,}31 \cdot 10^3$ daN.
24.		$H_A = 0$; $V_A = \frac{P}{3}$; $V_B = \frac{2}{3}P$; $S = \frac{P}{6}\sqrt{3} = H_C$.
25.	$a = 2$ m; $p = 100$ daN/m; $P = 500$ daN;	$V_A = 450$ daN; $V_B = -150$ daN; $V_C = 475$ daN; $V_D = 175$ daN.
26.	$a = 1$ m; $p = 1000$ daN/m; $P = 2000$ daN.	$V_A = 1670$ daN; $V_B = 5330$ daN; $V_C = 1000$ daN; $V_D = 1000$ daN.
27.	$P_1 = 150$ daN; $P_2 = 75$ daN; $a = 1$ m.	$V_A = 75$ daN; $V_B = 150$ daN; $M_B = 450$ daNm; $V_E = 1{,}5$ daN.
28.		$V_A = \frac{1-\sqrt{3}}{3}P$; $H_A = -P$ $V_C = \frac{\sqrt{3}-1}{2}P$; $H_C = \frac{P}{6}(\sqrt{3}+3) = S$ $V_B = \frac{P}{3}(\sqrt{3}+2)$.
29.	$P_1 = 200$ daN; $P_2 = 150$ daN; $a = 1$ m.	$V_A = -38{,}8$ daN $H_A = -200$ daN $R_A = 204$ daN $S = 400$ daN $H_G = 400$ daN $V_G = 38{,}9$ daN.
30.	$P_2 = 150$ daN; $P_1 = 75$ daN; $p = P_1/4a = P_2/8a$.	$V_A = -\frac{375}{4}$ daN $V_B = -\frac{375}{4}$ daN $H_A = -75$ daN; $H_B = 75$ daN $V_D = \frac{825}{4}$ daN;

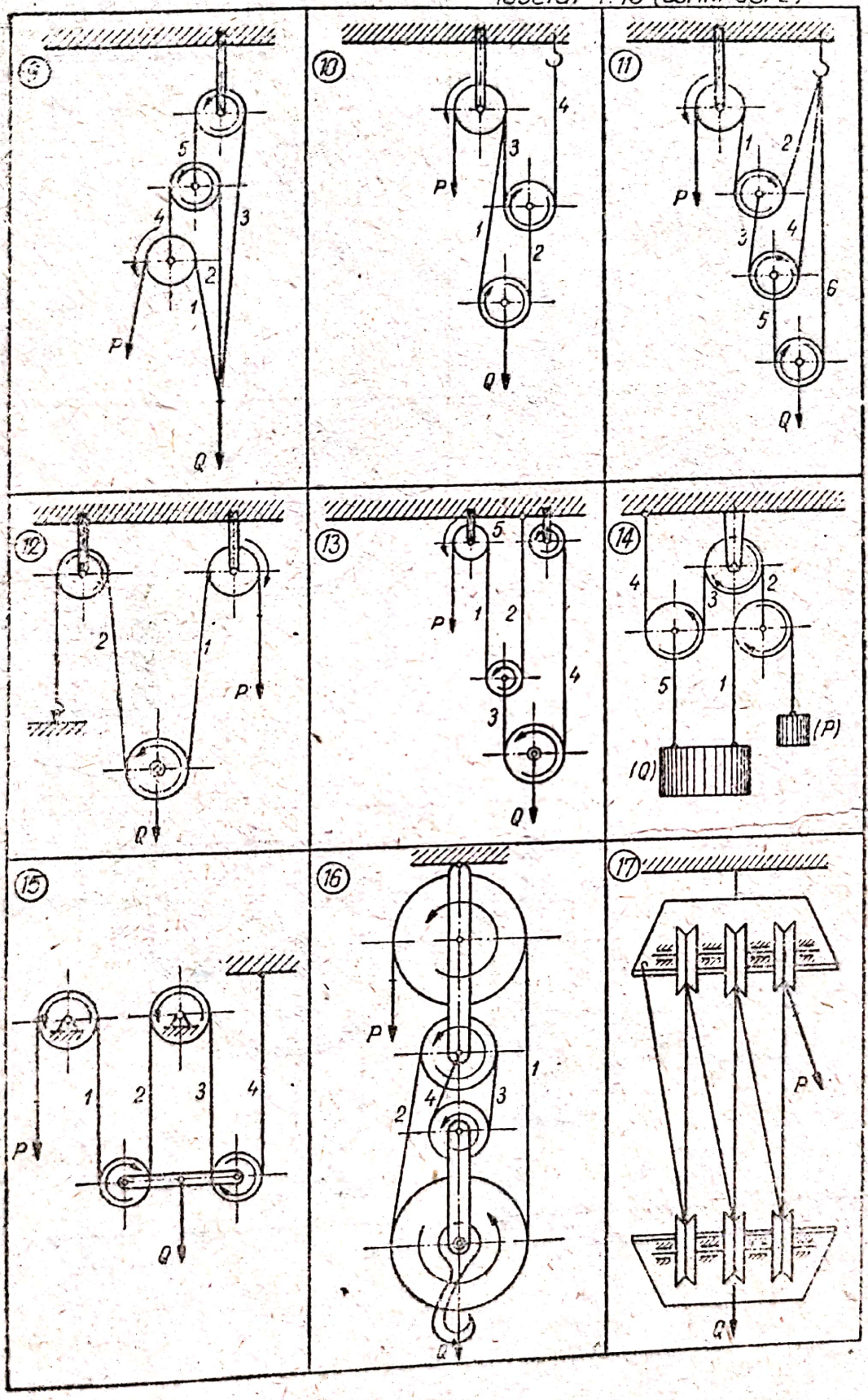
Scanned with OKEN Scanner

4.73. Să se rezolve problemele din tabelul 4.73.

Tabelul 4.73

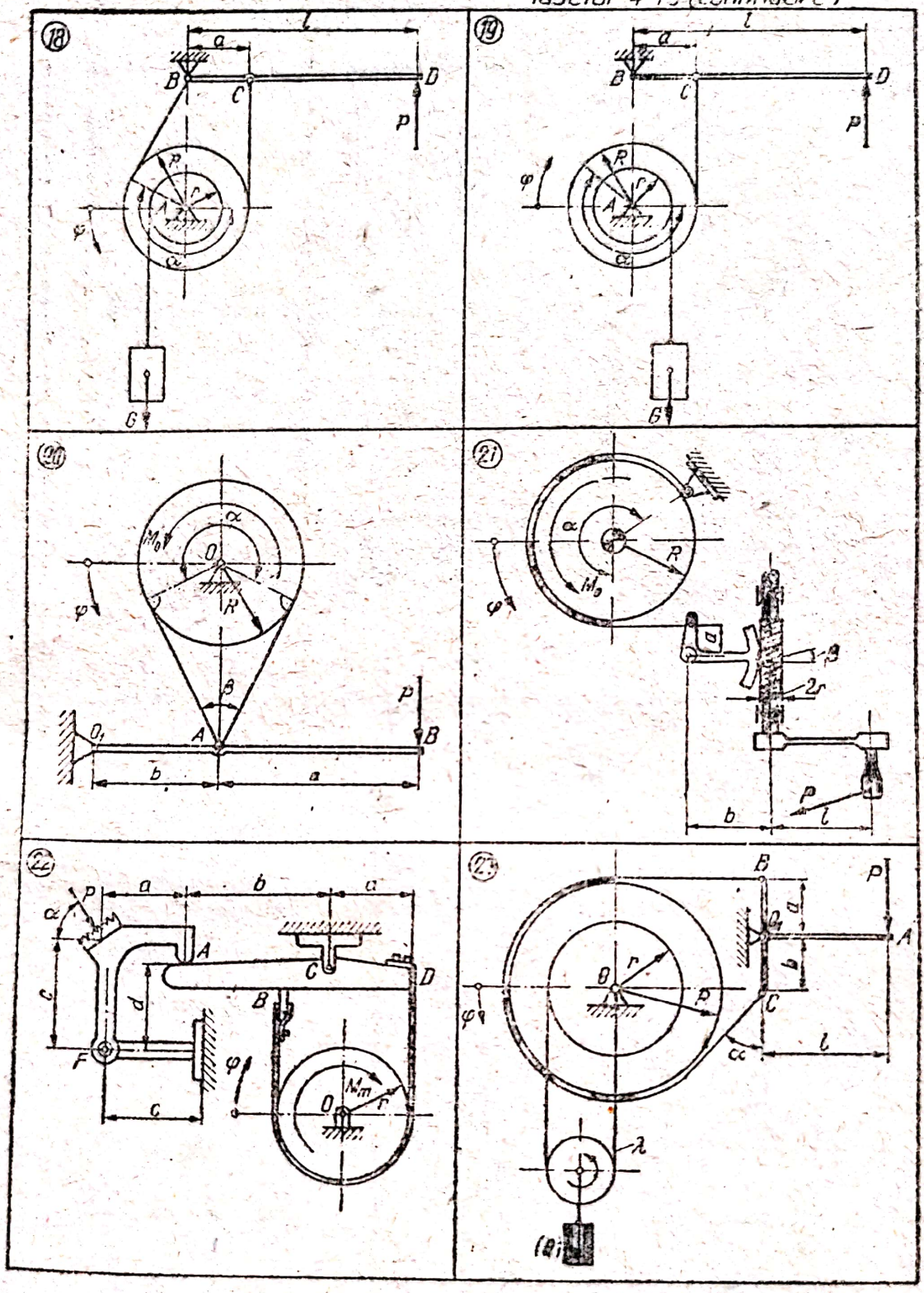


Tabelul 4.73 (continuare)

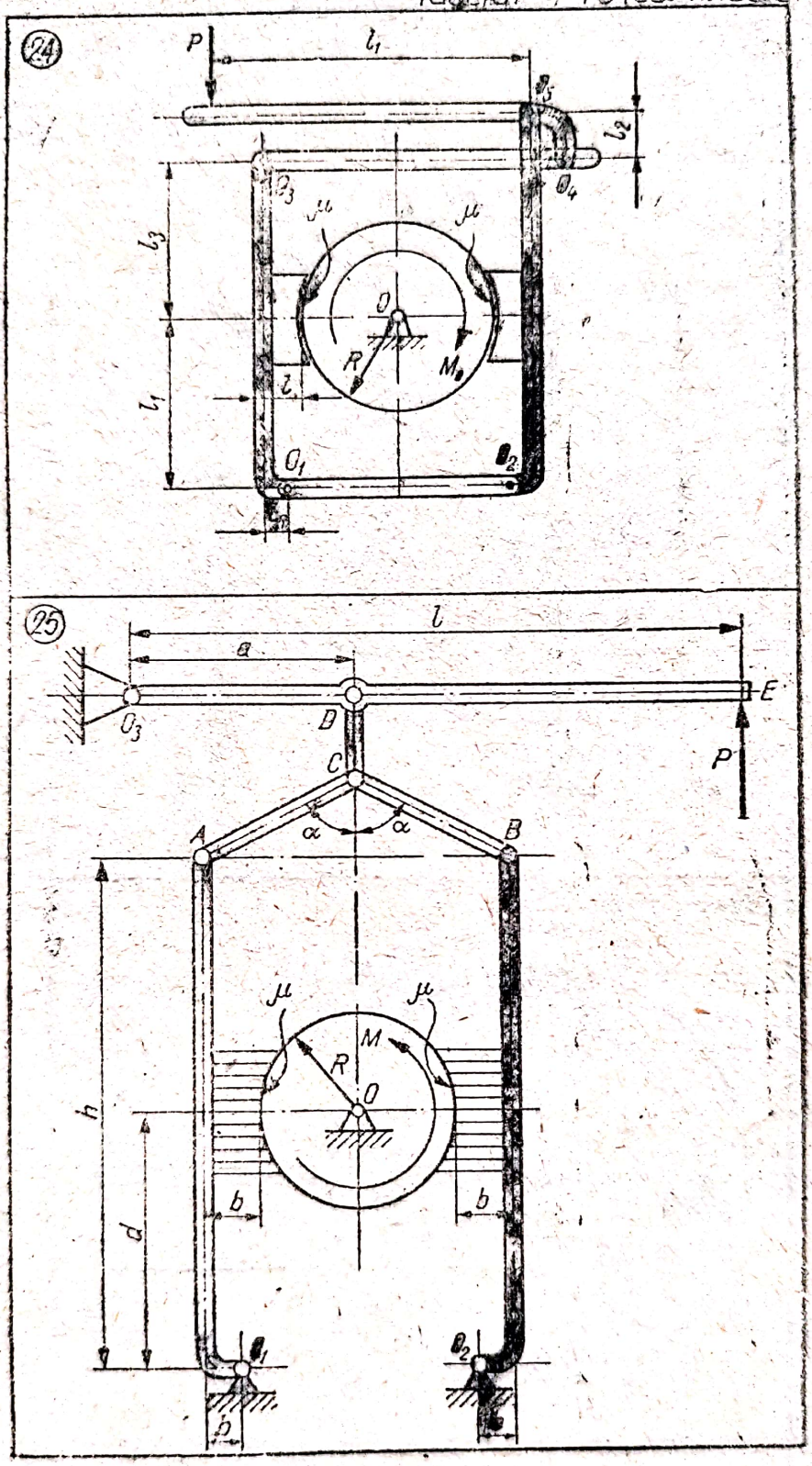


Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.73 (continuare)



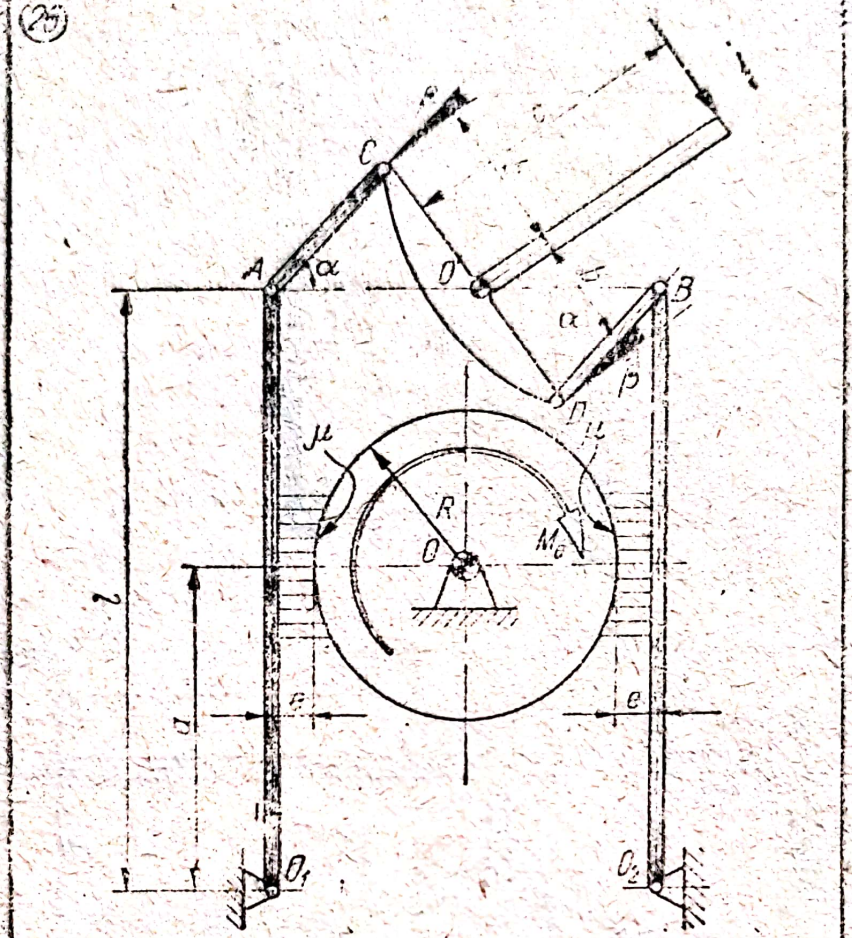
Tabelul 4.73 (continuare



Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4 75 (continuare)

(25)



(27)

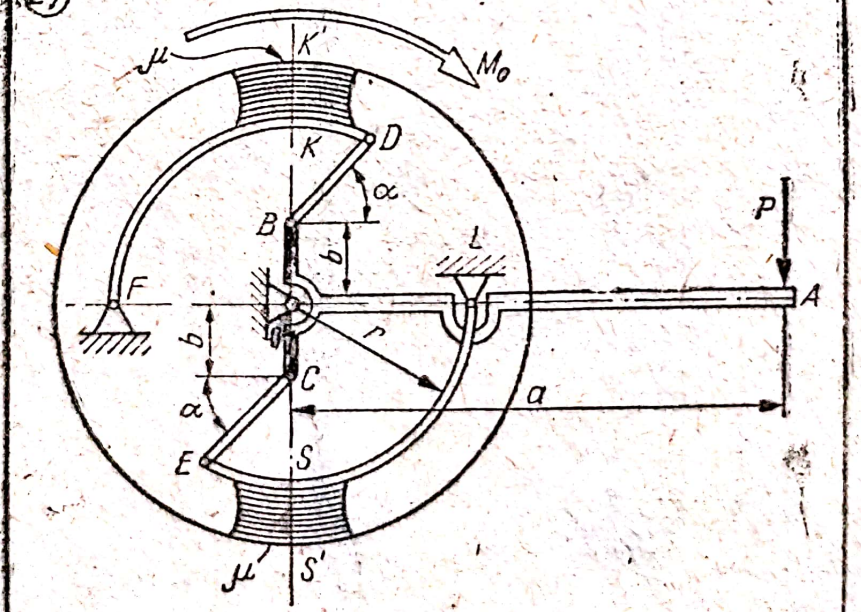


Fig.	Datut	Răspuns
1		$Q_1 = 10{,}4$ daN; $X = 10$ daN $Z_A = 17{,}3$ daN; $X_B = 0$ $Z_B = 20$ daN.
2		$X_A = 0$; $Z_A = 1$ daN $X_B = 1{,}73$ daN; $Z_B = 1$ daN
3	$Q = 12$ daN	$X_A = 1{,}73$ daN; $Z_A = 3$ daN $X_B = 0$; $Z_B = 6$ daN; $S = 3{,}45$ daN.
4	$BD = BH$ $CE = ED$	$X_A = X_B = 2{,}17$ daN $Z_A = Z_B = 3{,}75$ daN; $P = 5$ daN
5		$X_A = 8{,}66$ daN; $Y_A = 15$ daN $Z_A = 10$ daN; $X_B = Z_B = 0$ $T_A = 20$ daN.
6	$P = 20$ daN	$X_A = 8{,}66$ daN; $Y_A = 15$ daN $Z_A = 10$ daN; $X_B = Z_B = 0$ $T = 20$ daN.
7	$P = 80$ daN	$X_K = -\frac{200}{3}$ daN; $Z_K = -10$ daN $X_H = \frac{40}{3}$ daN; $Z_H = 50$ daN $S = \frac{200}{3}$ daN.
8	$a = 30$ cm; $F = 10$ daN; $CE = ED$; $BH = 10$ cm	$X_A = 10$ daN; $Y_A = 2{,}35$ daN $Z_A = -0{,}104$ daN; $R_B = 2{,}17$ daN
9		$P = \frac{Q\lambda^2}{3\lambda(1+\lambda)+1}$
10		$P = \frac{\lambda^2(2+\lambda)}{(1+\lambda)^2}Q.$
11		$P = \frac{Q\lambda^4}{(1+\lambda)^3}$
12		$P = \frac{Q\lambda^3}{1+\lambda}$

Scanned with OKEN Scanner

Fig.	Enunț	Răspuns
13		$P = \dfrac{\lambda^2(1+2\lambda)}{(1+\lambda)^2} Q$
14		$P = \dfrac{Q\lambda^5}{\lambda^2 + (1+\lambda)^2}$
15		$P = \dfrac{\lambda^4}{1+\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4} Q$
16		$P = \dfrac{Q\lambda^4}{1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3}$
17		$P = \dfrac{(\lambda^6-1)}{\lambda^6(\lambda-1)} Q$
18		$P = \dfrac{a \cdot r}{l \cdot R} G \dfrac{1}{e^{\mu\alpha}-1}$
19		$P = \dfrac{a \cdot r}{l \cdot R} G \dfrac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha}-1}$

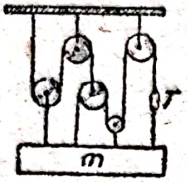
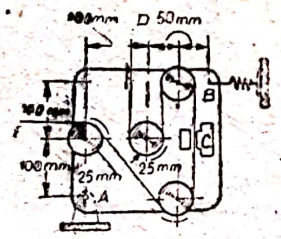
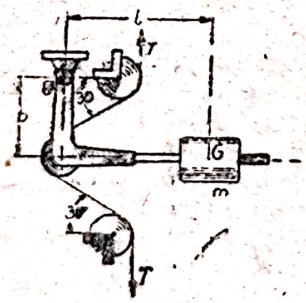
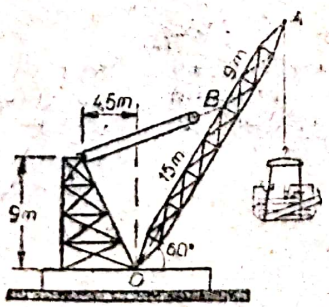
Fig.	Răspuns
20	$P = \dfrac{M_0}{R} \cdot \dfrac{e^{\mu\alpha}+1}{e^{\mu\alpha}-1} \cdot \dfrac{b}{a+b} \sin\alpha.$
21	$M = \dfrac{RlbP}{\operatorname{tg}(\beta+\varphi)} (e^{\mu\alpha}-1)$
22	$P = \dfrac{M_m(a+\mu d)[a(e^{\mu\pi}+1)-2r]}{brc(e^{\mu\pi}-1)\cos\alpha}$
23	$P = \dfrac{r}{Rl}; \dfrac{Q}{1+\lambda} \dfrac{ae^{\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)} - b\sin\alpha}{e^{\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-1}$
24	$P = \left\{\dfrac{M_0}{\mu R}\right\} \dfrac{l[_2l_4^2 - (l_5-l)^2]}{2l_1l_4(l_3+l_4) + l_2l_4(l_1-l_5) + \mu l_2(l_5-l)(l_5-l_1)}$
25	$P = \dfrac{adM\cos\alpha}{\mu Rl(b\sin\alpha + h\cos\alpha)}$
26	$P = \dfrac{b(a^2-\mu^2e^2)\cos\beta}{\mu Racl\cos\alpha} M_0$
27	$P = \dfrac{(1+\mu)b\cos\alpha}{\mu a(r\sin\alpha - b\cos\alpha)} M_0$

Scanned with OKEN Scanner

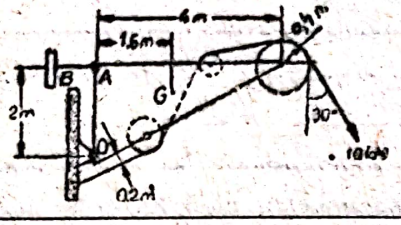
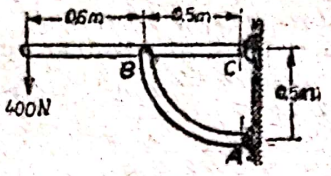
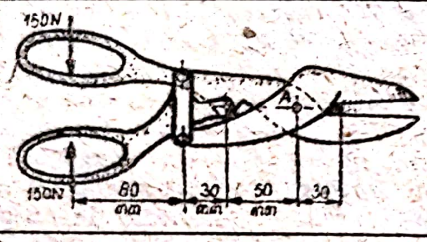
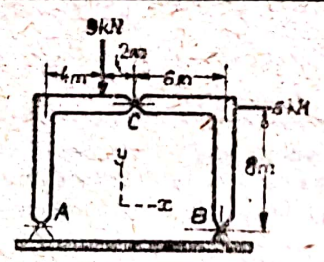
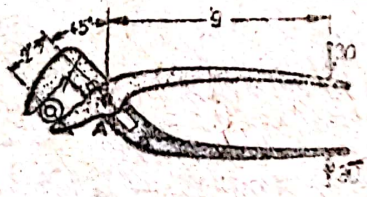
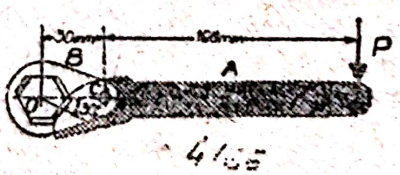
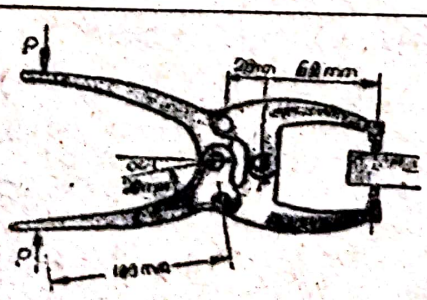
4.74. Să se rezolve problemele din tabelul 4.74.

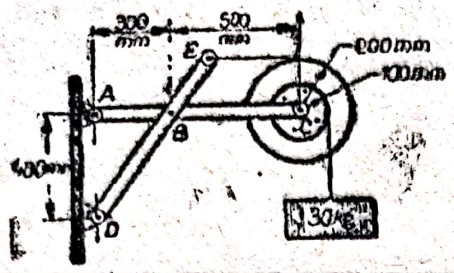
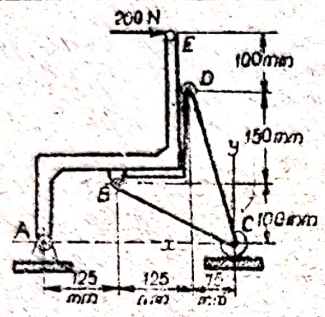
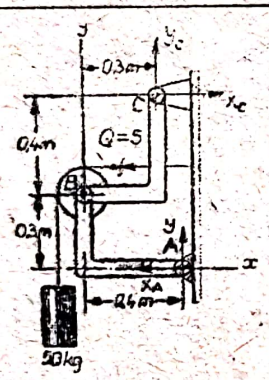
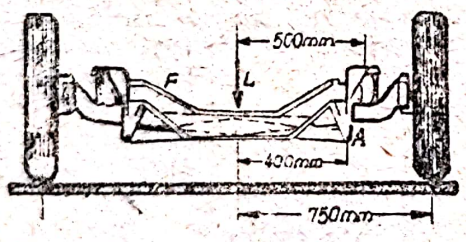
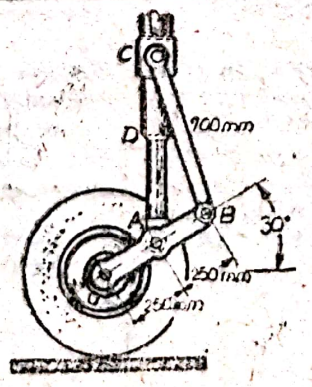
Tabelul 4.74

Probleme recapitulative [26]

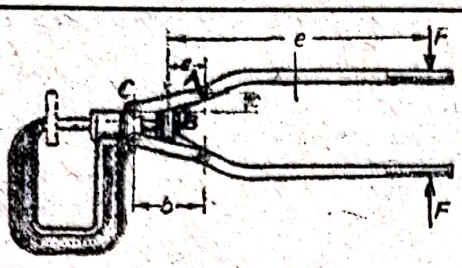
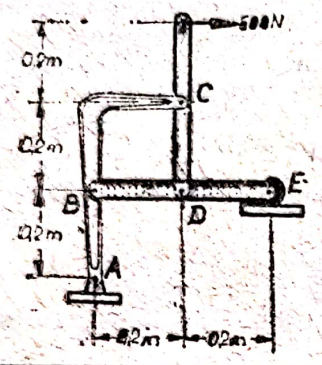
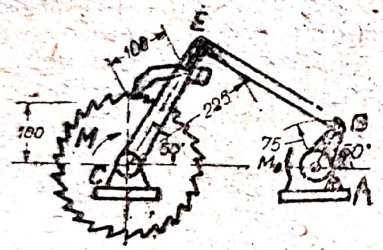
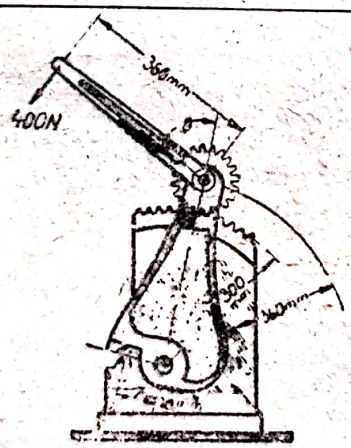
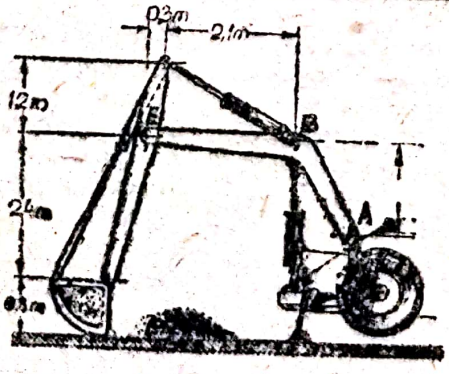
Nr. crt.	Figura	Se cunoaşte	Să se determine
0	1	2	3
1		Un dinamometru indică efortul T în ramura din dreapta a sistemului de scripeţi care suportă un corp de masă m.	Expresia masei m în funcţie de efortul T, neglijînd masele scripeţilor şi frecările. R. $m = 8\ T/g$.
2		Un muncitor zugrav, avînd masa de 80 kg, se automenţine la o anumită înălţime şezînd pe un scaun suspendat de un sistem de scripeţi, ca în figură.	Forţa P pe care o exercită muncitorul asupra cablului şi forţa R cu care este solicitată banca scaunului, neglijînd masa scaunului şi a sistemului de scripeţi. R. $P = 157$ N, $R = 628$ N.
3		Asupra benzii magnetice acţionează, în D, o forţă rezistentă de 10 N, şi în E, o forţă motoare de 11 N, care învinge frecările din lagărele rolelor de ghidaj şi din capul de ştergere din C.	Forţa T care se aplică resortului din B, ştiind că placa-suport este orizontală şi articulată în A. R. $T = 10{,}6$ N.
4		Contragreutatea dispozitivului pentru întinderea curelei are masa m; Masa braţului şi a rolei se neglijează în comparaţie cu m.	Distanţa l astfel ca masa m să asigure efortul T în curea pentru poziţia din figură, precum şi reacţiunea R din articulaţia O. R. $l = \sqrt{3}bT/(mg)$, $R = \sqrt{3T^2 + (mg)^2}$
5		Macaraua plutitoare ridică un buldozer de $4{,}2 \cdot 10^3$ kg. Braţul macaralei are masa $2 \cdot 10^3$ kg şi centrul de masă la mijlocul distanţei OA. Grosimea braţului se neglijează.	Efortul T din cablu care susţine braţul în punctul B, precum şi reacţiunea din articulaţia O a braţului macaralei, pentru echilibru sub 60°. R. $T = 61{,}5$ kN, $R_0 = 99{,}2$ kN.

Scanned with OKEN Scanner

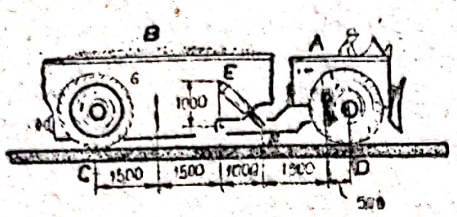
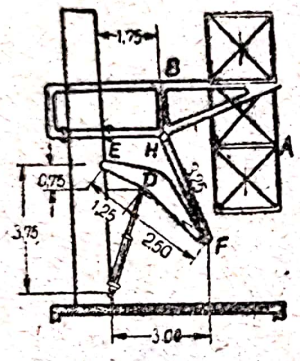
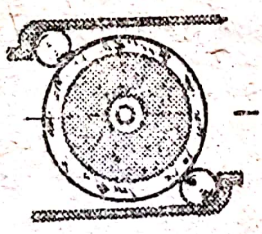
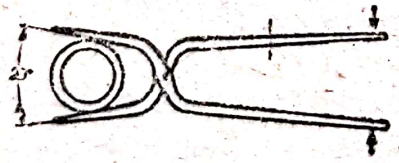
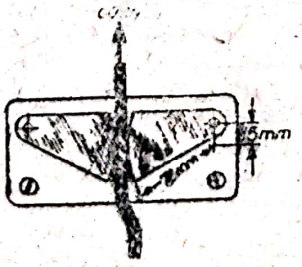
0	1	2	3
6		Placa triunghiulară împreună cu scripeții, are masa totală de 200 kg și centrul de masă în G.	Reacțiunea din articulația O dacă se aplică o forță de 10 kN la extremitatea cablului. R. $R_o = 34{,}3$ kN.
7		Sarcina de 400 N solicită cadrul din figură.	Reacțiunea din articulația C. R. $R_C = 1002$ N.
8		Foarfeca din figură se folosește la forțe de tăiere mari.	Forța de tăiere P la o distanță de 30 mm față de bolțul din A. R. $P = 1467$ N.
9		Cadrul articulat este încărcat cu o sarcină de 9 kN ca în figură.	Componentele X_C și Y_C ale reacțiunii din articulația C. R. $X_C = 5{,}25$ kN, $Y_C = 1$ kN.
10		Cleștele cu deschidere reglabilă din figură este solicitat manual cu forțe de 133 N.	Forța care este suportată de bolțul A. R. $F_A = 700$ N.
11		Cheia specială cu capul B articulat în C pe minerul A, poate fi folosită la o gamă mai largă de dimensiuni ale capetelor exagonale de șuruburi. Se presupune că suprafața capului șurubului este netedă.	Forța suportată de bolțul C dacă $P = 160$ N, pentru dimensiunea nominală cînd centrul O al șurubului și bolțul C sînt pe axa minerului. R. $F_C = 1367$ N.
12		Cleștele-menghină din figură se utilizează la o varietate de strîngeri.	Forța de strîngere F ce se dezvoltă pentru $\alpha = 10°$ și forța manuală $P = 150$ N. R. $F = 1368$ N.

0	1	2	3
13		Scripeţii din C, având razele de 100 mm şi 200 mm formează un singur corp.	Componenţele X_B şi Y_B ale forţei suportată de bolţul B. R. $X_B = 809$ N $Y_B = 785$ N.
14		Dispozitivul de limitare a cursei, este solicitat prin forţa de 200 N aplicată în E.	Componentele X_B şi Y_B ale forţei ce acţionează pe bolţul B. R. $X_B = 287$ N $Y_B = 215$ N.
15		Cadrul metalic din figură susţine sarcina de 50 kg. Rola din B are dimensiuni neglijabile.	Componentele după axele X şi Y ale reacţiunilor din articulaţiile A şi C. R. $X_A = 549$ N; $Y_A = 412$ N; $X_C = 59$ N; $Y_C = 78$ N.
16		La suspensia din figură masa grinzii centrale F este de 40 kg. Masa fiecărei roţi inclusiv cota parte din traversă care se repartizează pe ea este de 35 kg, cu centrul de masă la 680 mm, faţă de axa verticală centrală, unde se aplică sarcina $L = 12$ kN.	Forţa suportată de bolţul din A. ($g = 9{,}81$ m/s²). R. $F_A = 1{,}75$kN.
17		La trenul de aterizare al avioanelor roata este montată prin intermediul unui amortizor hidro-pneumatic D şi a două tije OB şi CB, ca în figură.	Forţa totală suportată de bolţul A, cînd avionul rulează cu viteză constantă şi pe o roată se repartizează o sarcină de 24 kN. R. $F_A = 44{,}7$ kN.

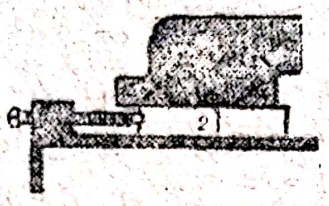
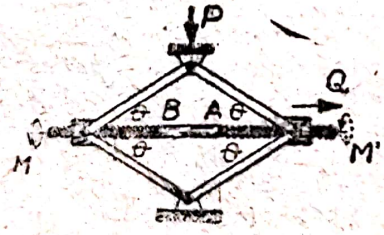
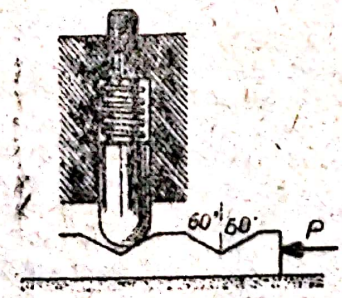
Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
18		Cleștele de perforat, cu acționare manuală, are forma din figură.	Forța de perforare P în funcție de forța de strîngere F pentru decuparea materialului. R. $P = \dfrac{2eF}{c\left(1 - \dfrac{a}{b}\right)}$.
19		Forța orizontală de 600 N acționează asupra cadrului metalic din figură.	Forța totală suportată de bolțul C. R. $F_C = 2160$ N.
20		Manivela CE și roata dințată sînt montate independent pe același ax C. Momentul de torsiune $M_0 = 30$ N·m aplicat pe manivela AB este echilibrat de momentul rezistent M acționînd pe manivela CE.	Forța ce acționează asupra manivelei CE în extremitatea C (articulația C), cînd biela BE face 90° atît cu manivela AB cît și cu manivela CE. R. $F_C = 908$ N.
21		Foarfeca manuală, cu sector dințat, este folosită la tăierea barelor cilindrice.	Forța de tăiere Q aplicată pe bară, cînd o forță de 400 N acționează asupra brațului care face unghiul $\theta = 30°$ cu verticala. R. $Q = 13{,}18$ kN.
22		Încărcătorul cu cupă este acționat prin trei cilindri hidraulici și, în poziția particulară din figură, asupra cupei acționează o forță orizontală $F = 10$ kN.	Forțele suportate de bolțurile A și B, dacă se neglijează greutatea proprie a părților componente. R. $F_A = 22{,}4$ kN $F_B = 36{,}7$ kN.

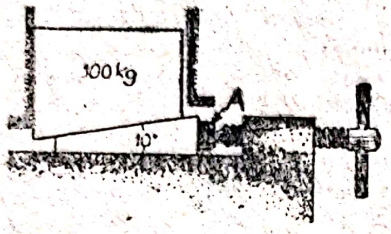
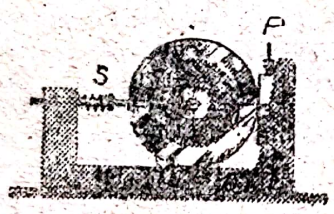
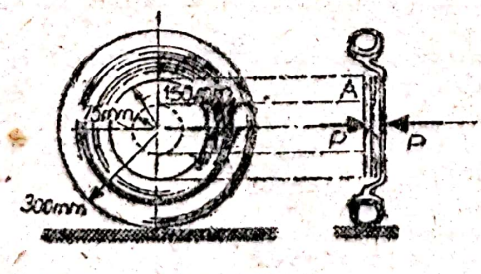
Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
23		Screperul *A* (tractor nivelator) are masa de 4 tone cu centrul de masă în G_1. Remorca screperului *B* are masa de 24 tone cu centrul de masă în G_2. Poziţia remorcii este controlată prin doi cilindri hidraulici *EF*, montaţi pe fiecare parte a remorcii.	Forţa de compresiune *P* care acţionează pe direcţia *EF* şi mărimea forţei suportate de fiecare bolţ *H* (de pe fiecare parte) pentru poziţia de repaus din figură. R. $P = 131{,}8$ kN $F_H = 113{,}9$ kN.
24		Elevatorul special din figură este folosit la ridicarea panourilor pentru construcţii metalice. Panoul *A* cu masa de 1,5 tone este ridicat cu platforma *B* având masa de 2 tone. Aceartă platformă este ghidată de o coloană verticală fixă prin intermediul volelor şi acţionează prin cilindrul hidraulic *CD* şi pîrghiile *ED* şi *FH*.	Forţa *P* exercitată de cilindrul hidraulic în *D* şi mărimea forţei suportate de bolţul *E*, pentru poziţia din figură, neglijînd masele cilindrului şi pîrghiilor de acţionare. R. $P = 59{,}7$ kN $F_E = 40$ kN.
25		Dispozitivul din figură blochează rotaţia, în sensul acelor unui ceasornic, în plan orizontal, a roţii de rază *R*, utilizînd frecarea cu cele două role mici de rază *r*. Coeficientul de frecare μ este acelaşi pentru toate suprafeţele în contact.	Limitele între care poate varia distanţa *d* cînd se cunoaşte *R*, *r* şi μ. R. $\dfrac{2r + (1-\mu^2)R}{1+\mu^2} < d$ $d < (R + 2r)$.
26		Pentru manipularea ţevilor în secţiile de tratament termic, se folosesc cleşti ca cel din figură.	Valoarea minimă a coeficientului de frecare între fălcile cleştelui şi ţeavă, astfel încît ţeava să nu fie expulzată. R. $\mu_{min} = 0{,}176$.
27		Dispozitivul de blocare a cablului utilizează forţele mari de frecare ce se dezvoltă între cablu şi camele excentrice, ca în figură.	Valoarea minimă a coeficientului de frecare dintre came şi cablu pentru care sistemul se autoblochează şi reacţiunea totală din articulaţia unei came. R. $\mu = 0{,}208$; $R = 1471$ N.

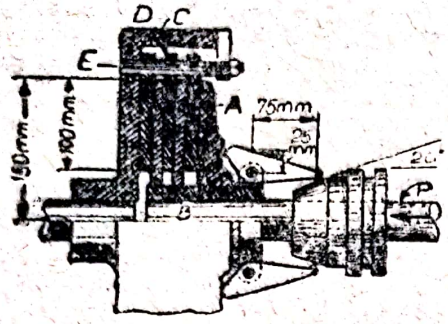
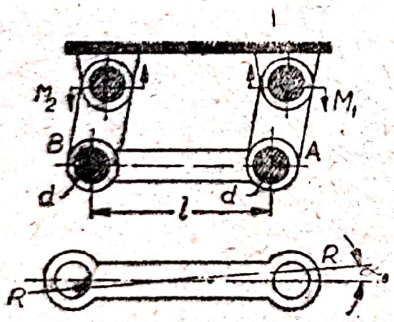
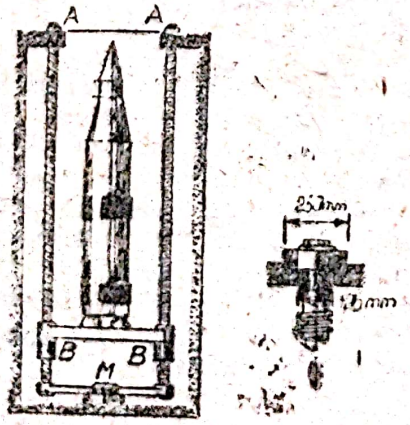
Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
28		Așezarea precisă a unui motor diesel staționar se realizează cu pene introduse sub fiecare din cele patru flanșe de montare, care suportă un sfert din greutatea motorului: Masa motorului este de 4,8 tone, iar coeficientul de frecare pe ambele fețe 0,25.	Forța axială Q care se dezvoltă în șurubul de poziționare la montarea motorului. R. $Q = 6{,}33$ kN.
29		Dispozitivul pentru întinderea cablurilor suportă o forță axială $T = 66{,}7$ kN. Fiecare șurub are un diametru mediu de 34,4 mm, filet cu un singur început și pas de 8 mm. Sensurile filetelor sînt inverse (dreapta-stînga).	Coeficientul de frecare dintre șurub și piuliță dacă, pentru slăbirea cablului, acționează un moment de 366 N·m. R. $\mu = 0{,}252$.
30		La cricul din figură șurubul are filet pătrat cu două începuturi, diametrul mediu 22,2 mm și 6 filete pe 25,4 mm. Filetul A este pe dreapta, iar filetul B este pe stînga. Cricul este încărcat cu sarcină $P = 6750$ N și coeficientul de frecare între șurub și piulițe este 0,2.	Pentru $\theta = 30°$, momentul M aplicat șurubului la ridicarea sarcinii și momentul M' necesar la coborîrea sarcinii. R. $M = 86$ N·m $M' = 20$ N·m.
31		Tachetul mecanismului are capul sferic rezemat pe cama cu deplasare, rectilinie. Coeficientul de frecare dintre camă și suprafața orizontală este 0,3. Frecarea din ghidajul tachetului se neglijează, deoarece suprafețele în contact sînt bine unse și superfinisate.	Coeficientul de frecare dintre tachet și camă, dacă, pentru poziția de echilibru din figură, resortul exercită o forță de 40 N asupra tachetului iar asupra camei se acționează cu o forță $P = 60$ N. R. $\mu = 0{,}368$.

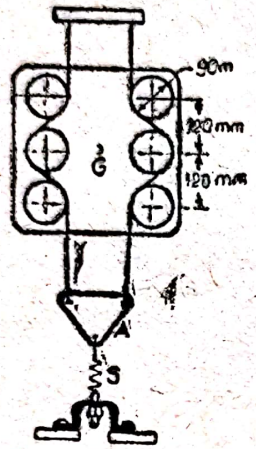
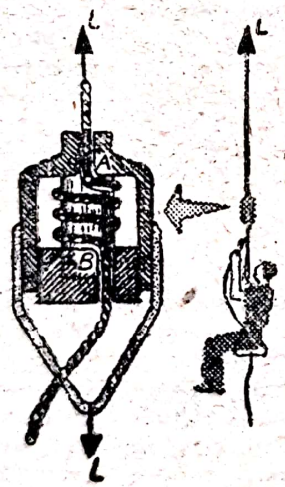
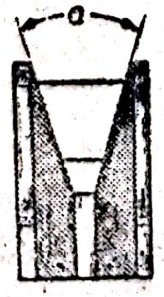
Scanned with OKEN Scanner

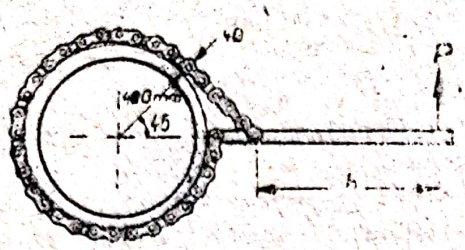
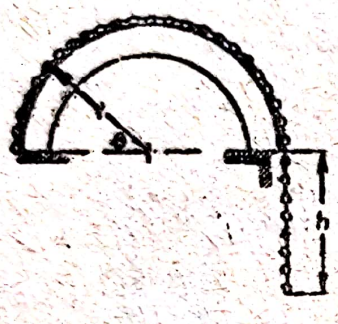
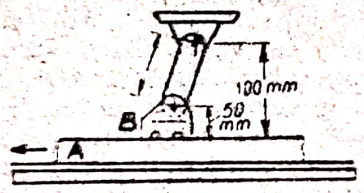
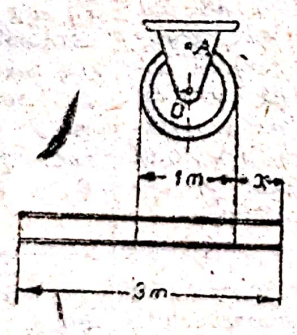
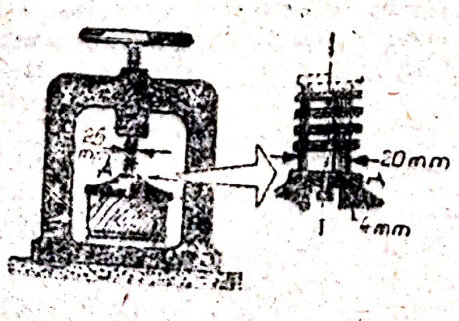
0	1	2	3
32		Poziția precisă pe verticală a blocului de 100 kg se realizează cu o pană acționată de un șurub, având un singur început, filet pătrat, diametrul de 30 mm și pasul 10 mm. Coeficientul de frecare la filetul șurubului este 0,25, iar între celelalte suprafețe în contact este de 0,4. Frecarea în pivotul A se neglijează.	Momentul $\overline{M}$ care trebuie aplicat pe mânerul șurubului pentru ridicarea blocului, respectiv momentul M' pentru coborîrea acestuia. R. $M = 7{,}82$ N·m $M' = 3{,}02$ N·m
33		Asupra roții de 20 kg acționează un resort cu o forță de 200 N. Coeficientul de frecare în A este 0,25, iar pe cele două suprafețe de contact ale penei este 0,3. Tija de ghidare nu oferă un sprijin pentru roată.	Forța P necesară pentru mișcarea roții. R. $P = 198{,}8$ N.
34		Pentru a ridica uniform o sarcină de 500 kg, se aplică un moment de 1510 N·m asupra tobei. Masa tobei inclusiv masa arborelui este 100 kg. Se neglijează masa cablului.	Coeficientul de frecare din lagăr și pentru acest coeficient, momentul ce trebuie aplicat tobei astfel ca sarcina să coboare uniform. R. $\mu = 0{,}271$ $M = 1431{,}6$ N·m.
35		Frîna de mînă, acționînd pe roțile din spate ale unui vehicul cu tracțiune pe față, este echipată cu frîne disc, constînd dintr-un inel A cu raza exterioară 150 mm și raza interioară 75 mm. Acest inel, care nu se rotește odată cu roata, este presat pe discul roții cu o forță $P = 1$ kN. Coeficientul de frecare dintre inel și disc este 0,35.	Forța de aderență F ce se dezvoltă între roata din spate și sol, dacă presiunea dintre inel și disc este constantă, vehiculul se deplasează uniform, roțile se rostogolesc fără să alunece (șoferul a demarat automobilul uitînd frîna de mînă trasă) și frecarea de rostogolire se neglijează. R. $F = 136{,}1$ N.

Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
36		Cuplajul multidisc din figură se utilizează în construcţii navale. Discurile conducătoare A sînt montate pe axul canelat B astfel ca să poată aluneca de-a lungul lui în timp ce se rotesc împreună cu el. Discurile conduse C sînt montate pe carcasa D prin intermediul bolţului E, de-a lungul căruia au posibilitatea de alunecare. Cuplajul are cinci suprafeţe de frecare.	Momentul maxim de răsucire ce poate fi transmis, dacă presiunea pe discuri este uniform distribuită, coeficientul de frecare dintre discuri este 0,15 şi asupra discurile acţionează forţa de cuplare $P =$ = 500 N. R. $M = 335$ N·m.
37		Coeficientul de frecare dinamic (cinetic) din lagărul stripetelui este 0,25. Diametrul fusului este 30 mm. Sarcina de ridicat are masa 500 kg. Se neglijează masa scripetelui şi rigiditatea cablului.	Efortul T din firul conducător şi efortul T_0 din firul condus, cînd sarcina este ridicată uniform (cu viteză constantă). R. $T = 2{,}52$ kN $T_0 = 2{,}38$ kN.
38		Mecanismul articulat se află sub acţiunea momentului motor M_1 şi a momentului rezistent M_2. Coeficientul de frecare de alunecare din articulaţiile A şi B (lagăre radiale cu joc) este μ. Frecarea de rostogolire se neglijează.	Expresia exactă a unghiului dintre direcţia forţei rezultantei de compresiune R şi linia centrelor fusurilor A şi B, dacă M_1 creşte progresiv pînă începe micşorarea mecanismului. R. $\alpha = \arcsin \dfrac{\mu d}{l\sqrt{1+\mu^2}}$.
39		O racheta cu masa de 20 tone este montată într-un elevator ca în figură. Fiecare şurub are masa 1,07 tone, diametrul 130 mm, filet pătrat cu un singur început şi pasul 13 mm. Pentru deplasarea pe verticală a rachetei şuruburile sînt rotite sincron de un motor	Momentul M ce trebuie aplicat asupra fiecărui şurub pentru ridicarea elevatorului şi momentul M' pentru coborîrea elevatorului, dacă presiunea pe întreaga suprafaţă a cuzineţilor A este constantă şi coeficientul de frecare în lagărele A şi în şuruburi (în B) este 0,15.

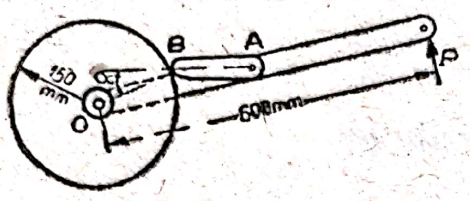
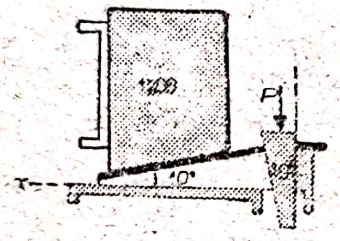
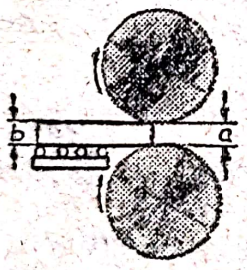
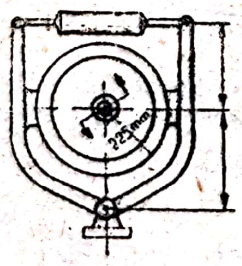
Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
		central *M*. Întreaga masă a rachetei, plus masa platformei *B*—*B* de 4,2 tone este suportată egal de către cuzineții inelari ai lagărelor axiale *A*.	R. $M = 3290$ N·m $M' = 2790$ N·m.
40		Ansamblul din figură are masa de 100 kg și centru de masă în *G*, fiind suspendat prin intermediul a două fire care trec peste bolțu ile fixate în placa de bază, iar pentru egalizarea tensiunilor din fire sînt legate de placa *A* fixată prin intermediul resortului reglabil *S*.	Efortul minim *T* în resort care menține ansamblul în poziția din figură, dacă coeficientul de frecare dintre fire și bolțuri este 0,30. R. $T = 555$ N.
41		Dispozitivul instalației de coborîre pe coardă (frînghie), cu viteză controlată și constantă, este prevăzut cu două canale *A* și *B*, de intrare, respectiv de ieșire a coardei. Intrarea coardei în canalul superior *A* necesită un sfert de circonferință la fel și pentru ieșirea coardei prin canalul inferior *B* este necesară tot un sfert din circonferința butucului central fixat pe cadrul dispozitivului.	Coeficientul de frecare dintre coardă și butuc, știind că prin răsucirea canalului inferior *B*; coarda s-a înfășurat complet de trei ori, în afara înfășurărilor necesare intrării în *A* și ieșirii din *B*; de asemenea se cunoaște masa de 75 kg a persoanei care coboară pe coardă, precum și forțele de frecare de cîte 10 N pentru fiecare canal (*A* și *B*). R. $\mu = 0{,}165$.
42		Pentru transmiterea eforturilor mari se utilizează cureaua trapezoidală, în locul celei plate, cu un unghi $\alpha = 35°$.	Pentru același coeficient de frecare μ dintre curea și roată, de cîte ori crește efortul transmis prin cureaua trapezoidală față de cea plată. R. $T_2 = T_1 e^{\mu\beta'}$; $\beta' = \dfrac{\beta}{\sin(\alpha/2)}$ $n = 3{,}33$.

0	1	2	3
43		Lanțul cu role este utilizat la strîngerea și asamblarea țevilor. Coeficientul de frecare dintre lanț și țeavă este 0,25. Se neglijează celelalte frecări, precum și masele zalelor și pîrhiei de acționare.	Valoarea minimă a distanței h unde se aplică forța P, astfel ca lanțul să nu alunece față de țeavă, indiferent de mărimea forței P. R. h = 96,9 mm.
44		Lanțul are greutatea p pe unitatea de lungime și este trecut peste un tambur fix de rază r ca în figură. Coeficientul de frecare dintre lanț și tambur este μ.	Lungimea h a porțiunii de lanț care poate atîrna liber de pe disc la limita echilibrului. R. $h = \frac{2\mu r}{1+\mu^2}(1+e^{\mu\pi})$.
45		Dispozitivul de blocare prin fricțiune permite barei A să se deplaseze spre stînga, dar o împiedică să se miște spre dreapta. Coeficientul de frecare dintre sabotul B și bara A este 0,4.	Lungimea maximă b a elementului de legătură, astfel ca dispozitivul să funcționeze intermitent, după cum s-a descris. R. b = 118,5 mm.
46		O bară uniformă avînd lungimea 3 m este suspendată printr-un cablu trecut peste un scripete, ca în figură. Un bolț montat în A blochează rotirea scripetelui.	Valoarea minimă pentru x pentru care cablul nu alunecă pe scripete, dacă coeficientul de frecare dintre cablu și scripete este 0,25. R. x = 0,343 m.
47		Presa manuală are șurub cu două începuturi, filet pătrat cu pasul 8 mm și diametrul mediu 25 mm. Coeficientul de frecare între șurub și piuliță și în lagărul axial A este 0,25.	Momentul M necesar pentru presarea corpului cu o forță de 4 kN și momentul M' necesar pentru desșurubare (slăbirea presiunii de 4 kN). R. M = 25 N·m M' = 14 N·m.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4.74 (continuare)

0	1	2	3
48		Dispozitivul de acționare unisens (clichet silențios) care permite rotirea roții în sens trigonometric sub acțiunea forței $P = 150$ N, aplicată levierului. Clichetul AB se reazemă pe roată astfel ca $\alpha = 20°$.	Valoarea minimă a coeficientului de frecare între roată și clichet, astfel încît să nu apară alunecarea în B și valoarea forței din articulația A. R. $\mu_{min} = 0{,}364$ $R_A = 1{,}754$ kN.
49		Penele cu pante de 10° sînt așezate în așa fel ca forța P orientată, în jos să provoace ridicarea sarcinii de 5338 N. Coeficientul de frecare pe toate suprafețele de reazem este 0,20.	Mărimea forței P, dacă se neglijează greutatea penelor. R. $P = 2188{,}5$ N.
50		Laminorul de tablă este format din două valțuri, avînd diametrele d, care se rotesc în sensul indicat în figură. Coeficientul de frecare dintre valțuri și tablă este μ. Distanța dintre valțuri (grosimea finală) este a.	Ce grosime maximă b poate să aibă tabla încălzită, dacă înaintarea tablei se face numai prin forța de frecare dintre valțuri și tablă. R. $b = a + d\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)$.
51		În cilindrul hidraulic C al frînei din figură se dezvoltă o forță de 1 kN. Tamburul este montat pe lagăre în centrul său. Presiunea dintre saboți și tambur este uniform distribuită.	Momentul, minim care poate fi frînat, fără ca tamburul să se rotească, dacă coeficientul de frecare dintre tambur și saboți este 0,6. R. $M = 558$ N·m.

5
Grinzi cu zăbrele

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

Structurile geometrice, strict, nedeformabile, alcătuite din bare drepte, de greutate neglijabilă, unite între ele la extremități prin articulații fără frecare, supuse la forțe exterioare ce acționează numai în articulații, se numesc grinzi cu zăbrele.

Aceste structuri fiind imobile, articulațiile lor se înlocuiesc prin îmbinări nituite sau sudate, numite noduri, ca în figura 5, a. Pentru determinarea eforturilor din barele unei grinzi cu zăbrele, se utilizează atît metode analitice cît și metode grafice. Indiferent de metoda analitică utilizată este necesar, mai întîi, să se verifice dacă grinda este static determinată. În acest scop se utilizează condiția:

$$b + c = 2n \qquad (5.1)$$

care exprimă numai criteriul necesar, dar nu și suficient, pentru ca o grindă cu zăbrele plană să fie static determinată și imobilă.

În relația (5.1), b reprezintă numărul barelor grinzii cu zăbrele; c — numărul componentelor necunoscute ale reacțiunilor exterioare; n — numărul articulațiilor grinzii cu zăbrele.

Determinarea eforturilor din barele unei grinzi cu zăbrele se poate face prin două tipuri de metode: analitice și grafice.

Prezentăm, mai întîi, metodele analitice:

— Metoda izolării nodurilor se bazează pe teorema echilibrului părților. Se izolează nodurile grinzii cu zăbrele, introducîndu-se în locul barelor eforturi, considerate tracțiuni (trag de nod).

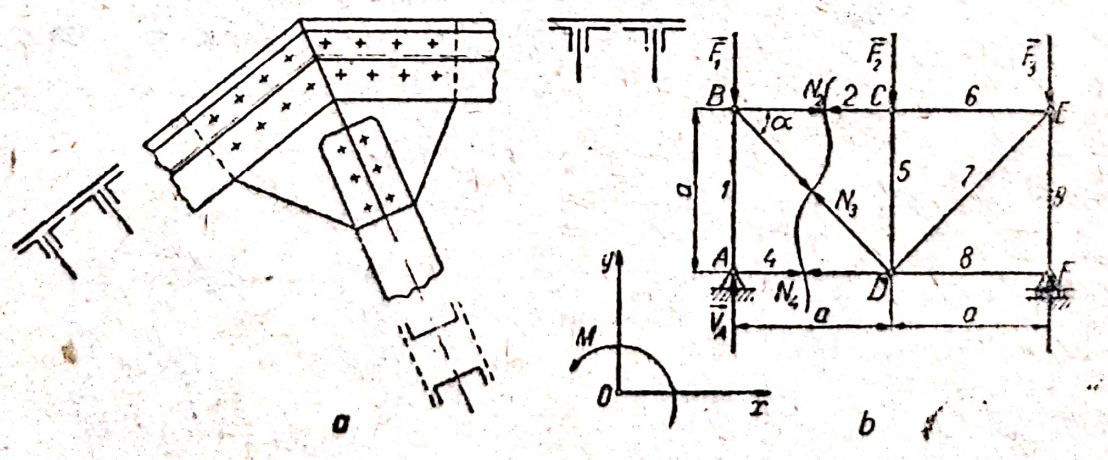


Fig. 5 a, b

Dacă valoarea numerică a efortului dintr-o bară rezultă negativă, înseamnă că în realitate în bara respectivă efortul este de compresiune (apasă pe nod) și nu de tracțiune cum s-a considerat inițial. Deoarece sub acțiunea forțelor exterioare, a reacțiunilor exterioare și a eforturilor din bare fiecare nod trebuie să se găsească în echilibru, se vor scrie ecuațiile de echilibru ale tuturor nodurilor din care se vor deduce eforturile din bare.

— *Metoda secțiunilor (Ritter)* are la bază teorema echilibrului părților. Se secționează grinda în două părți (fig. 5.b) și se înlocuiesc barele secționate cu eforturile din ele, considerate eforturi de tracțiune. Sub acțiunea forțelor exterioare și a eforturilor din barele secționate, fiecare din cele două părți ale grinzii vor trebuie să se găsească în echilibru. Scriind cele trei ecuații scalare de echilibru pentru una din părțile grinzii, se pot determina trei eforturi necunoscute, rezultînd, prin urmare, că această metodă se va aplica, în general, cînd secțiunea prin grindă taie maximum trei bare.

Metode grafice pentru determinarea eforturilor în barele unei grinzi cu zăbrele.

— *Metoda planului (Cremona)*. Pentru determinarea grafică a eforturilor din barele unei grinzi cu zăbrele cu ajutorul planului Cremona, (Maxwell) se verifică dacă grinda este static determinată ; se determină apoi reacțiunile exterioare, pe baza teoremei solidificării, grafic sau analitic, și se construiește poligonul format din forțele exterioare și reacțiunile exterioare. Pentru construcția acestui poligon, se alege un sens de parcurgere (de exemplu de la stînga la dreapta), însumarea forțelor efectuîndu-se în ordinea corespunzătoare sensului adoptat (fig. 5.c). Reacțiunile exterioare H'_B și H'_C se înlocuiesc cu reacțiunile H_B și H_C, reduse în nodurile B și C, din condiția ca momentul cuplului $\{\mathbf{H}'_B, \mathbf{H}'_C\}$ să fie egal cu momentul cuplului $\{\mathbf{H}_B, \mathbf{H}_C\}$.

Grinda cu zăbrele se va găsi în echilibru dacă poligonul forțelor exterioare și al reacțiunilor exterioare se va închide. Se construiește apoi poligonul forțelor pentru fiecare nod în parte, însumînd forțele exterioare și eforturile din bare în ordinea corespunzătoare sensului adoptat. Fiecare

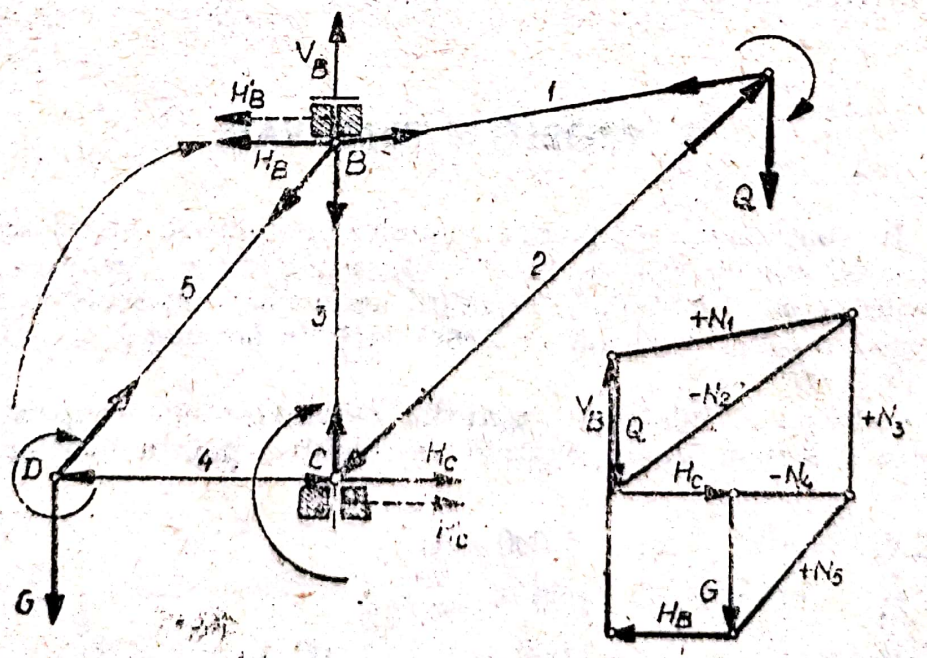


Fig. 5 c

nod va fi în echilibru, dacă poligonul forţelor concurente în nod se va închide. Poligoanele forţelor, corespunzătoare tuturor nodurilor, se vor construi peste poligonul forţelor exterioare şi al reacţiunilor exterioare, obţinîndu-se astfel planul (epura) Cremona (Maxwell).

În construcţia planului Cremona (Maxwell) se utilizează şi o notaţie specială, numită notaţia Bow, care constă în notarea regiunilor dintre liniile de acţiune ale forţelor prin cîte o literă, iar fiecare forţă prin litere corespunzătoare celor două regiuni separate prin linia de acţiune a forţei respective.

— *Metoda Culmann.* Se bazează, ca şi metoda Ritter pe teorema echilibrului părţilor. Astfel, considerînd grinda cu zăbrele din figur. 5.d, pentru a determina eforturile din barele *8*, *9* şi *10*, se determină, mai întîi, reacţiunile exterioare Y_A şi N_B şi apoi se secţionează grinda prin barele *8*, *9* şi *10*.

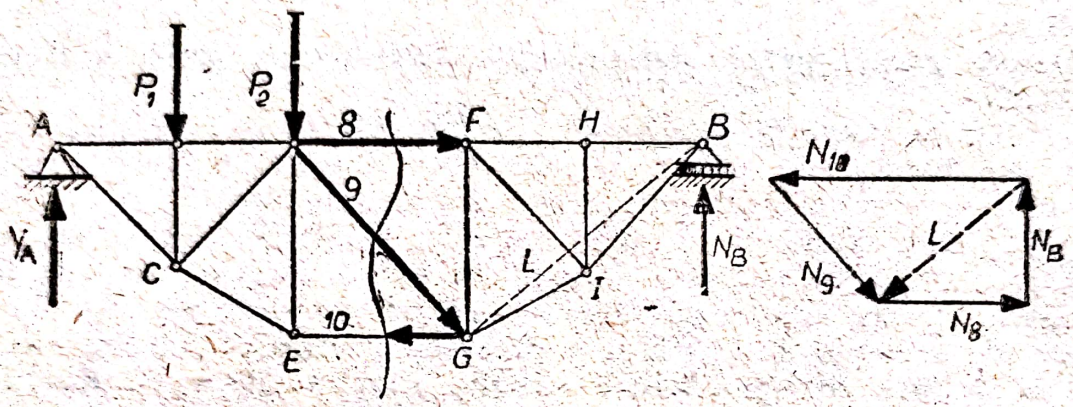


Fig. 5 d

Pentru determinarea eforturilor din barele *8*, *9* şi *10*, se construieşte la scară, reacţiunea N_B şi se duc apoi din extremităţile sale direcţii paralele cu *L* şi cu bara *8*, determinîndu-se astfel efortul N_8. Prin extremităţile segmentului *L* se construiesc apoi paralele la barele *9* şi *10*, obţinîndu-se astfel eforturile N_9 şi N_{10}. Sensul eforturilor rezultă urmărind modul în care se închide poligonul forţelor N_B, N_{10} şi N_8.

B. PROBLEME REZOLVATE

5.1. În construcţia de poduri metalice se folosesc grinzi cu zăbrele de forma celei din fig. 5.1, a. Se cere să se determine eforturile în barele grinzii prin metoda analitică a separării nodurilor, cunoscînd că în nodul *C* acţionează o forţă verticală de 2 000 daN, în iar nodul *D*, o forţă orizontală de 1 000 daN.

Rezolvare. Înlocuim legăturile exterioare cu reacţiunile corespunzătoare şi scriem, apoi, ecuaţiile de echilibru pentru întreaga grindă. Avem

$$\Sigma X_i = 0: \quad -X_A + 1\,000 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A - 2\,000 + Y_B = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad -1{,}5 \cdot 2\,000 - 1{,}5 \cdot 1\,000 \sin 60° + 3Y_B = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

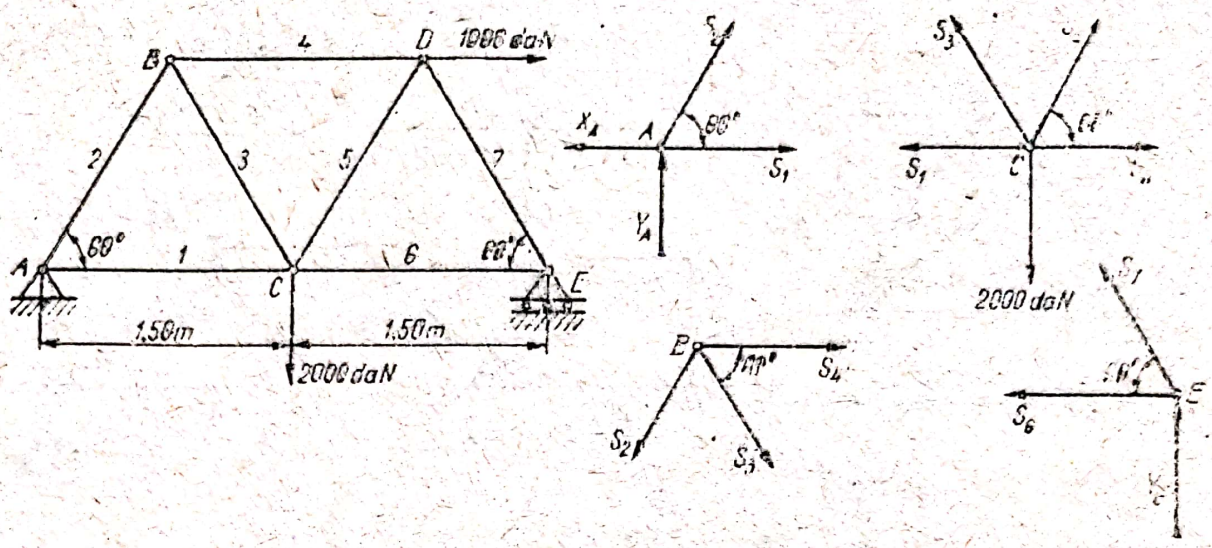


Fig. 5.1

Rezultă

$$X_A = 1\,000 \text{ daN}, \quad Y_A = 565 \text{ daN} \text{ și } Y_E = 1435 \text{ daN}.$$

Efectuăm echilibrul fiecărui nod separat.

Nodul A:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -X_A + S_1 + S_2 \cos 60° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A + S_2 \sin 60° = 0.$$

Rezultă $S_1 = 1327$ daN și $S_2 = -655$ daN.

Nodul B:

$$\Sigma X_i = 0: \quad S_4 + S_3 \cos 60° - S_2 \cos 60° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad -S_3 \sin 60° - S_2 \sin 60° = 0.$$

Se obține $S_3 = 655$ daN și $S_4 = -655$ daN.

Nodul C:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -S_1 - S_3 \cos 60° + S_6 + S_5 \cos 60° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad -2\,000 + S_3 \sin 60° + S_5 \sin 60° = 0.$$

Deducem $S_5 = 1655$ daN și $S_6 = 827$ daN.

Nodul E: Nodul E fiind ultimul nod al grinzii cu zăbrele, oferă posibilitatea unei verificări, obținîndu-se două ecuații în care unul dintre eforturi este cunoscut. Astfel, avem:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -S_6 - S_7 \cos 60° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_E + S_7 \sin 60° = 0.$$

Rezultă $S_7 = -1655$ daN.

5.2. Se consideră grinda cu zăbrele din fig. 5.2, a, pentru care se cere să se determine eforturile din bare prin metoda analitică a separării nodurilor.

Scanned with OKEN Scanner

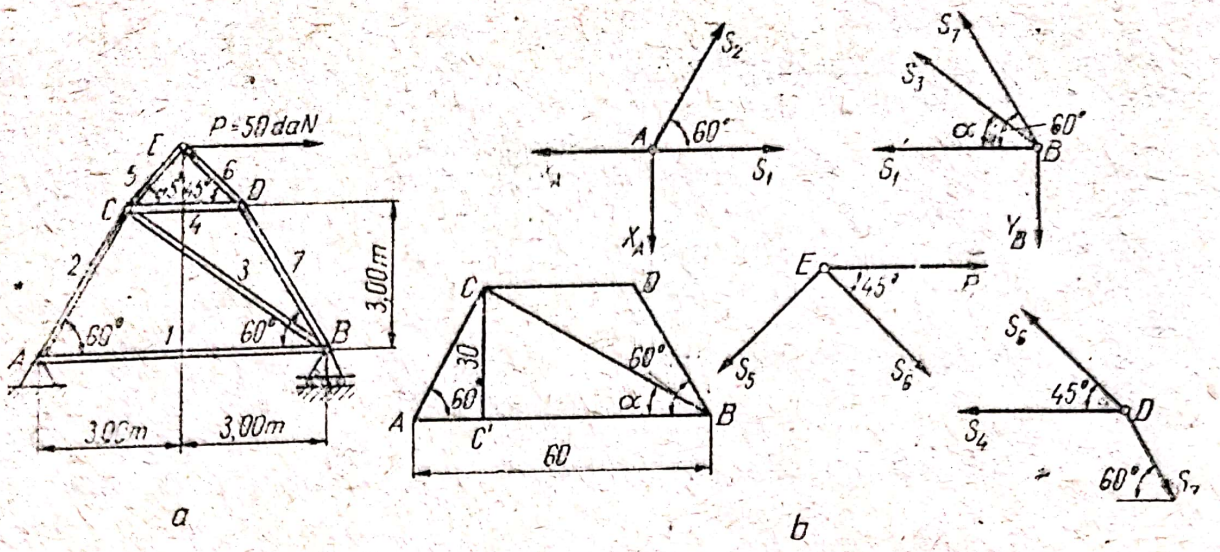


Fig. 5.2 a, b

Rezolvare. Determinăm reacțiunile din legăturile exterioare, efectuînd echilibrul exterior

$$\Sigma X_i = 0: \quad 500 - X_A = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad -Y_A - Y_B = 0$$
$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad -60Y_B - 42{,}7 \cdot 500 = 0$$

Rezultă $X_A = 500$ daN; $Y_A = -Y_B = 355{,}8$ daN.

Determinăm eforturile din barele grinzii cu zăbrele efectuînd echilibrul fiecărui nod separat.

Echilibrul nodului A (fig. 4.2, b):

$$\Sigma X_i = 0: \quad -X_A + S_1 + S_2 \cos 60° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad -Y_A + S_2 \sin 60° = 0.$$

Rezultă: $S_1 = 294{,}6$ daN; $S_2 = 410{,}8$ daN.

Echilibrul nodului B:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -S_1 - S_3 \cos \alpha - S_7 \cos 60° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_3 \sin \alpha + S_7 \sin 60° - Y_B = 0.$$

Rezultă, ținînd seama că $\overline{AC'} = 30 \operatorname{ctg} 60° = 17{,}3$ cm; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{30}{42{,}7} = 0{,}705$; $\alpha = 35°$

$$S_3 = -182{,}9 \text{ daN}; \quad S_7 = -288{,}7 \text{ daN}.$$

Echilibrul nodului E:

$$\Sigma X_i = 0: \quad 500 + S_6 \cos 45° - S_5 \cos 45° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad -S_5 \sin 45° - S_6 \sin 45° = 0.$$

Se obține $S_5 = -S_6 = 353{,}6$ daN

Scanned with OKEN Scanner

Echilibrul nodului D:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -S_4 - S_6 \cos 45° + S_7 \cos 60° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_6 \sin 45° - S_7 \sin 60° = 0.$$

S_6 și S_7 fiind determinate, rezultă: $S_4 = -105{,}7$ daN.

5.3. Utilizînd metoda separării nodurilor, se cere să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.3, a.

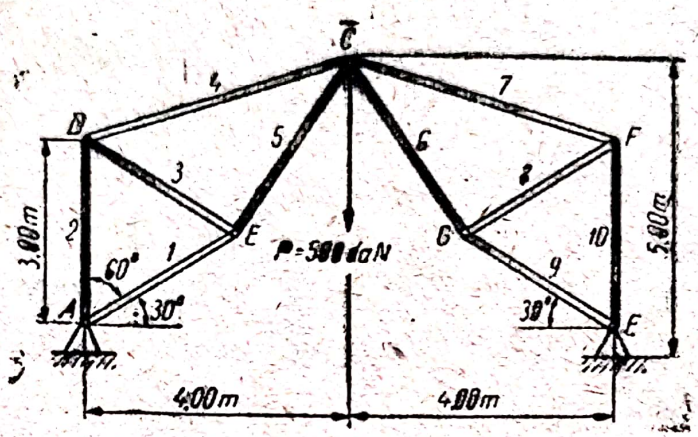


Fig. 5.3 a

Rezolvare. Datorită simetriei mecanice și geometrice pe care o prezintă grinda cu zăbrele, eforturile în barele 1 și 9, 2 și 10, 3 și 8 etc. sînt egale două cîte două.

Determinăm reacțiunile din legăturile exterioare, efectuînd echilibrul exterior; avem:

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A - X_C = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A - \frac{P}{2} = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad 5X_C - 4\frac{P}{2} = 0$$

de unde

$$X_A = X_C = 200 \text{ daN}; \; Y_A = 250 \text{ daN}.$$

Determinăm unghiurile α, β și γ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{CE'}}{\overline{EE'}} = \frac{3{,}5}{1{,}4} = 2{,}5; \quad \alpha = 68°10'; \quad \beta = 90° - \alpha = 21°50'.$$

$$\operatorname{tg}(\gamma + \beta) = \frac{\overline{DD'}}{\overline{CD'}} = 2; \quad \gamma + \beta = 63°30'; \quad \gamma = 41°40'.$$

Efectuăm echilibrul nodurilor jumătății din stînga grinzii cu zăbrele (fig. 5.3, b)

Echilibrul nodului A:

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A - S_1 \cos 30° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A - S_2 - S_1 \sin 30° = 0.$$

Se obține $S_1 = 230$ daN și $S_2 = 135$ daN.

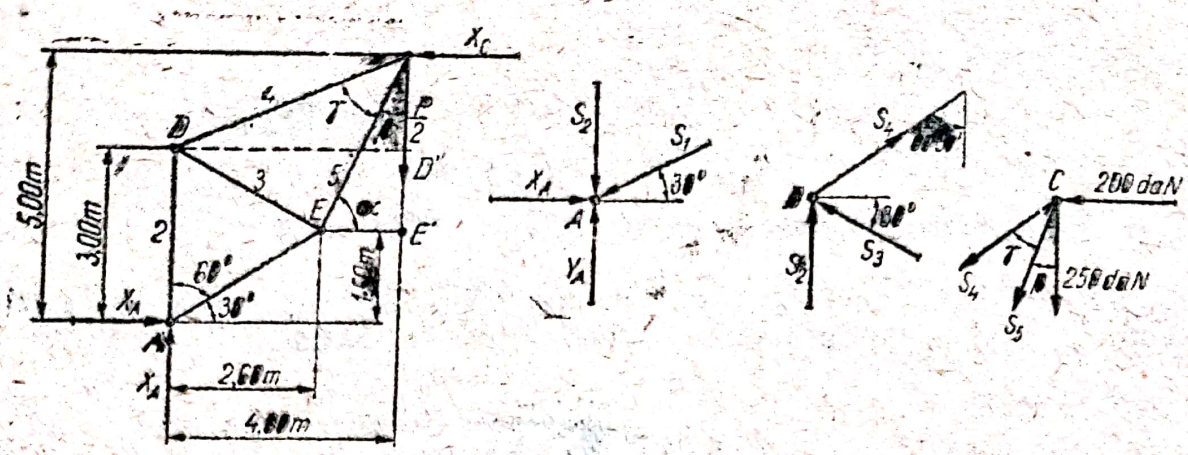


Fig. 5.3 b

Echilibrul nodului D:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -S_3 \cos 30° + S_4 \sin 63°30' = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_2 + S_3 \sin 30° + S_4 \cos 63°30' = 0.$$

Rezultă $S_3 = -144$ daN și $S_4 = -140$ daN.

Echilibrul nodului C:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -200 - S_4 \sin(\beta + \gamma) - S_5 \sin \beta = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -250 - S_4 \cos(\beta + \gamma) - S_5 \cos \beta = 0.$$

Substituind unghiurile calculate mai sus, se obține efortul S_5,

$$S_5 = -201 \text{ daN}.$$

5.4. O macara de perete în consolă are construcția arătată în fig. 5.4. Se cere să se determine eforturile din barele 1,3 și 4 ale macaralei, prin metoda secțiunilor oarecare (Ritter).

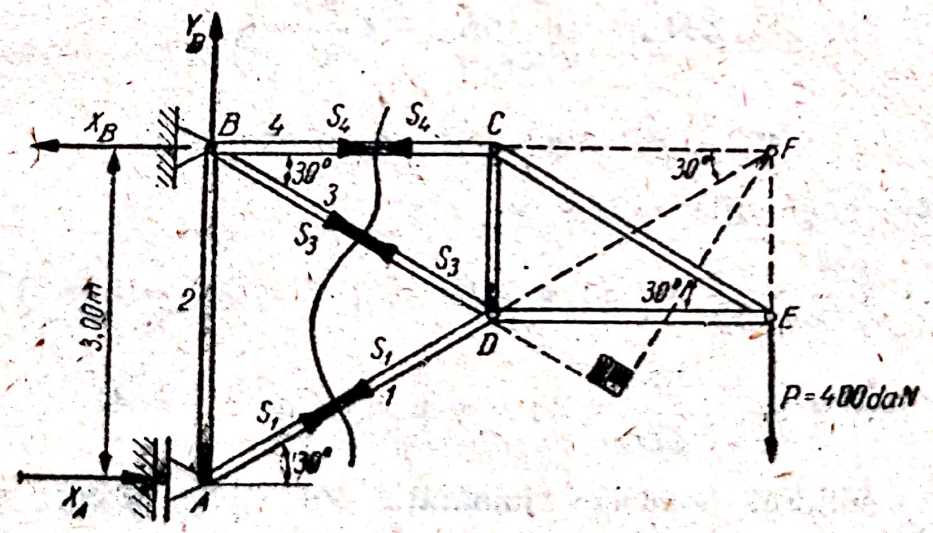


Fig. 5.4

Rezolvare. Secționăm barele și le înlocuim cu forțele S_1, S_4 și S_3, dirijate pe direcțiile barelor; vom efectua, apoi, echilibrul uneia din cele două părți. Alegînd partea din dreapta, vom determina eforturile din

bare prin ecuații de momente în raport cu nodurile B, D și F; avem respectiv

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad -3S_1 \sin 60° - dP = 0,$$

în care $d = \overline{BC} + \overline{DE} = 2\overline{BC} = 2 \cdot 3 \cos 30° = 3\sqrt{3}$. Înlocuind în ecuația de momente, deducem

$$S_1 = -2P = -800 \text{ daN}.$$

Ecuația de momente față de punctul D se scrie

$$\Sigma M_{(D)} = 0: \quad \overline{CD} \cdot S_4 - \overline{DE} \cdot P = 0,$$

sau

$$3S_4 \sin 30° - 3P \cos 30° = 0,$$

de unde

$$S_4 = P \operatorname{ctg} 30° = 400\sqrt{3} \text{ daN}.$$

În fine, ecuația de momente față de punctul F ne dă

$$\Sigma M_{(F)} = 0: \quad -\overline{BF}\, S_3 \sin 30° - d_1 P = 0;$$

ținînd seama că $\overline{BF} = \overline{AB} \operatorname{ctg} 30° = 3\sqrt{3}$ m și că $d_1 = 0$, rezultă $S_3 = 0$. Prin urmare, bara *3* este neîncărcată.

În concluzie, eforturile în cele trei bare sînt respectiv

$$S_1 = -800 \text{ daN}; \quad S_3 = 0; \quad S_4 = 692 \text{ daN}.$$

5.5. Să se determine eforturile interioare în barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.5.

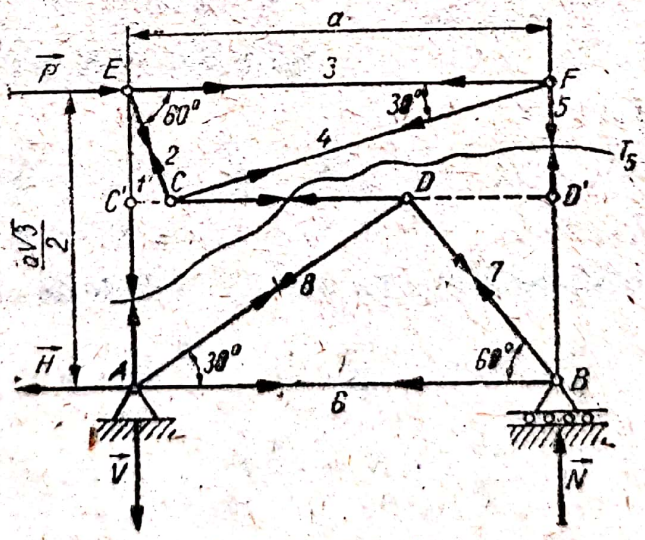


Fig. 5.5

Rezolvare. Pentru determinarea eforturilor în bare nu se recomandă aplicarea metodei izolării nodurilor, deoarece nu există nici un nod cu mai puțin de trei eforturi necunoscute. Problema se rezolvă determinînd, mai întîi, eforturile în barele *1*, *5* și *9* prin metoda secțiunilor oare-

care (Ritter). Pentru aceasta se face secțiunea din fig. 5.5 și, observînd că bara CD este orizontală, se scriu ecuațiile

$$\Sigma X_i = 0: \quad S_9 + P = 0$$

$$\Sigma M_{(C')} = 0: \quad \frac{a\sqrt{3}}{4} P + aS_5 = 0$$

$$\Sigma M_{(D')} = 0: \quad \frac{a\sqrt{3}}{4} P - aS_1 = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} P; \quad S_5 = -\frac{\sqrt{3}}{4} P \text{ și } S_9 = -P.$$

Determinăm celelalte eforturi, aplicînd metoda separării nodurilor; vom efectua, deci, echilibrul nodurilor F, E, D, B și A.

Echilibrul nodului F:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -S_3 - S_4 \cos 30° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -S_5 - S_4 \cos 60° = 0.$$

Echilibrul nodului E:

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -S_1 - S_2 \cos 30° = 0.$$

Echilibrul nodului D:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -S_9 - S_8 \cos 30° + S_7 \cos 60° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -S_8 \sin 30° - S_7 \sin 60° = 0.$$

Echilibrul nodului B:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -S_4 - S_7 \cos 60° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_5 + S_7 \cos 30° + N = 0.$$

Echilibrul nodului A:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -H + S_6 + S_8 \cos 30° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -V + S_1 + S_8 \cos 60° = 0.$$

În urma rezolvării sistemului format din ecuațiile de mai sus, se obține

$$S_2 = -\frac{P}{2}; \quad S_3 = -\frac{3P}{4}; \quad S_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} P; \quad S_6 = \frac{P}{4};$$

$$S_7 = -\frac{P}{2}; \quad S_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} P; \quad N = \frac{\sqrt{3}}{2} P; \quad H = P; \quad V = \frac{\sqrt{3}}{2} P.$$

Verificarea se poate face scriind ecuația de echilibru pentru întreaga grindă.

5.6. Grinda transversală a unei macarale-portal este formată dintr-un sistem de bare articulate, ca în fig. 5.6. Să se determine efrile în barele grinzii, cu ajutorul metodei separării nodurilor. ortu

Scanned with OKEN Scanner

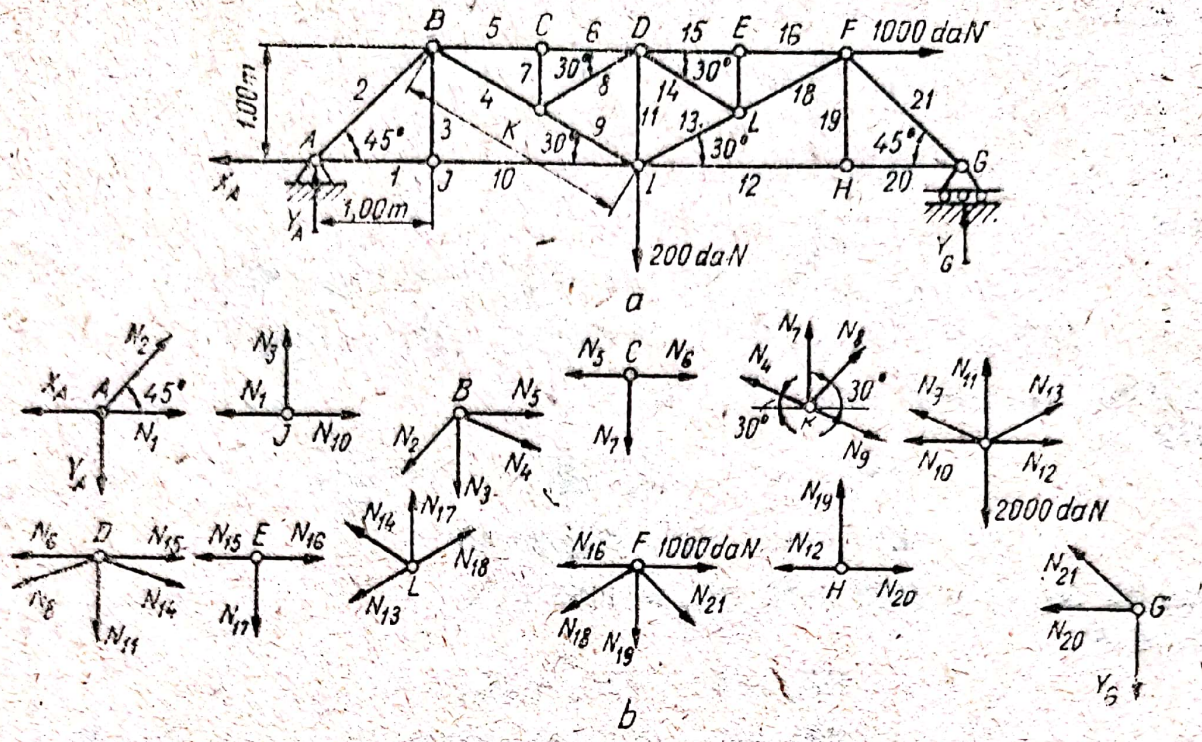


Fig. 5.6 a, b

Rezolvare. Se efectuează echilibrul exterior pentru întreaga grindă şi se determină reacţiunile din legăturile exterioare. Se poate scrie

$$\Sigma X_i = 0: \quad -X_A + 1\,000 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A - 2\,000 + Y_G = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0; \quad 1\,000 - Y_G 2(1+\sqrt{3}) + 2\,000(1+\sqrt{3}) = 0.$$

Se obţine: $X_A = 1\,000$ daN; $Y_G = 1183$ daN şi $Y_A = 817$ daN.

Se face echilibrul fiecărui nod:

Nodul A:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -X_A + N_1 + N_2 \cos 45° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A + N_2 \cos 45° = 0.$$

Rezultă

$$N_1 = 1817 \text{ daN}; \; N_2 = -1155 \text{ daN}$$

Nodul J:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_1 + N_{10} = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_3 = 0.$$

Rezultă:

$$N_{10} = 1817 \text{ daN şi } N_3 = 0.$$

Nodul B:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_2 \cos 45° + N_5 + N_4 \cos 30° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad -N_2 \cos 45° - N_3 - N_4 \cos 60° = 0.$$

Rezultă:

$$N_4 = 1633 \text{ daN}, \; N_5 = -2231 \text{ daN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Nodul C:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_5 + N_6 = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_7 = 0.$$

Se obține $N_6 = -2231$ daN.

Nodul K:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_4 \cos 30° + N_8 \cos 30° + N_9 \cos 30° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_4 \cos 60° + N_8 \cos 60° - N_9 \cos 60° = 0.$$

Rezultă $N_9 = 1633$ daN; $N_8 = 0$,

Nodul G:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_{20} - N_{21} \cos 45° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_G + N_{21} \cos 45° = 0.$$

Rezultă $N_{21} = -1673$ daN; $N_{20} = 1183$ daN.

Nodul H:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_{12} + N_{20} = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_{19} = 0.$$

Rezultă $N_{12} = 1183$ daN.

Nodul F:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_{16} + 1\,000 + N_{21} \cos 45° - N_{18} \cos 30° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad -N_{19} - N_{21} \cos 45° - N_{18} \cos 60° = 0.$$

Rezultă $N_{18} = 2366$ daN; $N_{16} = -2232$ daN.

Nodul E:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_{15} + N_{16} = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_{17} = 0.$$

Rezultă $N_{15} = -2232$ daN.

Nodul L:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_{14} \cos 30° - N_{13} \cos 30° + N_{18} \cos 30° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_{14} \cos 60° + N_{18} \cos 60° - N_{13} \cos 60° = 0.$$

Rezultă $N_{13} = 2366$ daN; $N_{14} = 0$.

Nodul I:

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_{10} - N_9 \cos 30° + N_{13} \cos 30° + N_{12} = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_{11} + N_{13} \cos 60° + N_9 \cos 60° - 2\,000 = 0.$$

Rezultă

$$N_{11} = 0.$$

5.7. Un elevator transversal din depozitul de materiale este reprezentat în fig. 5.7, a. Să se determine reacțiunile din articulația B și reazemul A precum și eforturile în barele *4*, *5* și *6*. Se cunosc: distanța a și sarcina P.

Scanned with OKEN Scanner

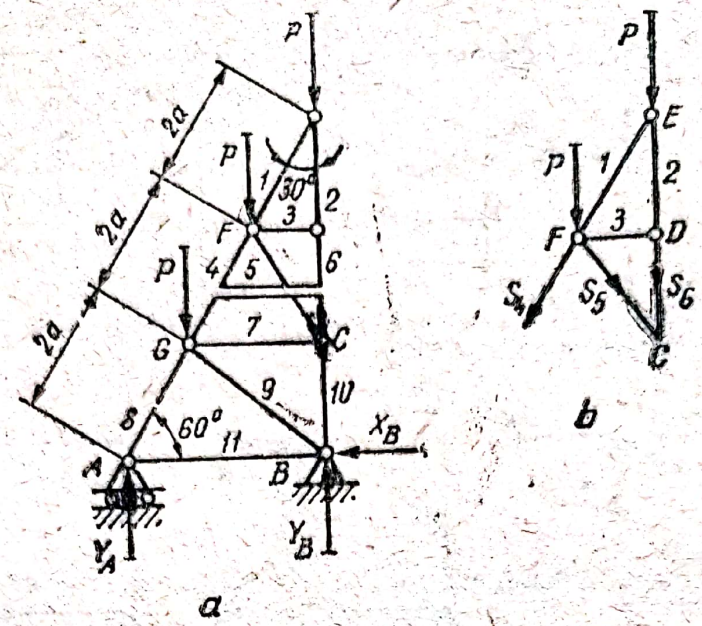


Fig. ..

R e z o l v a r e. Se suprimă legăturile mecanice din A şi B şi se introduc reacţiunile echivalente. Reacţiunile se determină din condiţia de echilibru a sistemului şi anume:

$$\begin{aligned} \Sigma X_i &= 0: \quad -X_B = 0 \\ \Sigma Y_i &= 0: \quad Y_A + Y_B - 3P = 0 \\ \Sigma M_{(B)} &= 0: \quad 3aY_A - 2aP - aP = 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Din rezolvarea sistemului de ecuaţii rezultă soluţiile

$$X_B = 0; \quad Y_A = P \text{ şi } Y_B = 2P.$$

Eforturile din barele *4*, *5* şi *6* se determină prin metoda secţiunilor. Secţionînd sistemul ca în figură şi considerînd echilibrul părţii superioare (fig. 5.7, b) se pot scrie următoarele ecuaţii de echilibru

$$\begin{aligned} \Sigma Y_i &= 0: \quad 2P + \frac{\sqrt{3}}{2} S_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} S_5 + S_6 = 0 \\ \Sigma M_{(F)} &= 0: \quad -aP - aS_6 = 0 \\ \Sigma M_{(C)} &= 0: \quad aP + 2a \frac{\sqrt{3}}{2} S_4 = 0. \end{aligned}$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii obţinut, rezultă următoarele valori pentru eforturile din barele *4*, *5* şi *6*

$$S_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3} P; \quad S_5 = -\frac{\sqrt{3}}{3} P; \quad S_6 = -P.$$

5.8. Să se determine eforturile din barele 9, 10, 14 şi 18, ale grinzii cu zăbrele din fig. 5.8.

R e z o l v a r e. Din echilibrul întregii grinzi, rezultă

$$Y_1 = Y_{\cdot} = 2{,}5P.$$

Scanned with OKEN Scanner

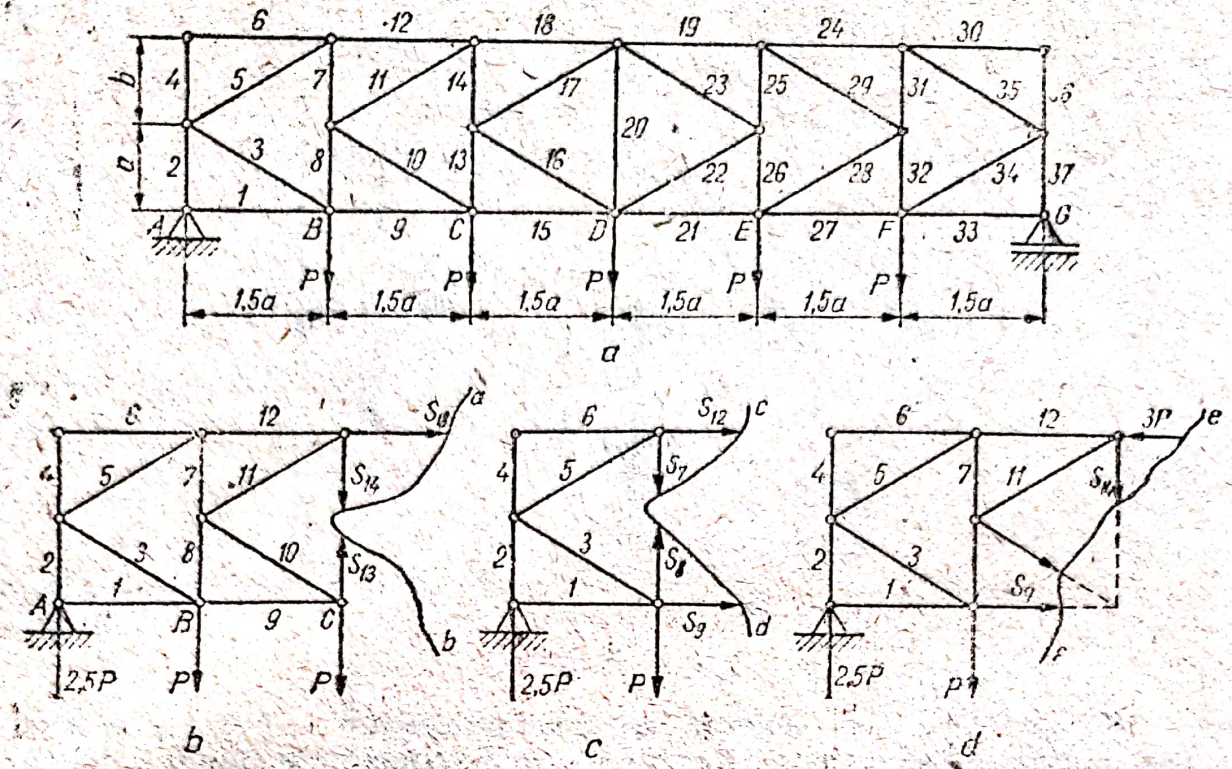


Fig. 5.8

Efectuînd echilibrul porţiunii de grindă izolată prin secţiunea $a - b$ (fig. 5.8, b), se obţine ecuaţia

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad -2a \cdot S_{18} + 1{,}5a \cdot P - 3a \cdot 2{,}5P = 0,$$

de unde $S_{18} = -3P$.

Se face apoi secţiunea 9—12 (fig. 5.8, c) şi se exprimă echilibrul porţiunii de grindă izolată

$$\Sigma M_{(B')} = 0: \quad -1{,}5a \cdot 2{,}5P + 2a \cdot S_9 = 0$$

Rezultă $S_9 = \frac{3{,}75}{2} P = 1{,}875\ P$.

Eforturile din barele 10 şi 14 se obţin utilizînd secţiunea 9—18 (fig. 5.8, d)

$$\Sigma X_i = 0: \quad -3P + 1{,}875P + S_{10} \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad -S_{14} + 1{,}5P - S_{10} \sin \alpha = 0.$$

Dar

$$\cos \alpha = \frac{1{,}5a}{a\sqrt{2{,}25 + 1}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{3{,}25}} = 0{,}83,$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3{,}25}} = 0{,}56;$$

rezultă deci

$$S_{10} = 1{,}35P; \quad S_{14} = 0.74P.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.9. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.9, formată din 7 bare egale.

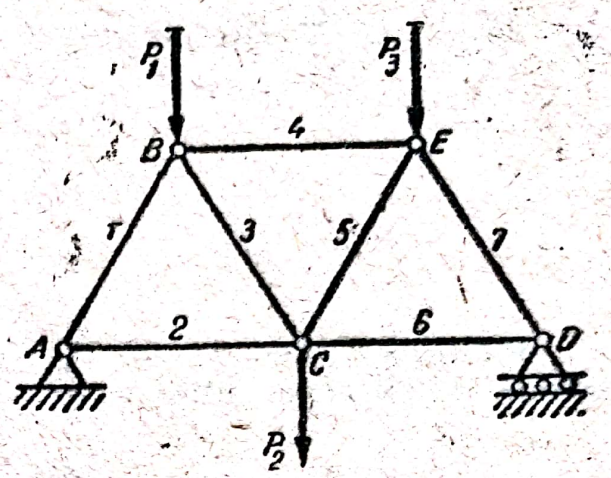


Fig. 5.9

Rezolvare. Problema a fost studiată de Pupke; matricea numerelor de influenţă este

$$A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Se observă că forma şi sarcinile sînt simetrice, deci şi matricea este simetrică, iar un efort oarecare va fi, de exemplu,

$$N_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-P_1 + 2P_2 + P_3).$$

5.10. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele (fig. 5.10, a) simplu rezemată în nodul 1 şi articulată în nodul 7.

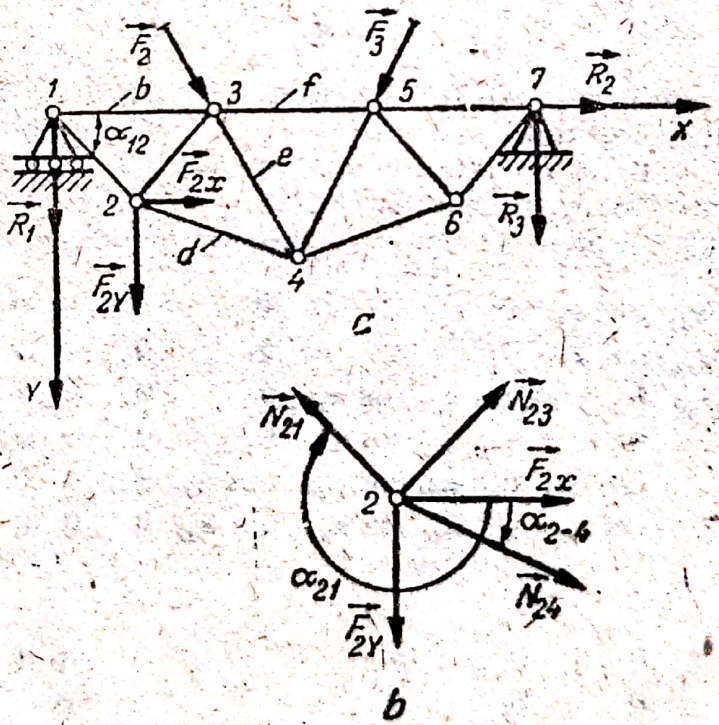


Fig. 5.10

Rezolvare. Se adoptă un sistem de referinţă *xAy* şi se exprimă forţele exterioare prin componente faţă de aceste axe. Matricea asociată acestor forţe fiind

$$[F_i] = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{bmatrix}$$

Totalitatea forțelor din noduri se constituie într-o matrice coloană $(2n \times 1)$:

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

Eforturile în bare, notate N_a, N_b, ..., precum și reacțiunile, se constituie, de asemenea într-o matrice coloană $(2n \times 1)$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_a \\ N_b \\ \vdots \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

Echilibrul unui nod oarecare i se scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \end{bmatrix} + \sum_j \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ij} & 0 \\ \sin \alpha_{ij} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

în care: N_{ij} reprezintă efortul în bara ij considerat de întindere; R_i — eventualele reacțiuni din nodul i; α_{ij} — unghiul pe care-l face axa x cu direcția barei ij, avînd orientarea de la i spre j $(i \to j)$; j ia valorile corespunzătoare tuturor barelor care pleacă din nodul i.

Astfel, pentru grinda noastră cu zăbrele rezultă

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{7x} \\ F_{7y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_{12} & \sin \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{21} & 0 & \cos \alpha_{23} & \cos \alpha_{24} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_{21} & 0 & \sin \alpha_{23} & \sin \alpha_{24} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{34} & \cos \alpha_{35} & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{31} & \sin \alpha_{32} & \sin \alpha_{34} & \sin \alpha_{35} & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_a \\ N_b \\ N_c \\ N_d \\ N_e \\ N_f \\ \vdots \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = 0$$

sau în formă condensată

$$\{F\} + [T] \cdot \{N\} = 0$$

Rezultă matricea-vector a necunoscutelor

$$\{N\} = -[T]^{-1}\{F\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.11. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.11, a întrebuințată la susținerea unui rezervor într-o fabrică de cherestea. Figurile $ABCD$ și $EFGH$ sînt două pătrate de laturi $3a$ respectiv a, planele lor fiind ambele orizontale și situate la distanța $5a$ unul de celălalt. Forțele P sînt verticale.

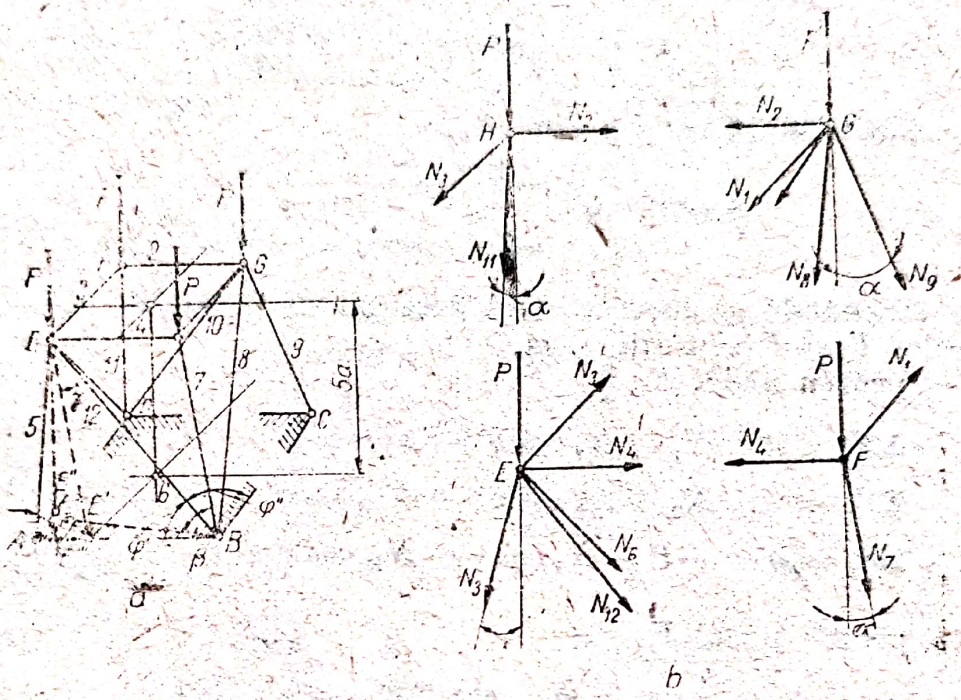


Fig. 5.11 a, b

Rezolvare. Grinda cu zăbrele are în total 12 bare, deci prezintă 12 necunoscute, eforturile din bare. Se pot scrie cîte trei ecuații de echilibru pentru fiecare din nodurile E, F, G, H; vom obține deci $3 \cdot 4 = 12$ ecuații; eforturile din toate barele grinzii pot fi, deci complet determinate. Reacțiunile transmise plăcii de fundație sînt egale și direct opuse rezultantei eforturilor din bare, repectiv din punctele A, B, C și D.

Figura formată de barele sistemului este un trunchi de piramidă regulată, muchiile ei făcînd cu laturile pătratului de bază unghiurile date de

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{26}.$$

Unghiurile muchiilor cu verticala sînt date de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AE'}{E} = \frac{a\sqrt{2}}{5a} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Verificare:

$$2\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha = 1.$$

Unghiul unei diagonale cu verticala este dat de

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{E'B}{EE'} = \frac{a\sqrt{5}}{5a} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Distanța EE''' este dată de

$$EE''' = \sqrt{\overline{EE'}^2 + \overline{EE''}^2} = \sqrt{(5a)^2 + a^2} = a\sqrt{26}$$

iar unul dintre unghiurile diagonale cu orizontala este dat de

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\overline{EE'''}}{\overline{E'''B'}} = \frac{a\sqrt{26}}{2a} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Celălalt unghi rezultă din relația

$$\cos \varphi'' = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma - \cos^2 \varphi'} = \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Toate elementele geometrice fiind determinate, ecuațiile de echilibru ale nodurilor E și F sînt (fig. 4.11, b):

— pentru nodul E:

$$\Sigma X_i = 0: \quad N_9 + N_4 \cos \varphi' + N_{12} \cos \varphi'' - N_5 \cos \beta = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_3 + N_6 \cos \varphi'' + N_{12} \cos \varphi' - N_5 \cos \beta = 0$$
$$\Sigma Z_i = 0: \quad -P - N_6 \cos \gamma - N_{12} \cos \gamma - N_5 \cos \alpha = 0.$$

— pentru nodul F:

$$\Sigma X_i = 0: \quad N_1 - N_7 \cos \beta = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_4 - N_7 \cos \beta = 0$$
$$\Sigma Z_i = 0: \quad -P - N_7 \cos \alpha = 0.$$

Din ultimele trei ecuații, ținînd seama și de simetria grinzii, rezultă

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = -\frac{P}{5}; \quad N_7 = N_{11} = -\frac{\sqrt{27}}{5} P.$$

Introducînd aceste valori în sistemul de ecuații de echilibru al nodului E, se obține un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute N_5, N_4, N_{12}, care rezolvat conduce la

$$N_5 = \frac{\sqrt{27}}{5} P; \quad N_6 = N_{12} = 0.$$

În baza simetriei, rezultă

$$N_9 = N_5 = \frac{\sqrt{27}}{5} P; \quad N_{10} = N_6 = 0; \quad N_{12} = N_8 = 0.$$

5.12. Se consideră sistemul articulat plan din fig. 5.12, la care $l_{12} = l_{23}$. Forțele $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ și $\mathbf{P}_3$ sînt aplicate în nodurile *1*, *2*, *3*. Se cere să se examineze dacă eforturile în bare au valori finite și bine determinate.

Scanned with OKEN Scanner

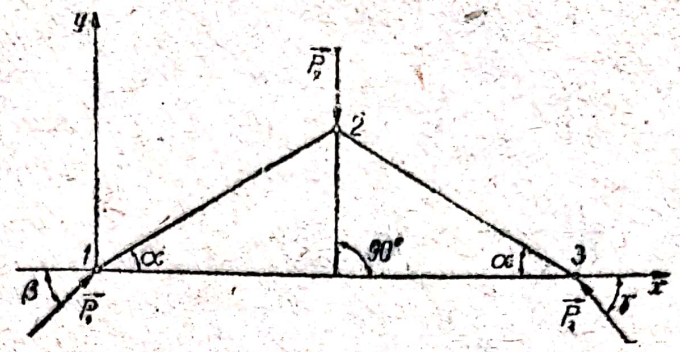


Fig. 5.12

Rezolvare. Matricea coeficienţilor este

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \cos\alpha \\ 0 & -\cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{Vmatrix}$$

iar matricea sistemului

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & 0 & -P_1\cos\beta \\ -\cos\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & P_3\cos\gamma \\ \sin\alpha & 0 & -P_1\sin\beta \\ -\sin\alpha & -\sin\alpha & P_2 \\ 0 & \sin\alpha & -P_3\sin\gamma \end{Vmatrix}$$

Presupunînd că α este diferit de $\pi/2$, rangul matricei coeficienţilor este egal cu 2. Pentru ca sistemul de ecuaţii să fie compatibil, trebuie ca matricea sistemului să aibă acelaşi rang. Vom avea, deci

$$b = 2,\ r = 0,\ n = 3,\ \rho = 2$$

şi

$$\rho = b,\ \rho < 2n,$$

unde ρ este rangul comun al celor două matrice, b numărul barelor sistemului articulat, n numărul articulaţiilor, iar r numărul componentelor necunoscute ale reacţiunilor. Prin urmare, sistemul dat este un sistem static determinat şi mobil. Numărul parametrilor sistemului este $p = 2n - \rho = 4$.

Considerăm ca determinant principal

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \neq 0$$

relaţiile suplimentare pentru determinarea acestor patru parametri se obţin anulînd cei patru determinanţi caracteristici. Dacă se aleg mărimile P_1, P_3, β, γ ca parametri, rezultă

$$P_1 = P_3 = \frac{P_2}{2\sin\alpha};\ \beta = \gamma = \alpha.$$

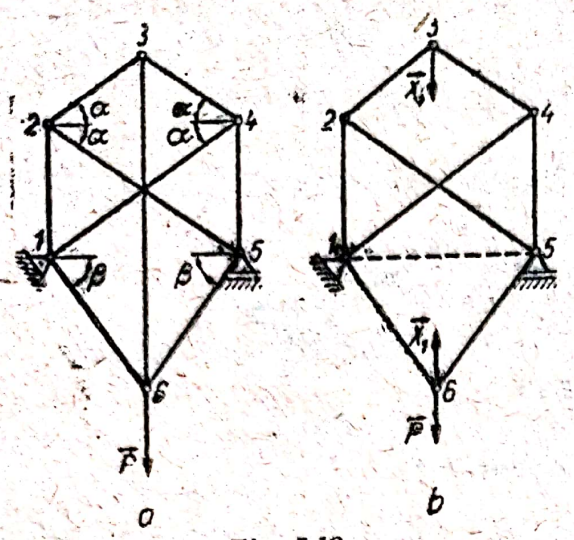


Fig. 5.13

De menționat că alegerea acestor mărimi ca parametri este echivalentă cu introducerea a două articulații cilindrice în punctele 1 și 3.

5.13. Se dă grinda cu zăbrele din fig. 5.13 și se cere să se determine eforturile în bare prin metoda înlocuirii barelor (metoda lui Henneberg).

Rezolvare. Metoda înlocuirii barelor constă în suprimarea a p bare și înlocuirea acestora prin alte bare astfel ca sistemul nou creat să fie rezolvabil prin una din metodele cunoscute (separării nodurilor sau Ritter). Cele p bare noi pot lega două noduri între ele, sau pot lega un nod al sistemului cu un punct fix oarecare. Trebuie avut, însă grijă ca noua grindă cu zăbrele transformată să fie nemobilă și static determinată.

Vom nota cu $N_0^{(1)}$, $N_0^{(2)}$, ... eforturile din sistemul transformat, produse de forțe exterioare date și care pot fi determinate prin metoda izolării nodurilor sau prin metoda secțiunilor.

Dacă ne imaginăm că barele suprimate au fost înlocuite prin eforturi, pe care le notăm cu X_1, X_2, ..., X_p, să presupunem că punem succesiv

$$\begin{aligned}
&X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,\ \ldots,\ X_{p-1} = 0,\ X_p = 0\\
&X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0,\ \ldots,\ X_{p-1} = 0,\ X_p = 0\\
&X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1,\ \ldots,\ X_{p-1} = 0,\ X_p = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,\ \ldots,\ X_{p-1} = 1,\ X_p = 0\\
&X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,\ \ldots,\ X_{p-1} = 0,\ X_p = 1.
\end{aligned}$$

Vom indica mai simplu aceste stări de încărcare cu : $X_1=1$, $X_2=1\ldots$, $X_p = 1$. Urmează deci că în sistemul transformat sînt perechi de forțe exterioare, aplicate asupra nodurilor respective.

Pentru starea de încărcare $X_1 = 1$, vor corespunde eforturile $N_1^{(1)}$, $N_1^{(2)}$, $N_1^{(3)}$, ... în barele sistemului transformat. De asemenea, pentru $X_2 = 1$ va corespunde $N_2^{(1)}$, $N_2^{(2)}$, $N_2^{(3)}$, ..., ș.a.m.d. Aceste eforturi rezultate din încărcările $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, ..., $X_p = 1$ pot fi de asemenea calculate prin metoda izolării nodurilor sau metoda secțiunilor.

Considerînd acum că forțele X_1, X_2, ..., X_p, în sistemul transformat, au valori oarecare și notînd cu $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, ... eforturile din barele sistemului transformat, rezultate din suprapunerea încărcărilor date și a încărcărilor X_1, X_2, ..., X_p, rezultă pe baza relațiilor liniare de dependență dintre eforturi și încărcări

$$\begin{aligned}
N^{(1)} &= N_0^{(1)} + N_1^{(1)}X_1 + N_2^{(1)}X_2 + \ldots + N_p^{(1)}X_p\\
N^{(2)} &= N_0^{(2)} + N_1^{(2)}X_1 + N_2^{(2)}X_2 + \ldots + N_p^{(2)}X_p \qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta deoarece dacă, de exemplu, încărcarea $X_2 = 1$ a produs în bara 1 efortul $N_2^{(1)}$, încărcarea oarecare X_2 va produce în aceeaşi bară efortul $N_2^{(1)} X_2$.

Vom arăta acum că eforturile din cele p bare noi ale sistemului modificat sînt nule, deoarece aceste bare nu există în realitate. Rezultă, astfel, un sistem de p ecuaţii liniare:

$$\begin{aligned}
&N_0^{(1)} + N_1^{(1)} X_1 + N_2^{(1)} X_2 + \ldots + N_p^{(1)} X_p = 0 \\
&N_0^{(2)} + N_1^{(2)} X_1 + N_2^{(2)} X_2 + \ldots + N_p^{(2)} X_p = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&N_0^{(p)} + N_1^{(p)} X_1 + N_2^{(p)} X_2 + \ldots + N_p^{(p)} X_p = 0
\end{aligned} \qquad (2)$$

din care se pot calcula necunoscutele X_1, X_2, ..., X_p şi, apoi, cu ajutorul relaţiilor (1) se pot determina celelalte eforturi din bare. Pentru aceasta este necesar ca determinantul coeficienţilor să fie diferit de zero.

Sistemul iniţial, la care cele p bare sînt suprimate, se va găsi în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare date şi a forţelor X_1, X_2, ..., X_p determinate din sistemul de ecuaţii (2). Restabilind apoi configuraţia sistemului iniţial, prin introducerea la loc a barelor suprimate, forţele X_i vor reprezenta tocmai eforturile din aceste bare.

În grinda cu zăbrele din fig. 5.13, este suficient să înlocuim o singură bară, pentru a putea reprezenta eforturile din bare. În acest caz, bara 3—6 a fost înlocuită prin bara 1—5. Notînd prin X_1 efortul din bara 3—6 din sistemul iniţial, elementele geometrice ale sistemului sînt suficient determinate, dacă se cunosc unghiurile α şi β. Presupunem că $\sin \alpha = 0{,}6$ şi $\sin \beta = 0{,}8$.

În tabelul 5.13 s-au înscris în coloanele 2 şi 3 eforturile din bare, produse de încărcarea dată P şi de încărcarea $X_1 = 1$, în sistemul modificat.

Tabelul 5.13

Bara	Efortul N_0 din sarcina P	Efortul N_1 din încărcarea $X_1 = 1$	$N_1 X_1$	Eforturile definitive $N = N_0 + N_1 X_1$
2—3, 3—4	0	$-\frac{5}{6}$	$+\frac{15}{14} P$	$+\frac{15}{14} P$
1—2, 4—5	0	-1	$+\frac{9}{7} P$	$+\frac{9}{7} P$
2—5, 4—1	0	$+\frac{5}{6}$	$+\frac{15}{14} P$	$-\frac{15}{14} P$
1—6, 5—6	$+\frac{5}{8} P$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{45}{56} P$	$+\frac{10}{7} P$
1—5	$-\frac{3}{8} P$	$-\frac{7}{24}$	$+\frac{3}{8} P$	0

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul (2) se reduce la

$$N_0^{(1)} + N_1^{(1)} X_1 = 0$$

unde $N_0^{(1)}$ este efortul din bara introdusă, produs de încărcarea dată, iar $N_1^{(1)}$ este efortul din aceeași bară, produs de încărcarea $X_1 = 1$. Substituind prin valori numerice calculate

$$X_1 = -\frac{N_0^{(1)}}{N_1^{(1)}} = -\frac{3P \cdot 24}{8 \cdot 7} = -\frac{9}{7} P.$$

Ultimele două coloane servesc la calcularea eforturilor definite conform sistemului (2), care în cazul nostru devine

$$N = N_0 + N_1 X_1.$$

5.14. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.14, a, utilizînd metode analitice de calcul.

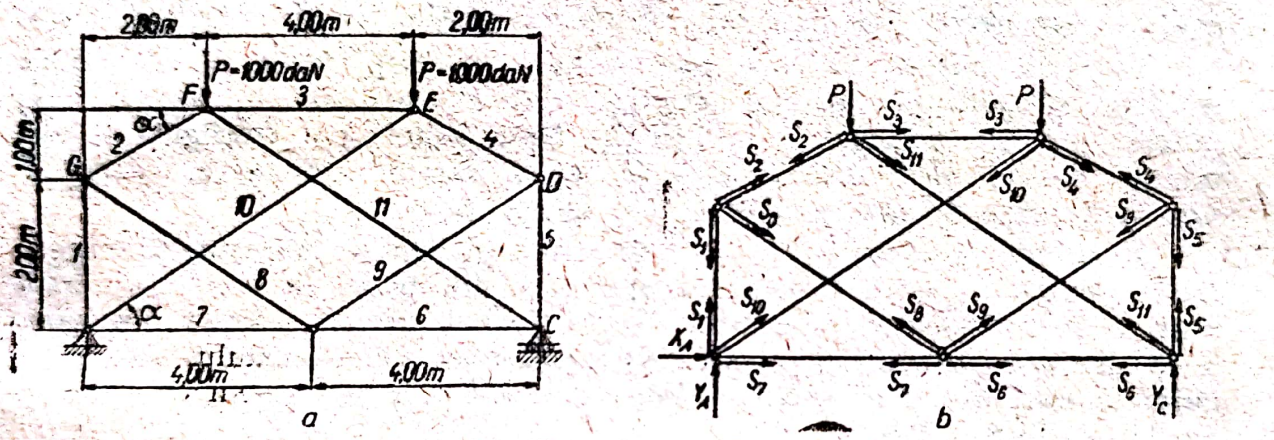


Fig. 5.14 a, b

Rezolvare. Considerăm că în toate barele există eforturi de tracțiune și scriem ecuațiile de echilibru pentru fiecare nod în parte (fig. 5.14,b)

— Nodul I

$$\begin{aligned} S_7 + S_{10} \cos \alpha + X_A &= 0 \\ S_1 + S_{10} \sin \alpha + Y_A &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

— Nodul II

$$\begin{aligned} S_2 \cos \alpha + S_8 \cos \alpha &= 0 \\ S_2 \sin \alpha - S_8 \sin \alpha - S_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

— Nodul III

$$\begin{aligned} S_3 + S_{11} \cos \alpha - S_2 \cos \alpha &= 0 \\ -S_2 \sin \alpha - S_{11} \sin \alpha - P &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

— Nodul IV

$$\begin{aligned} S_4 \cos \alpha - S_9 - S_{10} \cos \alpha &= 0 \\ -S_4 \sin \alpha - S_{10} \sin \alpha - P &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

— Nodul V

$$\begin{aligned} -S_4 \cos\alpha - S_9 \cos\alpha &= 0 \\ S_4 \sin\alpha - S_9 \sin\alpha - S_5 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

— Nodul VI

$$\begin{aligned} -S_6 - S_{11} \cos\alpha &= 0; \\ S_5 + S_{11} \sin\alpha + Y_C &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

— Nodul VII

$$\begin{aligned} S_6 - S_7 - S_8 \cos\alpha + S_9 \cos\alpha &= 0 \\ S_8 \sin\alpha + S_9 \sin\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Ţinînd seama că:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}89442, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}44721 \tag{8}$$

sistemul format prin reunirea sistemelor corespunzătoare fiecărui nod, se poate scrie sub forma matriceală:

0	0	0	0	0	0	1	0	0	0,89442	0	1	0	0	S_1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,44721	0	0	1	0	S_2	0
0	0,89442	0	0	0	0	0	0,89442	0	0	0	0	0	0	S_3	0
−1	0,44721	0	0	0	0	0	−0,44721	0	0	0	0	0	0	S_4	0
0	−0,89442	1	0	0	0	0	0	0	0	0,89442	0	0	0	S_5	0
0	−0,44721	0	0	0	0	0	0	0	−0,44721	−0,44721	0	0	0	S_6	1000
0	0	−1	0,89442	0	0	0	0	0	−0,89442	0	0	0	0	S_7	0
0	0	0	−0,44721	0	0	0	0	0	−0,44721	0	0	0	0	S_8	1000
0	0	0	−0,89442	0	0	0	0	−0,89442	0	0	0	0	0	S_9	0
0	0	0	0,44721	−1	0	0	0	−0,44721	0	0	0	0	0	S_{10}	0
0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	−0,89442	0	0	0	S_{11}	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0,44721	0	0	0	S_{12}	0
0	0	0	0	0	1	−1	−0,89442	0,89442	0	0	0	0	0	S_{13}	0
0	0	0	0	0	0	0	0,44721	0,44721	0	0	0	0	0	S_{14}	0

Rezolvînd sistemul de ecuaţii (9) rezultă următoarele valori ale eforturilor din barele grinzii cu zăbrele:

Numărul barei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Valoarea efortului în N	0	0	2000	0	0	2000	2000	0	0	−2236	−2236	0	1000	1000

5.15. Utilizînd metoda izolării nodurilor, să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.15.

Rezolvare. Se calculează reacţiunile grinzii şi se obţine (fig. 5.15, b)

$$V_1 = \frac{P}{2}; \quad V_2 = \frac{3}{2}P; \quad H = P.$$

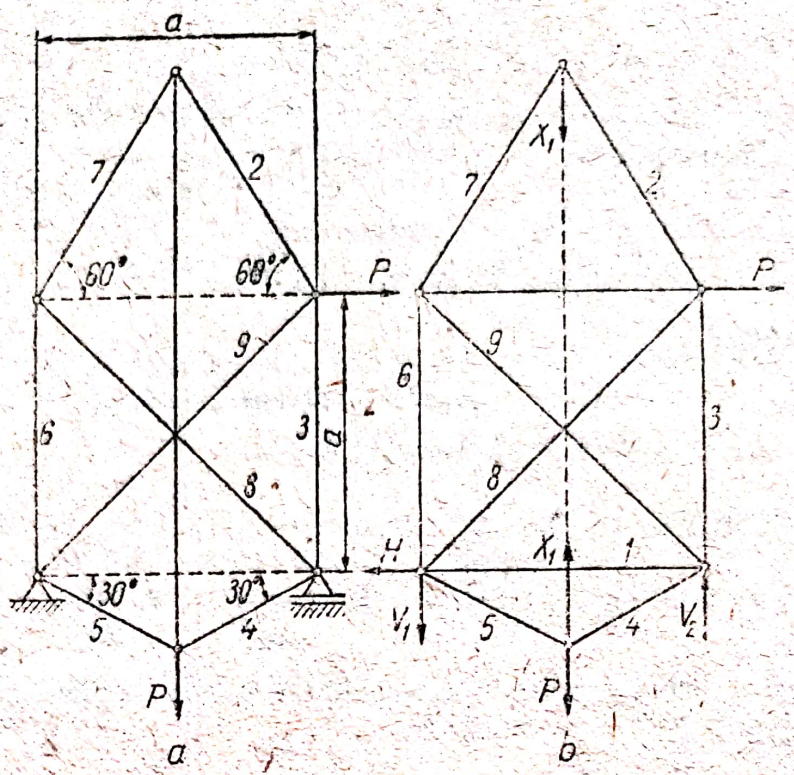


Fig. 5.15 a, b

Utilizînd metoda izolării nodurilor, se determină eforturile din barele grinzii transformate, în cazul cînd $X_1 = 0$. Rezultă

$$S_1^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}P,\ S_2^{(0)} = S_7^{(0)} = S_6^{(0)} = S_9^{(0)} = 0,\ S_3^{(0)} = -P,\ S_4^{(0)} = S_5^{(0)} = P,$$

$$S_8^{(0)} = \sqrt{2}P.$$

Se consideră apoi grinda transformată, încărcată numai cu forța $X_1 = 1$ și, utilizînd metoda izolării nodurilor, rezultă

$$S_1^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{6};\ S_2^{(1)} = S_7^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{3};\ S_4^{(1)} = S_5^{(1)} = -\frac{1}{2}$$

$$S_8^{(1)} = S_9^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}};\ S_3^{(1)} = S_6^{(1)} = -\frac{3+\sqrt{3}}{6}.$$

Din condiția $S_1^{(0)} + X_1 S_1^{(1)} = 0$, se obține $X_1 = P$ și deci

$$S_2 = S_7 = \frac{\sqrt{3}}{3}P;\ S_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}P;\ S_4 = S_5 = \frac{P}{2},$$

$$S_6 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}P;\ S_8 = -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}P;\ S_9 = -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}P.$$

5.16. Să se determine, prin metoda secțiunilor oarecare, eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.16, a.

Scanned with OKEN Scanner

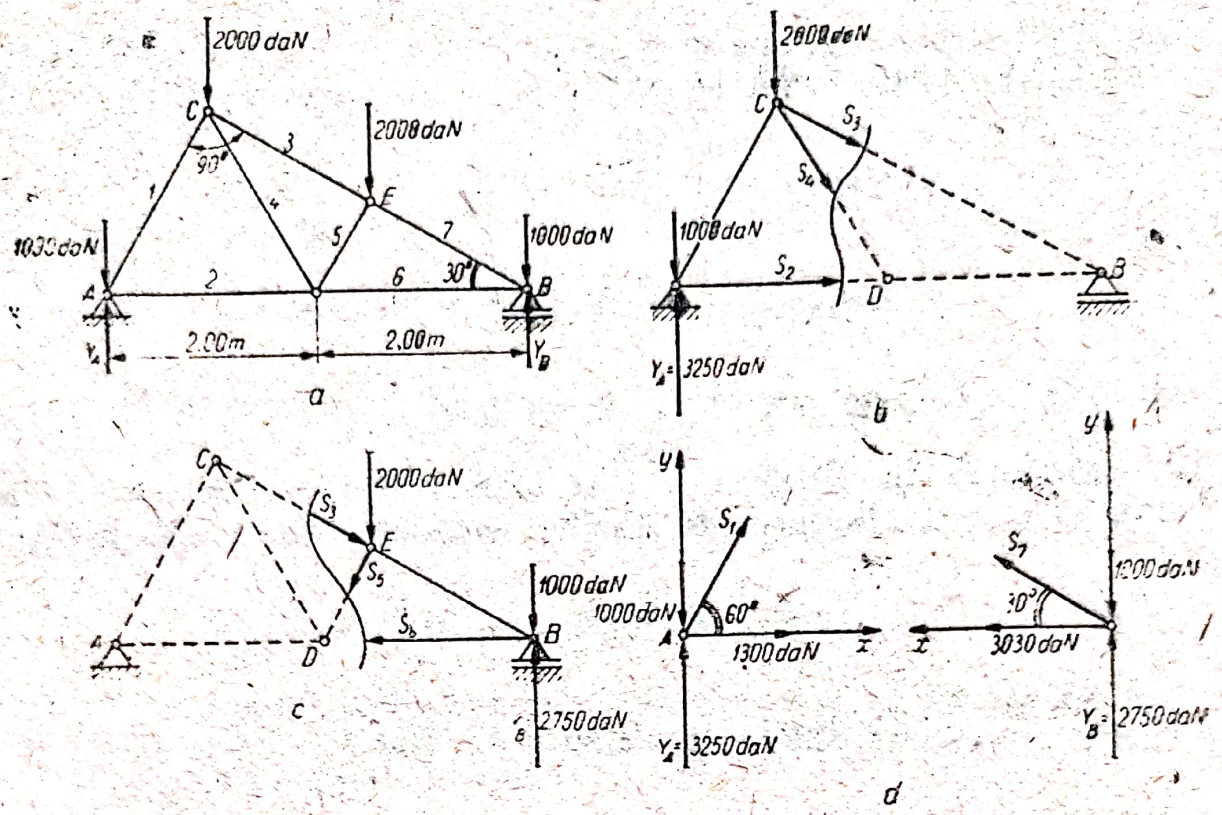


Fig. 5.16, a, b, c, d

Rezolvare. Determinăm reacțiunile din reazemele A și B, scriind ecuațiile de echilibru pentru întreaga grindă

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A + Y_B - 6000 = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad -2000.2 \cdot \frac{1}{2} - 2000\left(2 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) - 1000 \cdot 4 + 4Y_B = 0$$

Rezultă valorile reacțiunilor

$$Y_A = 3250 \text{ daN}; \; Y_B = 2750 \text{ daN}.$$

Pentru determinarea eforturilor în barele 1, 2, ..., 7 se scriu ecuațiile de echilibru ale porțiunii de grindă izolată prin secțiunea 1—1 (fig. 5,16, b)

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad -3250 + 1000 + 2\frac{\sqrt{3}}{2} S_2 = 0$$

$$\Sigma M_{(D)} = 0: \quad -3250 \cdot 2 + 1000 \cdot 2 + 2000 \cdot 1 - S_3 \cdot 1 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad 3250 - 3000 - S_4 \frac{\sqrt{3}}{2} - S_3 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Rezultă: $S_2 = 1300$ daN; $S_3 = -2500$ daN; $S_4 = 1730$ daN.

Pentru determinarea eforturilor în barele 5 și 6, se utilizează ecuațiile de echilibru ale porțiunii de grindă izolate prin secțiunea 2—2 (fig. 5.16, c)

$$\Sigma M_{(E)} = 0: \quad 1750 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - S_6 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad 2000 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + S_5 \cdot \sqrt{3} = 0.$$

Rezultă: $S_6 = 3030$ daN; $S_5 = -1730$ daN.

Eforturile din barele 1 și 7 se obțin izolînd nodurile A și B (fig. 5.16, d) și scriind ecuațiile de echilibru corespunzătoare; avem respectiv

$$\Sigma Y_i = 0: \quad 2250 + S_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad 1750 + S_7 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Rezultă: $S_1 = -2600$ daN și $S_7 = -3500$ daN.

5.17. Să se determine, prin metoda secțiunilor, eforturile din barele: 10, 11 și 12, ale grinzii cu zăbrele din figura 5,17.

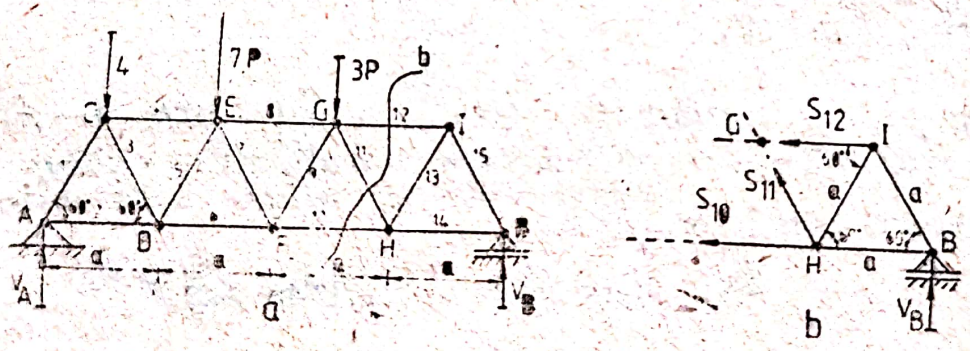


Fig. 5.17 a, b,

Rezolvare. Se determină, în prealabil, reacțiunile exterioare, utilizînd metoda rigidizării, cu care se obțin ecuațiile de echilibru:

$$\Sigma Y_i = 0; \quad V_A + V_B - 14P = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0; \quad 4a \cdot V_B - \frac{a}{2} 4P - \frac{3a}{2} 7P - \frac{5a}{2} 3P = 0$$

Rezultă:

$$V_A = 9P \quad \text{și} \quad V_B = 5P.$$

Printr-o secțiune, care trece prin barele: 10, 11 și 12, se separă grinda în două părți; efectuînd echilibrul părții din dreapta avem:

$$\Sigma M_{(H)} = 0; \quad S_{12} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5aP = 0$$

$$\Sigma M_{(G)} = 0; \quad -S_{10} a \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{2} a \cdot 5P = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad S_{11} \frac{\sqrt{3}}{2} + 5P = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații obținut, rezultă:

$$S_{10} = 5\sqrt{3}P;$$

$$S_{11} = -\frac{10}{3}\sqrt{3}P;$$

$$S_{12} = -10\frac{\sqrt{3}}{3}P.$$

5.18. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.18, a prin metoda planului Cremona. În punctul A grinda este articulată, iar în B are o legătură cu fir.

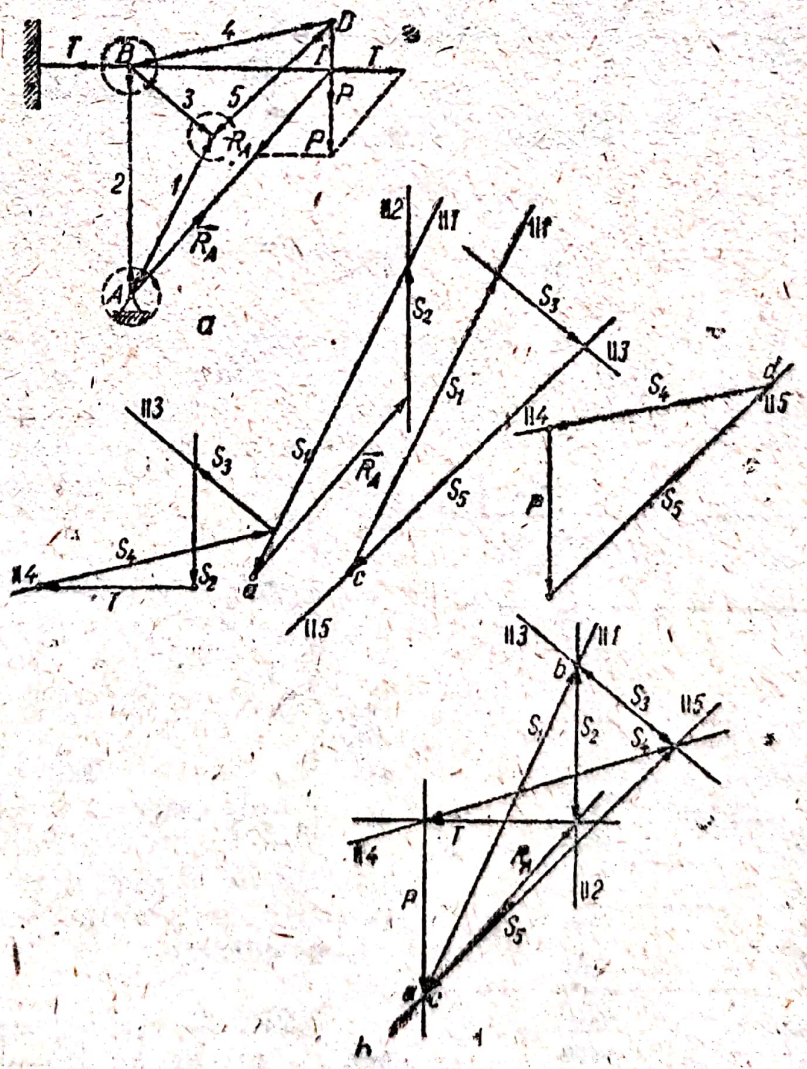


Fig. 5.18 a, b

Rezolvare. Se efectuează echilibrul grafic al întregii grinzi și se determină astfel reacțiunea din articulația A și tensiunea din fir. Cele trei forțe: $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}_A$ și $\mathbf{T}$ formează un poligon închis, deoarece grinda este considerată în echilibru. Se construiește apoi poligonul forțelor pentru fiecare nod în parte, însumînd forțele exterioare și eforturile din bare, într-o anumită ordine, corespunzătoare unui anumit sens, ales în prealabil (de exemplu de la stînga la dreapta). Fiecare nod va fi în echilibru dacă poligonul forțelor concurente în acel nod se va închide. Poligoanele forțelor corespunzătoare tuturor nodurilor se construiesc peste poligonul forțelor exterioare și al reacțiunilor exterioare obținîndu-se astfel planul (epura) Cremona (Maxwell), prezentat în fig. 5.18, b, unde se poate vedea și poligonul tensiunilor fiecărui nod separat.

5.19. Să se traseze planul Cremona pentru grinda cu zăbrele din fig. 5.19, a.

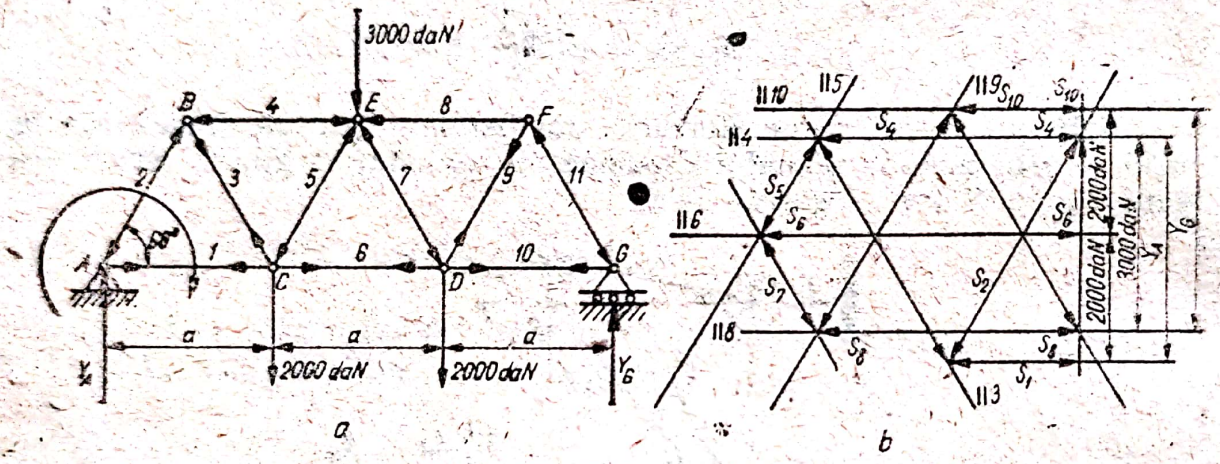


Fig. 5.19 a, b

Rezolvare. Datorită simetriei mecanice și geometrice, eforturile din barele grinzii cu zăbrele vor fi simetric — egale, simetria apărînd și în planul Cremona. Alegînd ca scară a forțelor: 1 cm = 1000 daN, rezultă valorile eforturilor din bare, prezentate în tabelul 5.19. Planul Cremona se prezintă în fig. 5.19, b.

Tabelul 5.19

Bara	Eforturile din bare [daN]
1	2050
2	—4000
3	4000
4	—4050
5	—1750
6	4900
7	1750
8	—4050
9	4000
10	2050
11	—4000

5.20. Să se traseze planul Cremona pentru grinda cu zăbrele din fig. 5.20.

Rezolvare. Efectuăm echilibrul grafic al întregii grinzi și determinăm reacțiunile din articulația A și reazemul B. Alegînd ca sens de parcurgere sensul de la stînga la dreapta (sensul acelor de ceasornic) și construind, în cadrul aceleiași epure, poligoanele de echilibru grafic ale fiecărui nod în parte, va rezulta planul Cremona al grinzii considerate.

5.21. Să se traseze planul Cremona pentru grinda cu zăbrele din fig. 5.21.

Scanned with OKEN Scanner

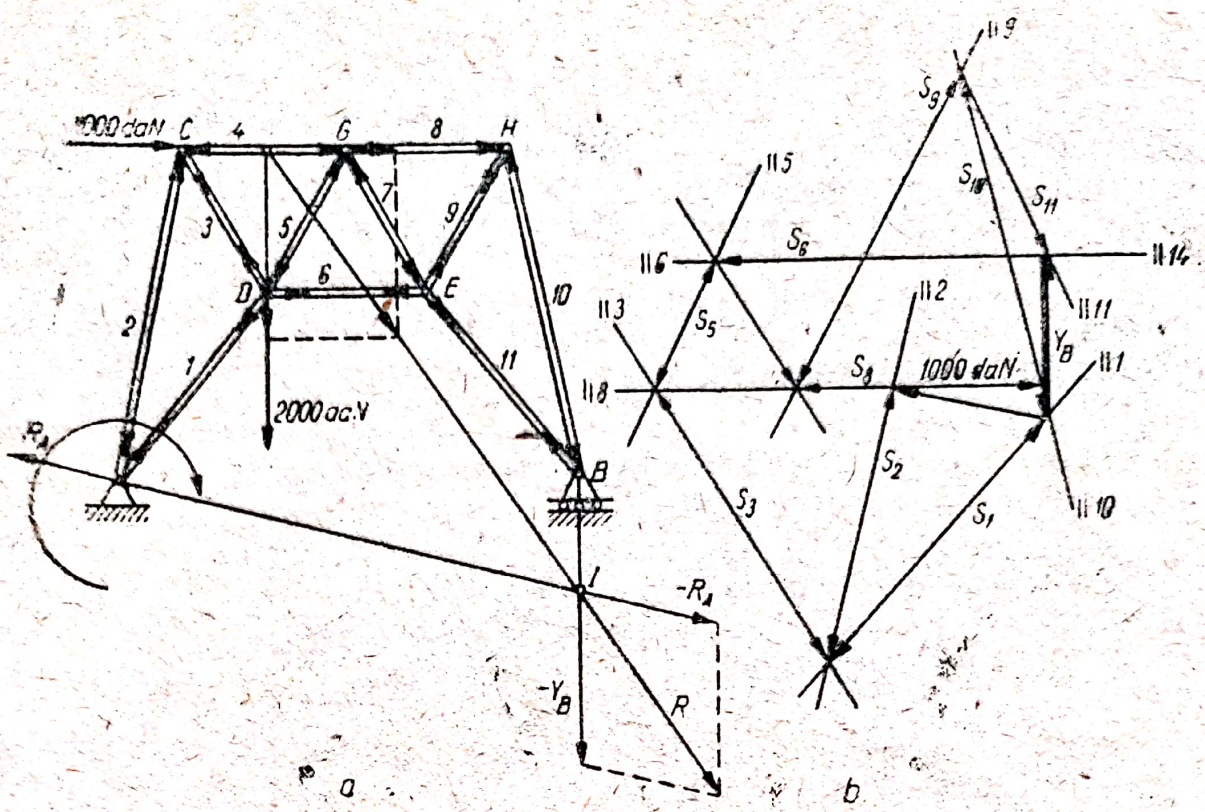


Fig. 5.20 *a, b*

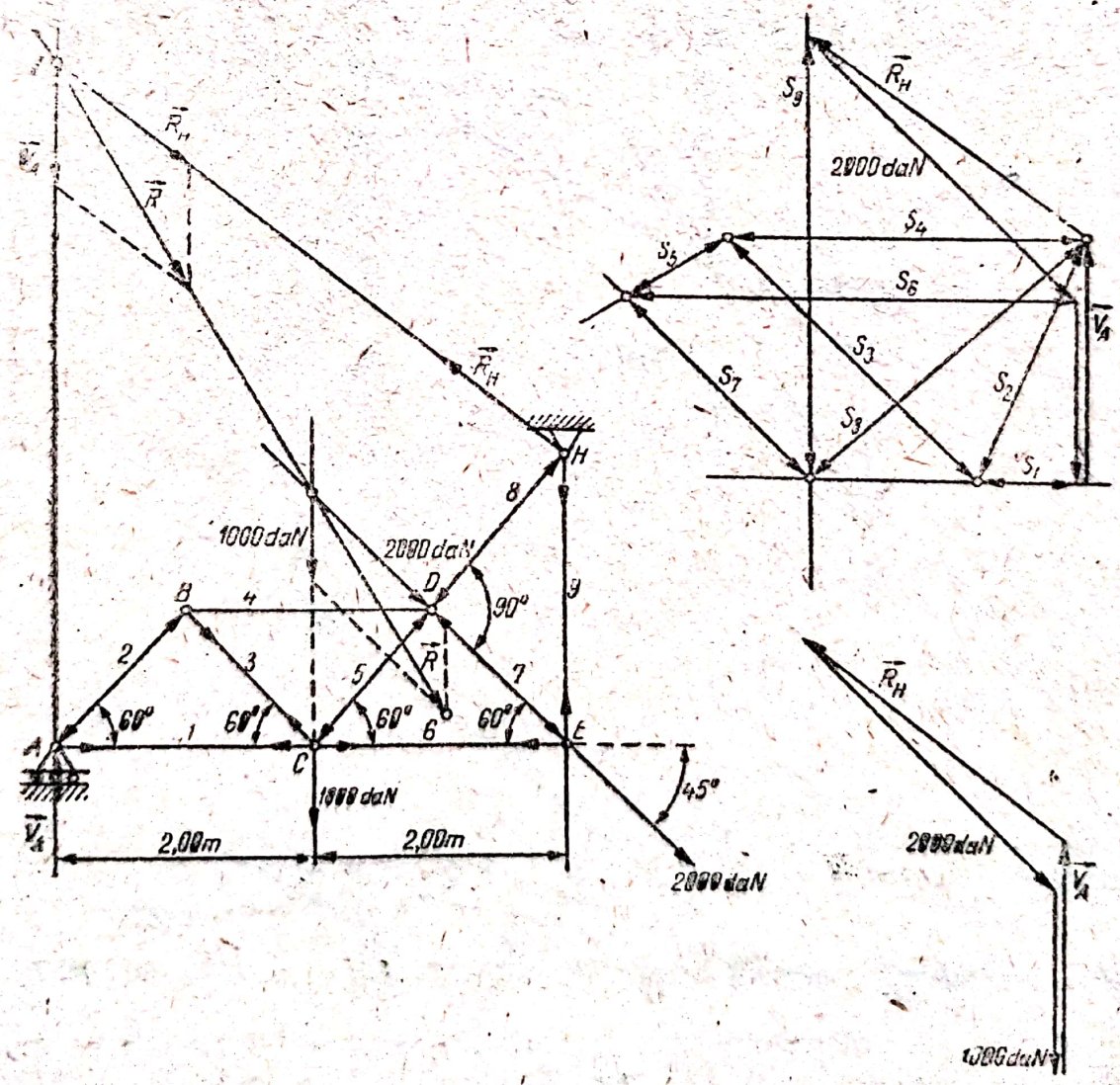
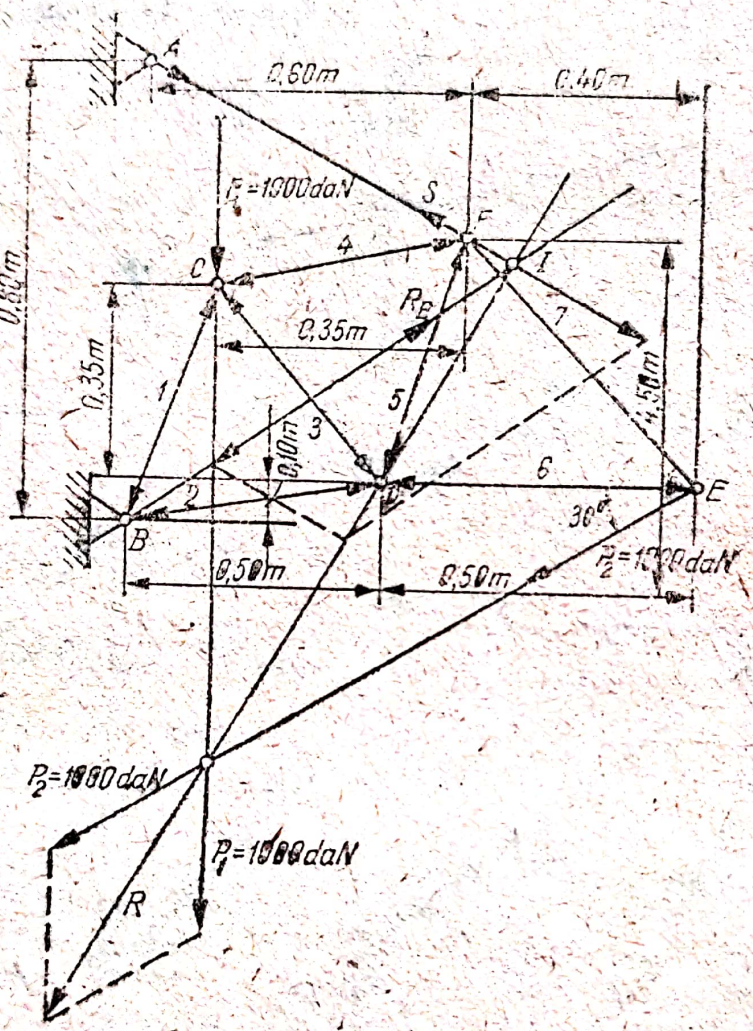


Fig. 5.21

Rezolvare. Efectuăm echilibrul grafic al fiecărui nod în parte, după ce în prealabil s-au determinat, tot prin procedee grafice, reacţiunile din legăturile exterioare ale grinzii cu zăbrele. Pe figură s-a notat prin litere mici originea forţei cu care se începe echilibrul fiecărui nod.

5.22. Să se traseze planul Cremona pentru grinda cu zăbrele din fig. 5.22.



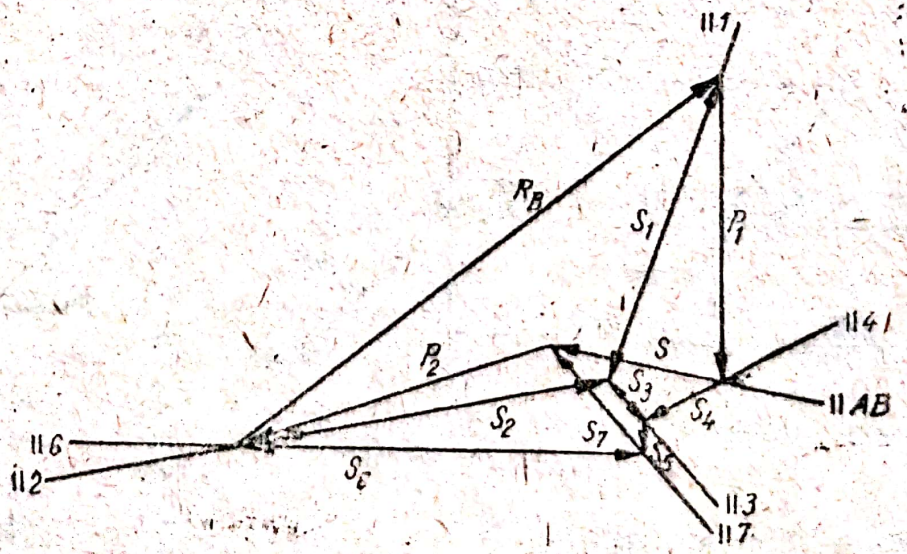


Fig. 5.22

Rezolvare. Se compun grafic cele două forţe **P** şi se determină rezultanta acestora **R**; se notează prin *I*, punctul de intersecţie al rezultantei **R** cu bara *AF*. Se unesc punctele *B* şi *I* şi se descompune forţa **R** după direcţiile *AI* şi *BI*, determinîndu-se astfel reacţiunea $\mathbf{R}_B$ din articulaţia *B* şi efortul **S** din bara *AF*. Se alege scara forţelor şi se trasează planul Cremona, care se poate vedea în fig. 5.22.

5.23. Să se traseze planul Cremona pentru grinda cu zăbrele din fig. 5.23.

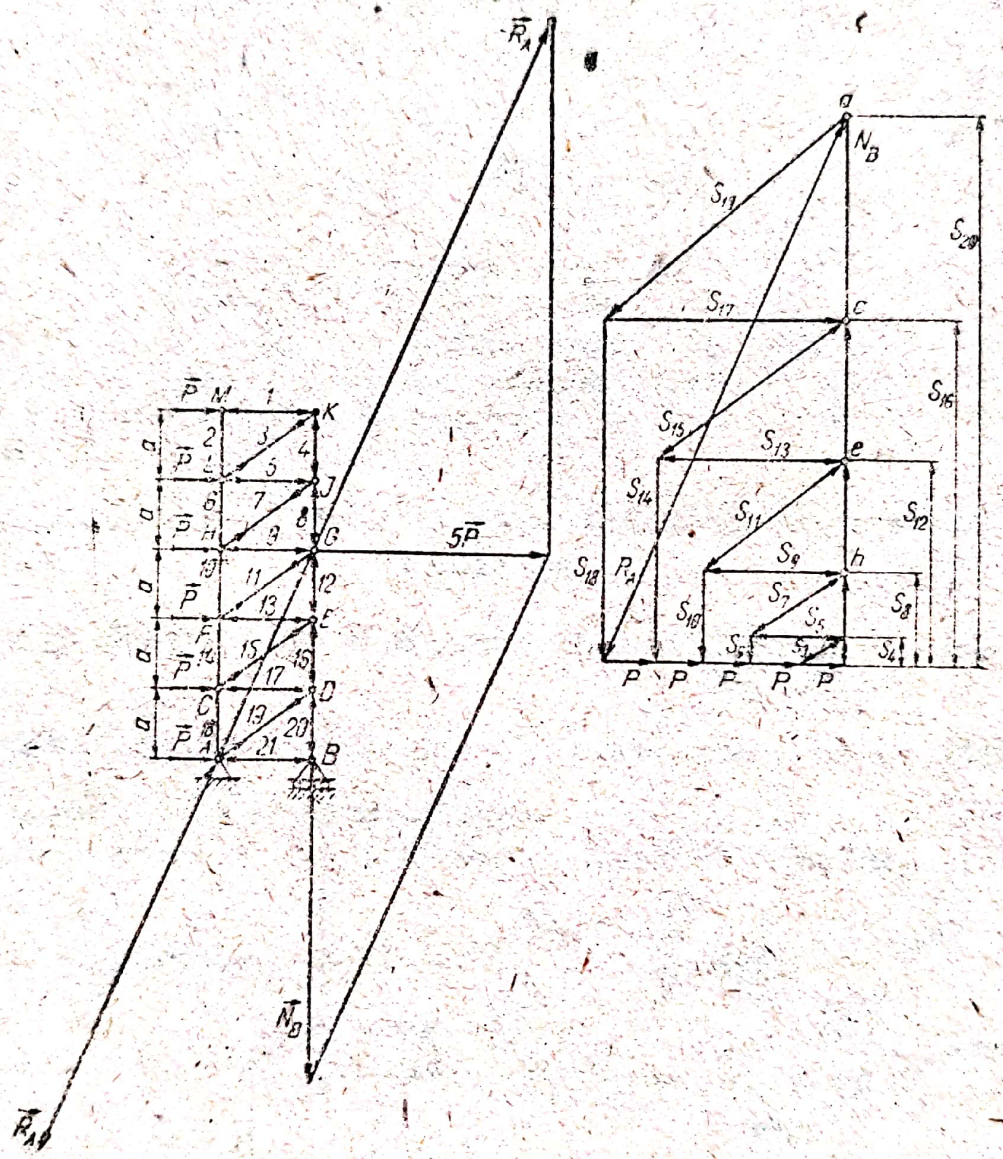
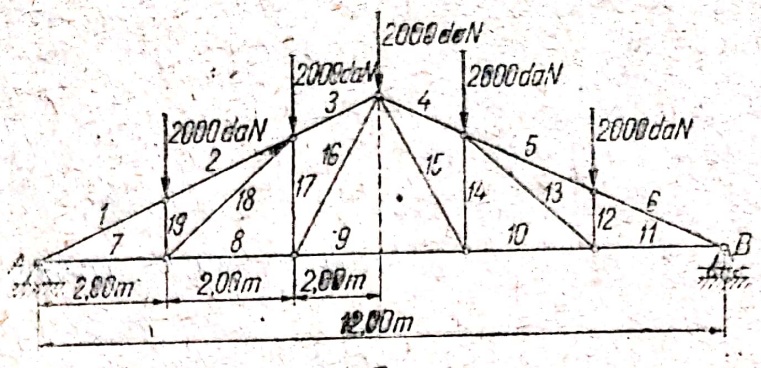


Fig. 5.23

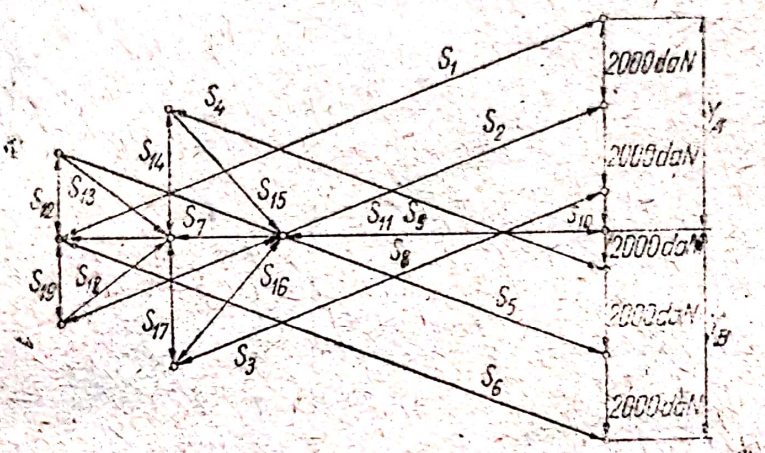
Rezolvare. Se determină reacţiunile grafic şi se trasează planul Cremona după metoda descrisă mai sus. Se observă că cea mai încărcată bară este bara 20.

5.24. Să se traseze planul Cremona pentru grinda cu zăbrele din fig. 5.24, a.

Rezolvare. Se aleg scări corespunzătoare pentru lungimi şi forţe şi se trasează, apoi, planul Cremona (fig. 5.24, b). Se observă că barele



a



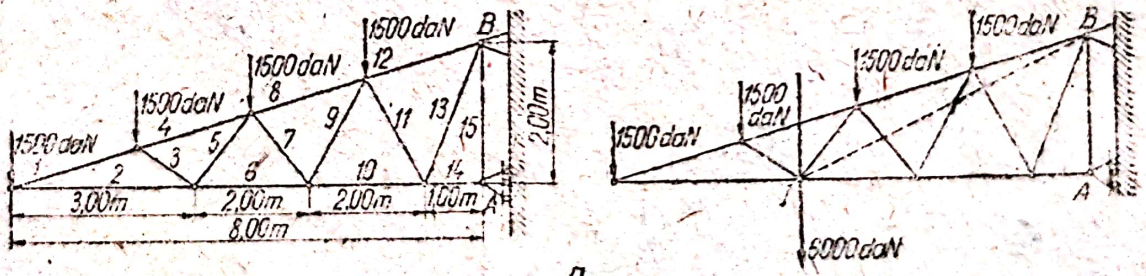
b

Fig. 5.24 a, b

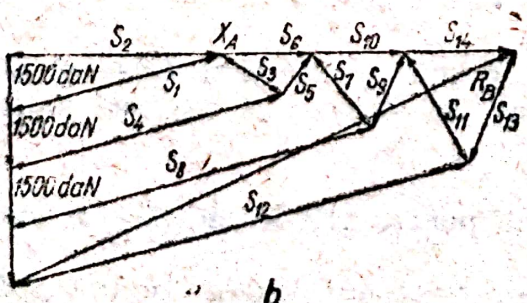
cele mai solicitate sînt bara 1 și bara 6. în care eforturile au valorile: $S_1 = S_6 = 13.700$ daN.

5.25. Să se traseze planul Cremona pentru grinda cu zăbrele din fig. 5.25.

R e z o l v a r e. Intersecția rezultantei **R** a celor patru forțe exterioare cu direcția reacțiunii din punctul *A*, se notează cu *I*. Descompunînd forța



a



b

Fig. 5.25

R după direcţiile IA şi — respectiv — IB, determinăm reacţiunile din articulaţia B şi reazemul A. Construim apoi, fără dificultăţi planul Cremona. Se observă că efortul în bara 15 este nul.

5.26. Să se traseze planul Cremona pentru grinda cu zăbrele din fig. 5.26, a.

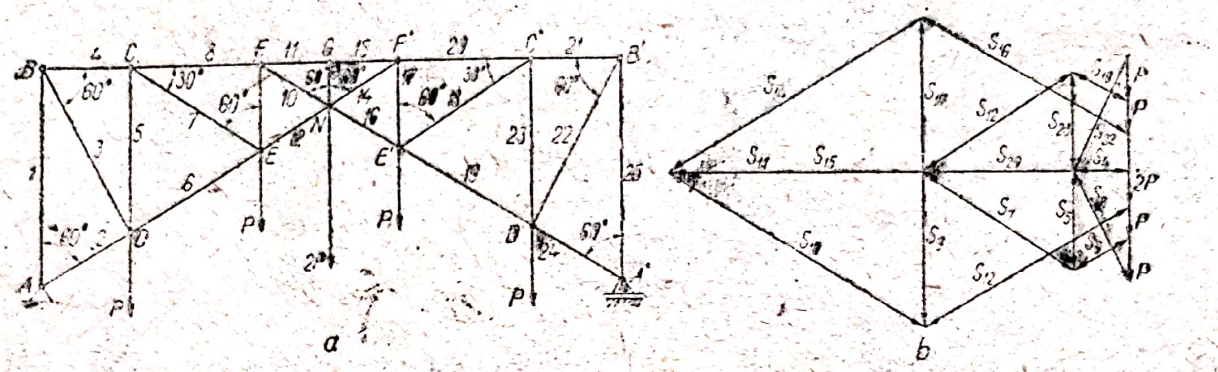


Fig. 5.26 a, b

R e z o l v a r e. Planul Cremona s-a trasat în fig. 5.26, b. Se observă că eforturile în barele 2 şi 24 sînt nule; de asemenea, planul Cremona este simetric datorită încărcării simetrice şi simetriei geometrice a grinzii cu zăbrele.

5.27. Să se traseze planul Cremona pentru grinda cu zăbrele din fig. 5.27, a.

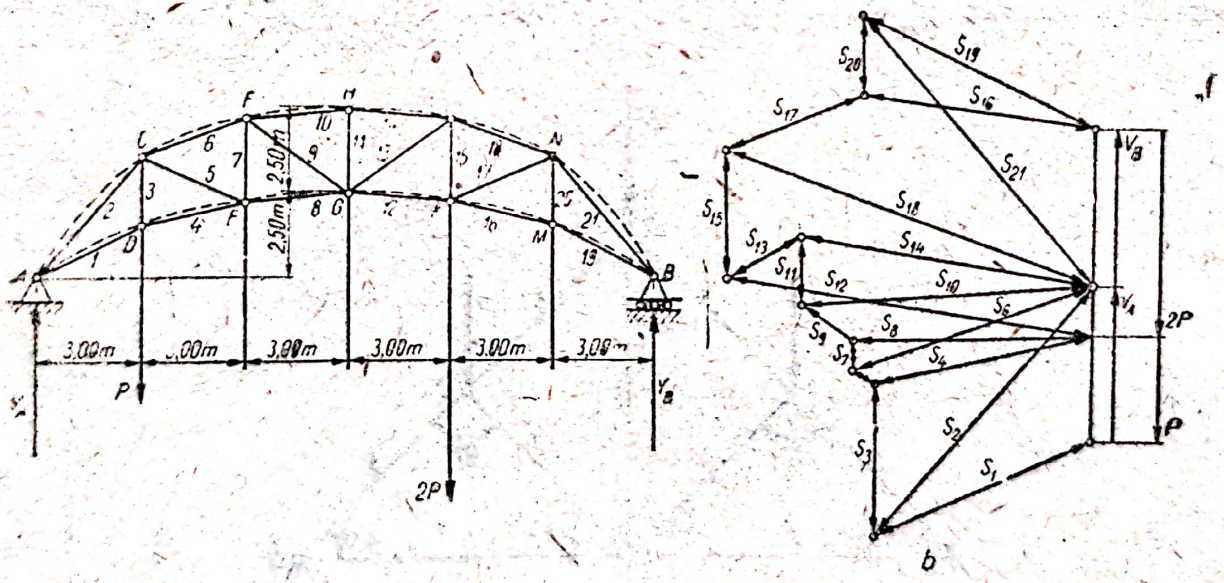


Fig. 5.27 a, b

R e z o l v a r e. Alegînd scări convenabile pentru forţe şi lungimi, rezultă planul Cremona prezentat în fig. 5.27, b.

5.28. Să se determine prin metoda Culmann eforturile din barele 1, 3 şi 4 pentru grinda cu zăbrele din fig. 5.28.

R e z o l v a r e. Se determină grafic componentele forţei **P** pe direcţiile IA şi IC, unde I este punctul de intersecţie al suportului forţei **P**

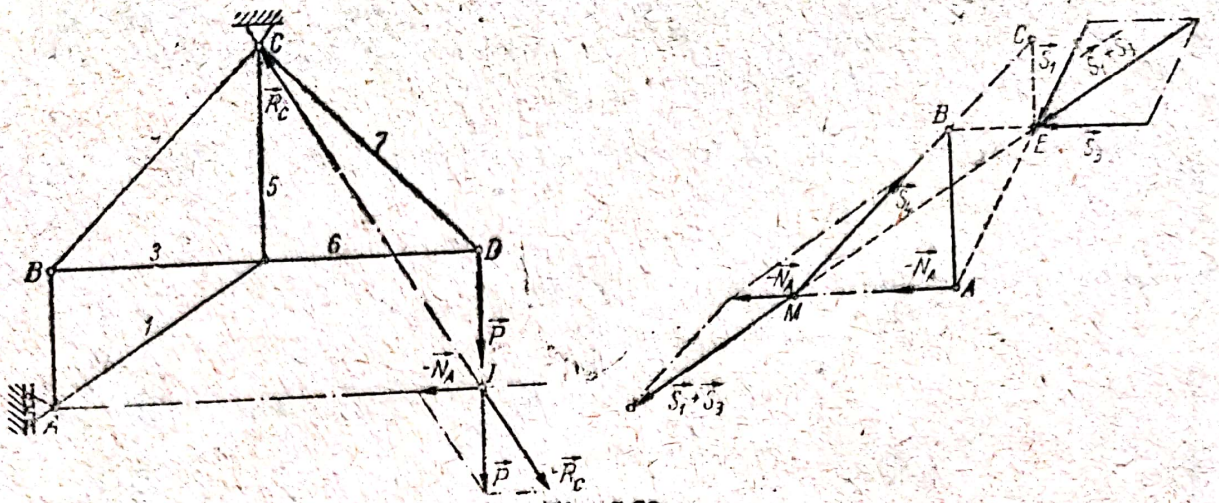


Fig. 5.28

cu direcţia reacţiunii din A, rezultînd componentele $-\mathbf{R}_C$ şi $-\mathbf{N}_A$. Se descompune apoi componenta $-\mathbf{N}_A$ după direcţiile barelor 1 şi 4, rezultînd forţa $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_3$ şi efortul $\mathbf{S}_4$ din bara 4. În urma descompunerii forţei $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_3$ după direcţiile barelor 1 şi 3 se obţin şi celelalte două eforturi căutate, $\mathbf{S}_1$ şi $\mathbf{S}_3$.

C. PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

5.29. Ferma unui acoperiş are forma şi dimensiunile din fig. 5.29. Să se determine eforturile din bare, considerînd: $a = 5$ m, $P = 4600$ N.

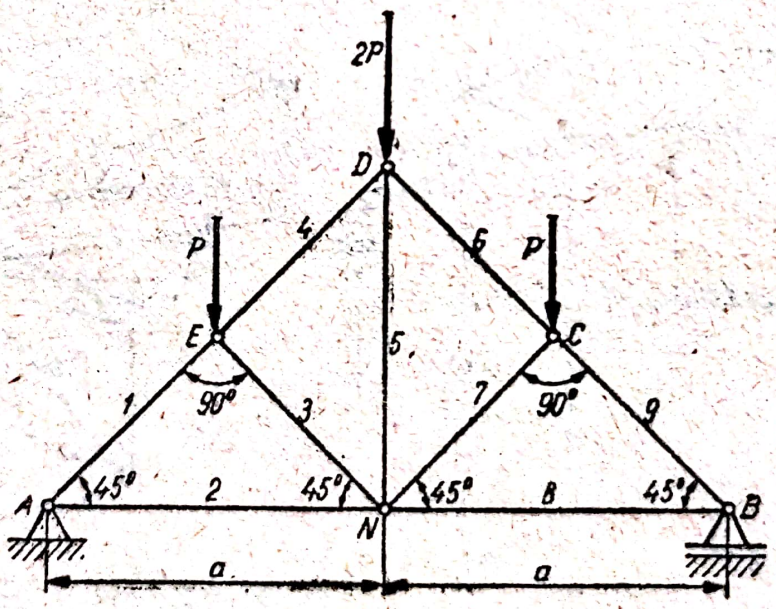


Fig. 5.29

5.30. Utilizînd metoda analitică a separării nodurilor, să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.30.

5.31. Să se determine, prin metode analitice, eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.31.

Scanned with OKEN Scanner

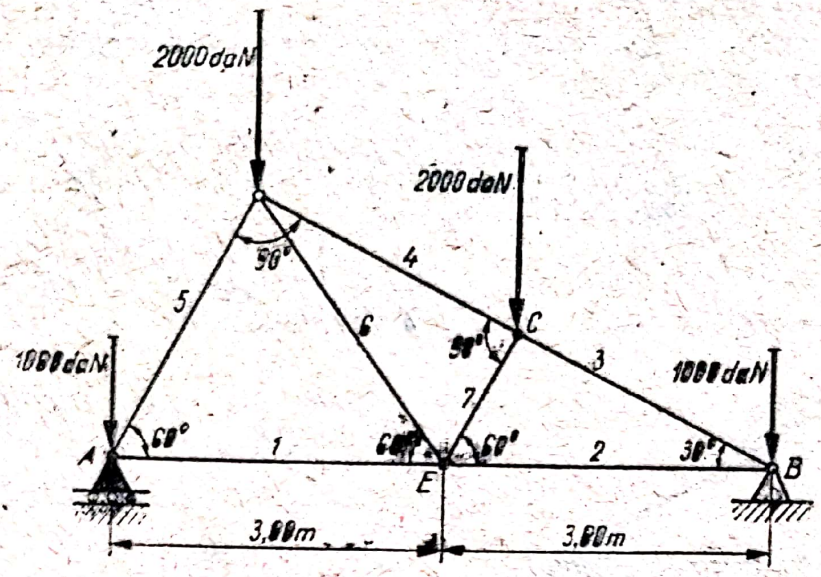


Fig. 5.30

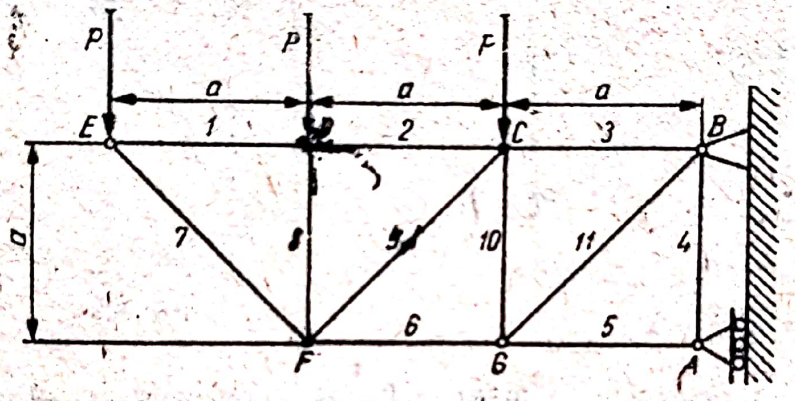


Fig. 5.31

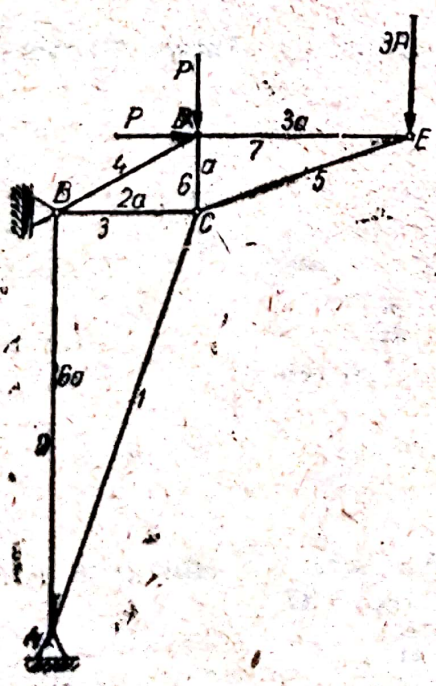


Fig. 5.32

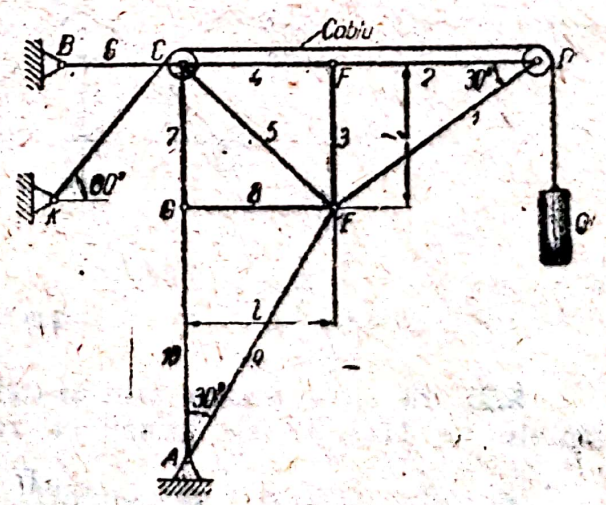


Fig. 5.33

5.32. Se consideră grinda plană $ABCDE$ articulată în A, simplu rezemată (bilateral) în B, cu forma, dimensiunile și solicitările arătate în fig. 5.32. Să se calculeze eforturile în bare.

5.33. Pentru ridicarea sarcinilor, se utilizează structura din fig. 5.33 Se cere să se determine eforturile în barele 1, ..., 10. În calcule se va neglija diametrul rolelor pentru cablu.

5.34. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.34, utilizînd metoda separării nodurilor, dacă forța $P = 11$ kN.

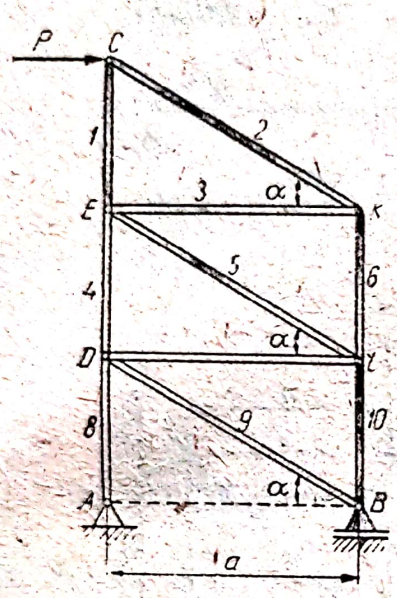


Fig. 5.34

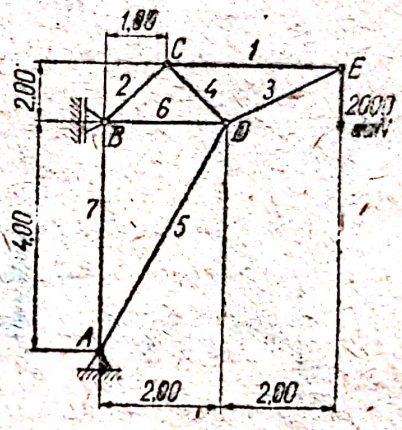


Fig. 5.35

5.35. Să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.35, cu ajutorul metodei separării nodurilor.

5.36. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 5.36.

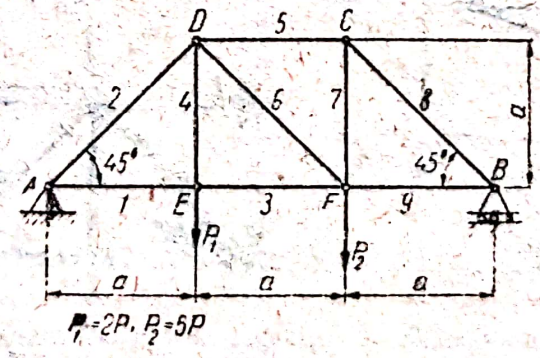


Fig. 5.36

5.37. Să se determine prin metoda secțiunilor oarecare, eforturile din barele 10, 11 și 12 ale grinzii cu zăbrele din fig. 5.37.

R. $S_{10} = -\frac{1}{5}P$; $S_{11} = -\frac{\sqrt{41}}{20}P$; $S_{12} = \frac{11}{40}P$.

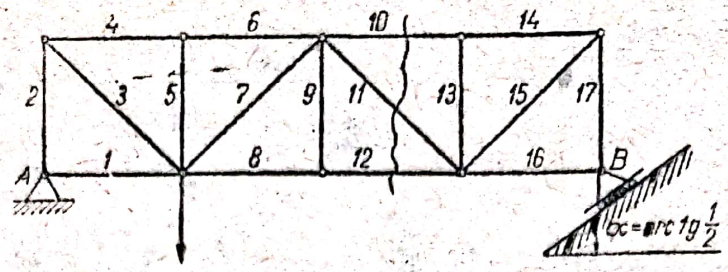


Fig. 5.37

5.38. Pentru grinda cu zăbrele din fig. 5.38, se cere să se determine eforturile din barele 3 și 6, prin metode analitice.

R. $S_3 = 850$ daN; $S_6 = 1200$ daN.

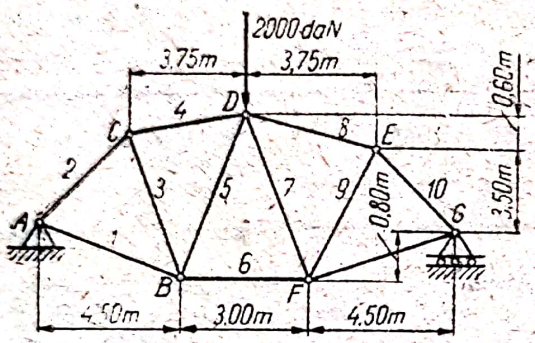


Fig. 5.38

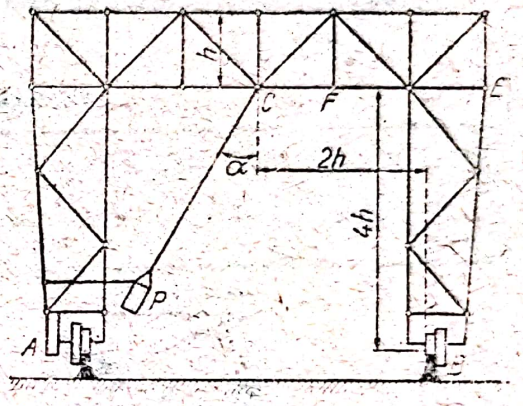


Fig. 5.39

5.39. Pentru montarea unui pod s-a construit o macara, care se deplasează cu roțile pe șinele A și B. De nodul central C este suspendat un scripete care servește la ridicarea greutăților cu ajutorul unui lanț. Greutatea sarcinii ce se ridică este $P = 5000$ daN. În momentul ridicării sale, direcția lanțului formează cu verticala unghiul $\alpha = 20°$ (fig. 5.39). Pentru înlăturarea oscilațiilor sarcinii, aceasta este trasă cu firul orizontal PH, al cărui capăt este legat în afara macaralei.

Presupunînd că componenta orizontală a tensiunii din lanț se preia numai de către șina dreaptă B, să se determine efortul S_1 în bara orizontală CF în momentul în care începe ridicarea sarcinii și să se compare cu efortul care s-ar obține cînd unghiul $\alpha = 0$. Dimensiunile sînt date în figură.

R. $S_1 = 10.460$ daN; $S_2 = 5.000$ daN.

5.40. Să se determine eforturile din barele 1, 3 și 4, ale sistemului de susținere a scripetelui din fig. 5.40, utilizînd metoda separării nodurilor.

R. $S_1 = 4P$; $S_3 = -P\sqrt{3}$; $S_4 = -3P$.

5.41. Să se determine efortul în bara 6 a grinzii cu zăbrele avînd forma și dimensiunile din fig. 5.41 cunoscînd că $P = 6000$ daN.

R. $S_6 = -2{,}4 \cdot 10^4$ N (compresiune).

Scanned with OKEN Scanner

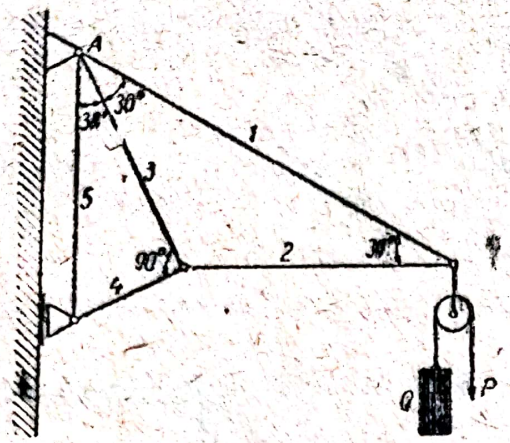


Fig. 5.40

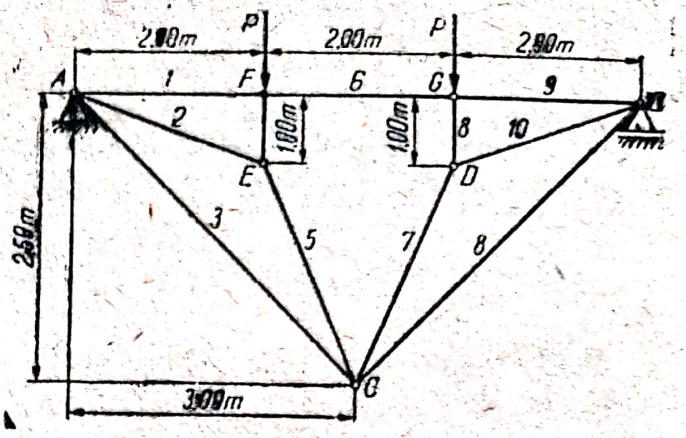
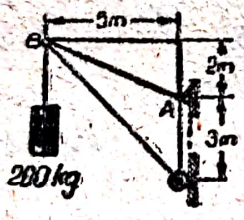
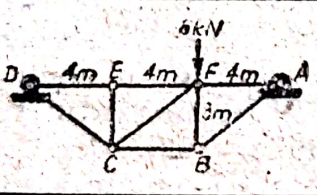
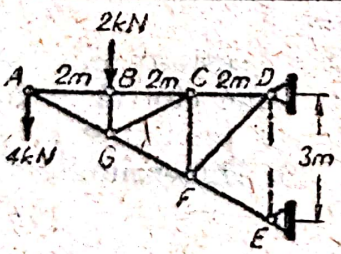


Fig. 5.41

5.42. Să se rezolve problemele recapitulative din tabelul 5.42.

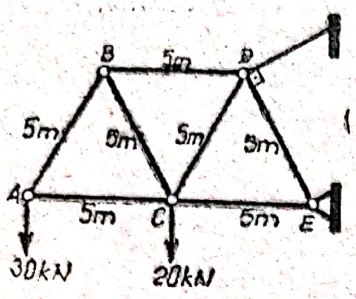
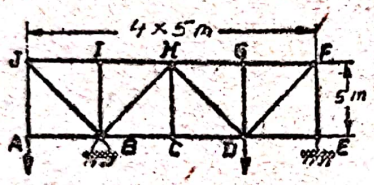
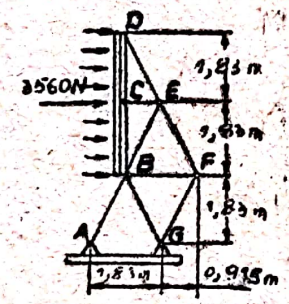
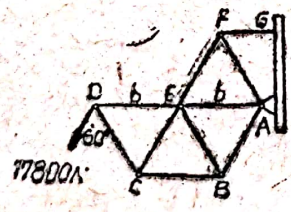
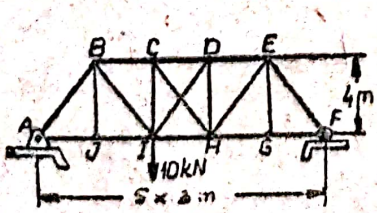
Tabelul 5.42

Probleme recapitulative [26]

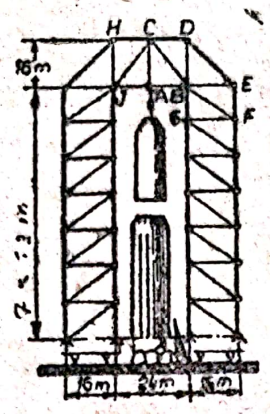
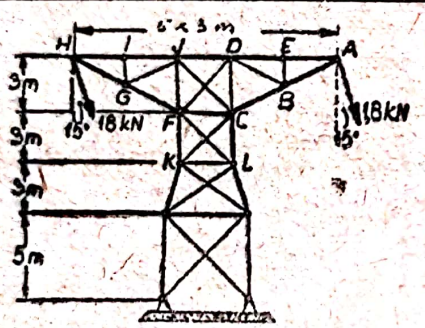
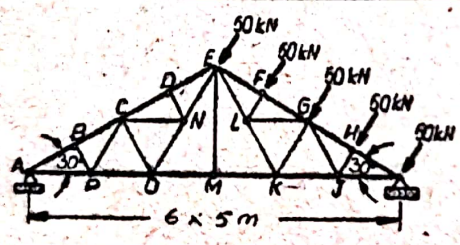
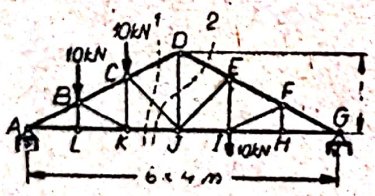
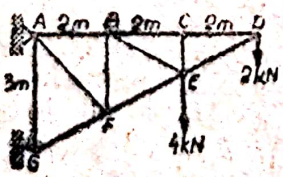
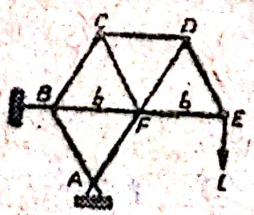
Nr. crt.	Fig.	Se cunoaşte	Să se determine
0	1	2	3
1		O sarcină cu masa 200 kg este suspendată în *B*.	Eforturile din bare. R. $S_{AB} = 3{,}52$ kN (T) $S_{BC} = 4{,}62$ kN (C) $S_{AC} = 3{,}27$ kN (T).
2		Forţa verticală de 6 kN este aplicată în *F*.	Efortul din bara *CF*. R. $S_{CF} = 3{,}33$ kN (C)
3		O forţă verticală de 2 kN acţionează în *B*.	Eforturile în barele *CG* şi *CF*. R. $S_{CG} = 2{,}24$ kN (T) $S_{CF} = 1$ kN (C).
4		Fiecare bară este uniformă (omogenă şi de secţiune constantă) având lungimea 6,1 m şi greutatea 1779 N.	Eforturile în bare datorită greutăţii proprii. R. $S_{AE} = S_{CD} = 8964\sqrt{3}$ N (C) $S_{AB} = S_{BC} = 4450\sqrt{3}$ N (T) $S_{BE} = S_{BD} = 3560\sqrt{3}$ N (T) $S_{DE} = 6230$ N (C).

Scanned with OKEN Scanner

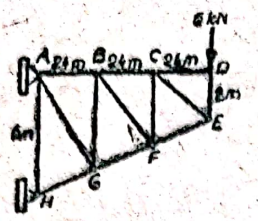
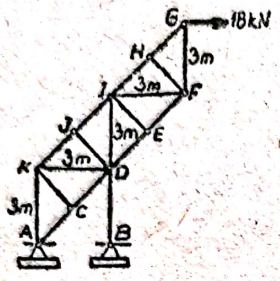
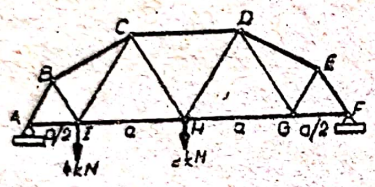
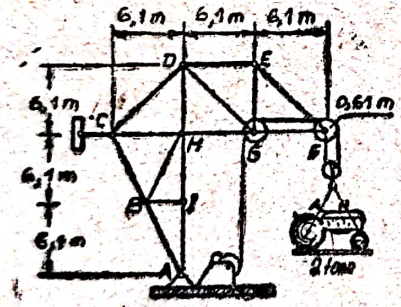
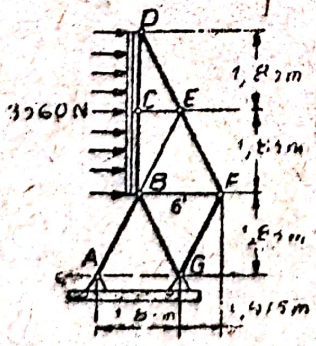
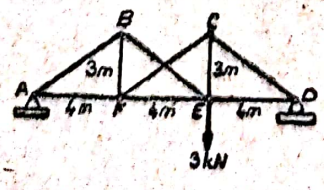
Tabelul 5.42 (continuare)

0	1	2	3
5		Forţele verticale de 30 kN şi 20 kN sînt aplicate în A, respectiv C.	Reacţiunile din legăturile exterioare şi eforturile din bare. R. $S_{DF} = 80$ kN; $X_E = 69{,}3$ kN; $Y_E = 10$ kN. Bara Efort Natura AB 34,64 T AC 17,32 C BC 34,64 C BD 34,64 T CD 57,74 T CE 63,51 C DE 11,55 C
6		Grinda cu zăbrele este solicitată de forţele verticale 40 kN şi 60 kN, aplicate respectiv în A şi D.	Eforturile în barele JB şi BH. R. $S_{JB} = 56{,}6$ kN (C) $S_{BH} = 47{,}1$ kN (C).
7.		Suportul metalic al unei firme este supus unei sarcini orizontale, datorită vîntului de 3560 N, din care 5/8 se repartizează în C iar restul se împarte egal în D şi B.	Eforturile în barele BE şi BC. R. $S_{BE} = 2487$ N (T) $S_{BC} = 1334$ N (T).
8		Grinda cu zăbrele, articulată în A şi legată în F cu lanţul orizontal FG, este încărcată cu sarcina de 17800 N ca în figură. Toate unghiurile interioare sînt de 60°.	Eforturile în toate barele grinzii. R. $S_{AB} = S_{CB} = S_{DC} =$ $= 17800$ N (C) $S_{BE} = S_{CE} = S_{DE} =$ $= 17800$ N (T) $S_{AE} = 0$; $S_{EF} = 35600$ N (T) $S_{AF} = 35600$ N (C).
9		Grinda din figură este solicitată de 10 kN în I. Elementele CH şi DI sînt cabluri care preiau numai eforturi de tracţiune.	Eforturile în barele AB, BJ, şi BI R. $S_{AB} = 7{,}5$ kN (C) $S_{BJ} = S_{CI} = 0$ $S_{BI} = 7{,}5$ kN (T).

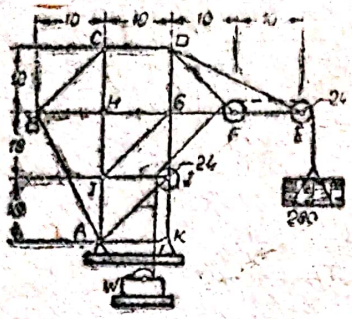
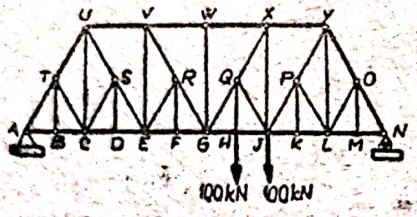
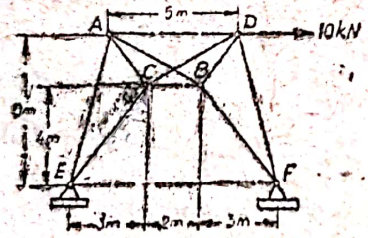
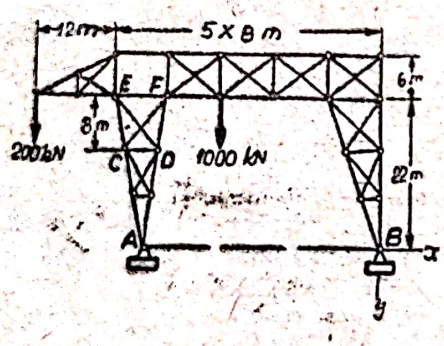
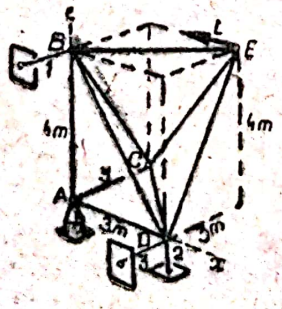
Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
10		Macaraua deplasabilă (portal) utilizată la ridicarea și montarea rachetelor, are structura metalică static nedeterminată, ca în figură. Dacă în A atîrnă o treaptă a rachetei avînd masa de 60 tone, un aparat de măsură (bazat pe tensometria electrică rezistivă) indică o forță de compresiune de 50 kN în bara AB și o forță de tracțiune de 120 kN în bara CD.	Eforturile corespunzătoare în barele BF și EF. R. $S_{BF} = 188{,}4$ kN (C) $S_{EF} = 120$ kN (T).
11		Stîlpul pentru liniile aeriene de transmisie (conductorii de înaltă tensiune) este modelat prin structura din figură. Elementele încrucișate ale structurii pot prelua numai eforturi de tracțiune.	Eforturile în barele AB, DB și CD, corespunzătoare sarcinilor de 1,8 kN aplicate în planul vertical. R. $S_{AB} = 3{,}89$ kN (C) $S_{DB} = 0$ $S_{CD} = 0{,}93$ kN (C).
12		Structura Fink este încărcată ca în figură. (Obs. Eforturile în BP, PC, DN etc, sînt nule).	Eforturile din barele EF, KL și GL. R. $S_{EF} = 202$ kN (C) $S_{KL} = 100$ kN (T) $S_{GL} = 50$ kN (T).
13		Grinda Bowe pentru acoperiș este solicitată cu în figură.	Eforturile în barele CJ, CD, DJ prin metoda secțiunilor. R. $S_{CJ} = 14{,}1$ kN (C) $S_{CD} = 18{,}6$ kN (C) $S_{DJ} = 16{,}6$ kN (T).
14		Grinda în consolă este articulată în A și legată prin bară rigidă în G.	Eforturile în barele AB, BF și EF. R. $S_{AB} = 8$ kN (T) $S_{BF} = 2$ kN (C) $S_{EF} = 4\sqrt{5}$ kN (C).
15		Grinda cu zăbrele din figură este articulată în A și legată printr-un lanț în B. Toate unghiurile interioare sînt de 60°.	Efortul în bara CF în funcție de sarcina L aplicată în E. R. $S_{CF} = 2L/\sqrt{3}$, (C)

Scanned with OKEN Scanner

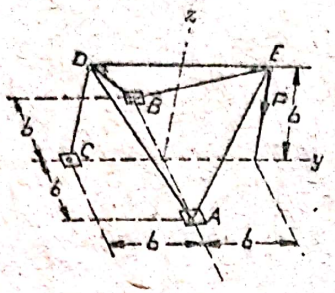
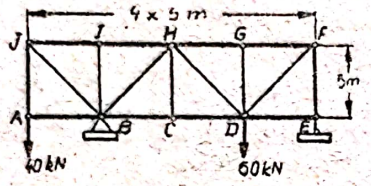
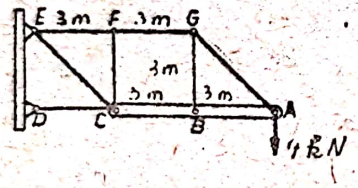
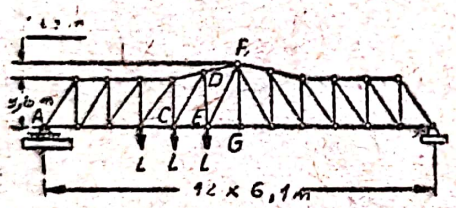
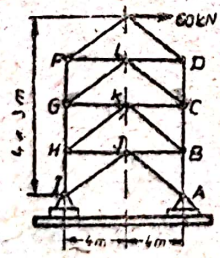
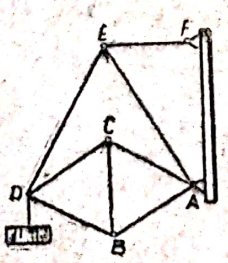
0	1	2	3
16		Structura metalică din figură este încărcată în D cu forța verticală de 6 kN.	Eforturile în barele AB, BG și GF, utilizînd pentru calculul fiecăruia numai o ecuație de echilibru. R. $S_{AB} = 7{,}2$ kN (T) $S_{BG} = 3$ kN (C) $S_{GF} = 7{,}8$ kN (C).
17		Structura metalică din figură este articulată în A și B și încărcată cu forța orizontală de 18 kN în G.	Eforturile în barele DI, DB și EI. R. $S_{DI} = 18$ kN (C) $S_{DE} = 25{,}5$ kN (C) $S_{EI} = 0$.
18		La grinda cu zăbrele din figură unghiurile sînt de 30°, 60° sau 90°.	Eforturile din barele BC, CI și HI, utilizînd pentru fiecare o singură ecuație de echilibru. R. $S_{BC} = 4{,}33$ kN (C) $S_{CI} = 2{,}12$ kN (T) $S_{HI} = 2{,}69$ kN (T).
19		De cîrligul unei macarale, modelată, prin structura din figură, atîrnă un tractor avînd greutatea de 17,8 kN.	Eforturile din barele DE, DG, și HG. R. $S_{DE} = 17{,}8$ kN (T) $S_{DG} = 37{,}8$ kN (T) $S_{HG} = 44{,}5$ kN (C).
20		Rezultanta sarcinii uniform distribuită datorită vîntului, de 3560 N, trece prin C.	Eforturile din barele BG și BF. R. $S_{BG} = 1780\sqrt{5}$ N (C) $S_{BF} = 3560$ N (T).
21		Fiecare din barele BE și FC este capabilă să preia eforturi de compresiune precum și de tracțiune.	Eforturile din barele CF, BE și EF. R. $S_{BE} = 1{,}667$ kN (C) $S_{FC} = 3{,}33$ kN (C) $S_{EF} = 4$ kN (T).

Scanned with OKEN Scanner

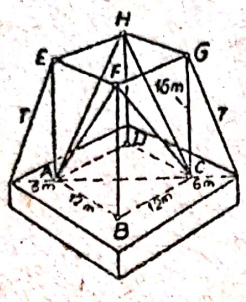
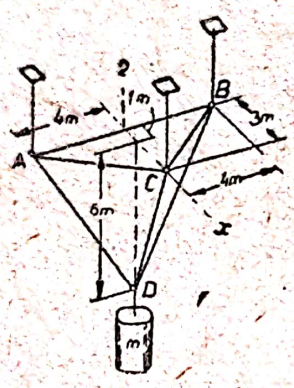
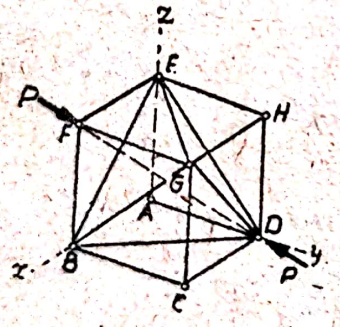
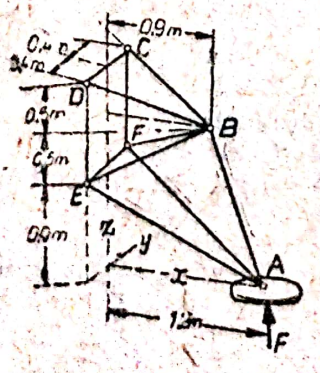
0	1	2	3
22		Structura static nedeterminată a macaralei este prevăzută cu două articulații fixe în A și K. Pe toba W, montată în afara structurii metalice, este înfășurat un cablu care susține un rezervor de 8,9 kN.	Efortul din bara HG. R. $S_{HG} = 36{,}14$ kN (C).
23		Structura Baltimore, din figură, are unghiurile de 30°, 60°, 90° sau 120°.	Efortul din bara JQ. R. $S_{JQ} = 57{,}5$ kN (C).
24		Cadrele metalice ACE și DFB sînt legate prin intermediul barelor AB și CD.	Efortul în bara AB. R. $S_{AB} = 3{,}78$ kN (C).
25		La macaraua portal din figură toate elementele încrucișate sînt bare svelte incapabile să preia eforturi de compresiune. Se admite că eforturile în barele CF și DE sînt nule.	Eforturile din barele DF și EF și reacțiunea orizontală din articulația A. R. $S_{DF} = 768$ kN C) $S_{EF} = 364$ kN (C) $X_A = 101$ kN.
26		Structura spațială constînd din tetraedrul rigid $ABCD$ și trei bare adiționale concurente în E, este ancorată prin articulația sferică A și barele rigide 1, 2, 3. În E acționează sarcina L.	Eforturile din barele EB, EC, ED, CD, CB, CA. R. $S_{EB} = -L\sqrt{2}$ $S_{ED} = 5L/6$ $S_{EC} = -5L/6$ $S_{CD} = L/\sqrt{2}$ $S_{CB} = 5L/6$ $S_{CA} = -L$ (Valorile negative indică eforturi de compresiune.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5.42 (continuare)

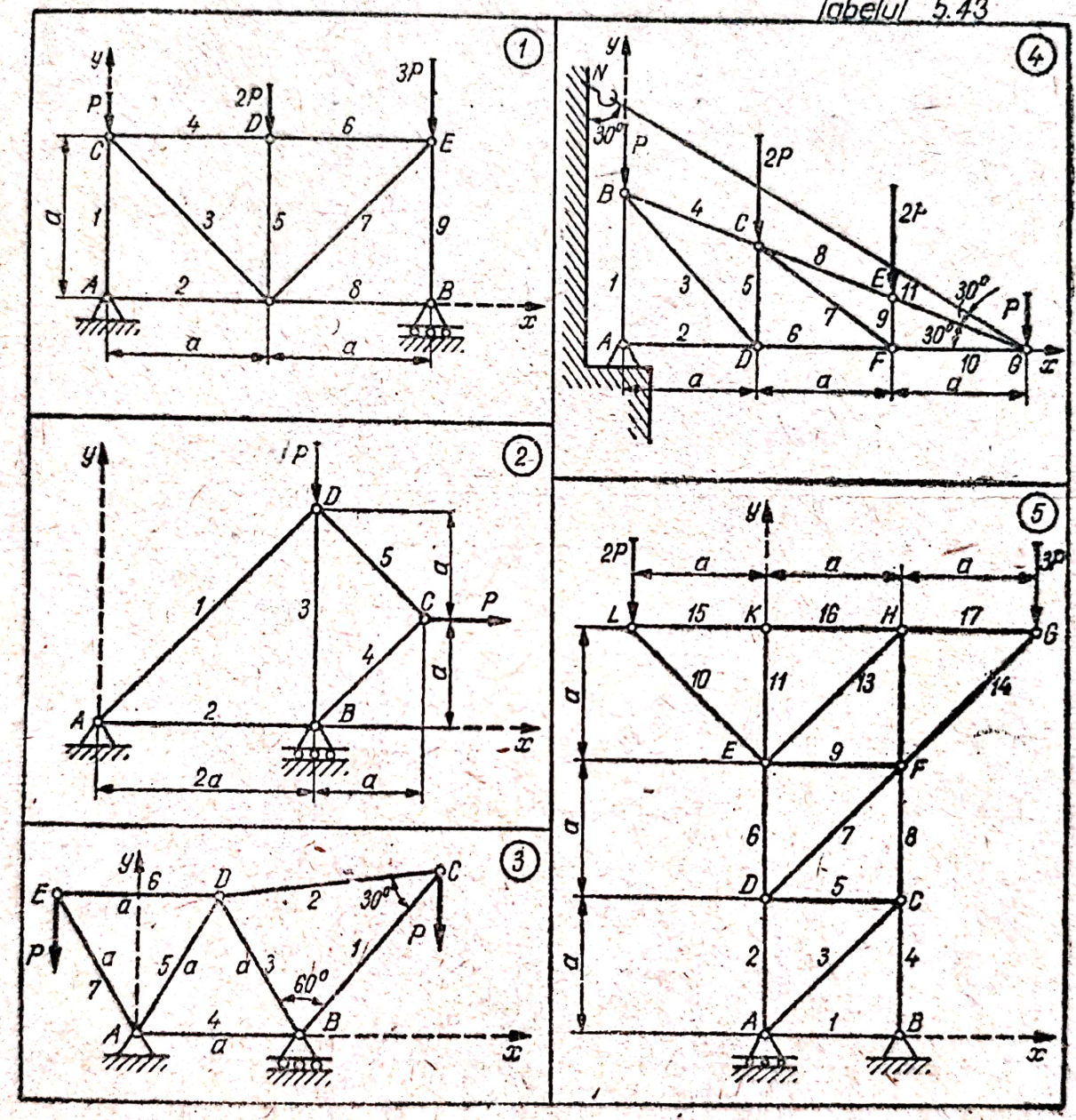
0	1	2	3
27		Structura spațială având forma unui tetraedru este prevăzută cu articulații sferice în A și B, iar pentru blocarea rotației în jurul axei AB este legată în D prin bara rigidă DC.	Componenta după axa x a reacțiunii din B. R. $X_B = P$.
28		Grinda cu zăbrele este încărcată prin forțele de 40 și 60 kN.	Eforturile din barele BH, CD și GD. R. $S_{BH} = 47{,}1$ kN (C) $S_{CD} = 6{,}7$ kN (C) $S_{GD} = 0$.
29		Legăturile exterioare ale structurii metalice sînt articulația E și bara rigidă DC.	Efortul din bara BG. R. $S_{BG} = 8$ kN (C).
30		Fiecare dintre cele trei sarcini L, care solicită structura unui pod metalic, este de 178 kN.	Eforturile din barele EG și DF prin cît mai puține calcule. R. $S_{EG} = 534$ kN (T) $S_{DF} = 734{,}25$ kN (C).
31		Stîlpul metalic este solicitat de 60 kN pe direcție orizontală.	Eforturile din bara GL. R. $S_{GL} = 37{,}5$ kN (T).
32		Legăturile exterioare ale structurii metalice sînt articulația A și bara rigidă EF.	Efortul din bara AC, dacă toate unghiurile interioare ascuțite sînt de 30° sau 60°. R. $S_{AC} = mg/3$ (C).

Scanned with OKEN Scanner

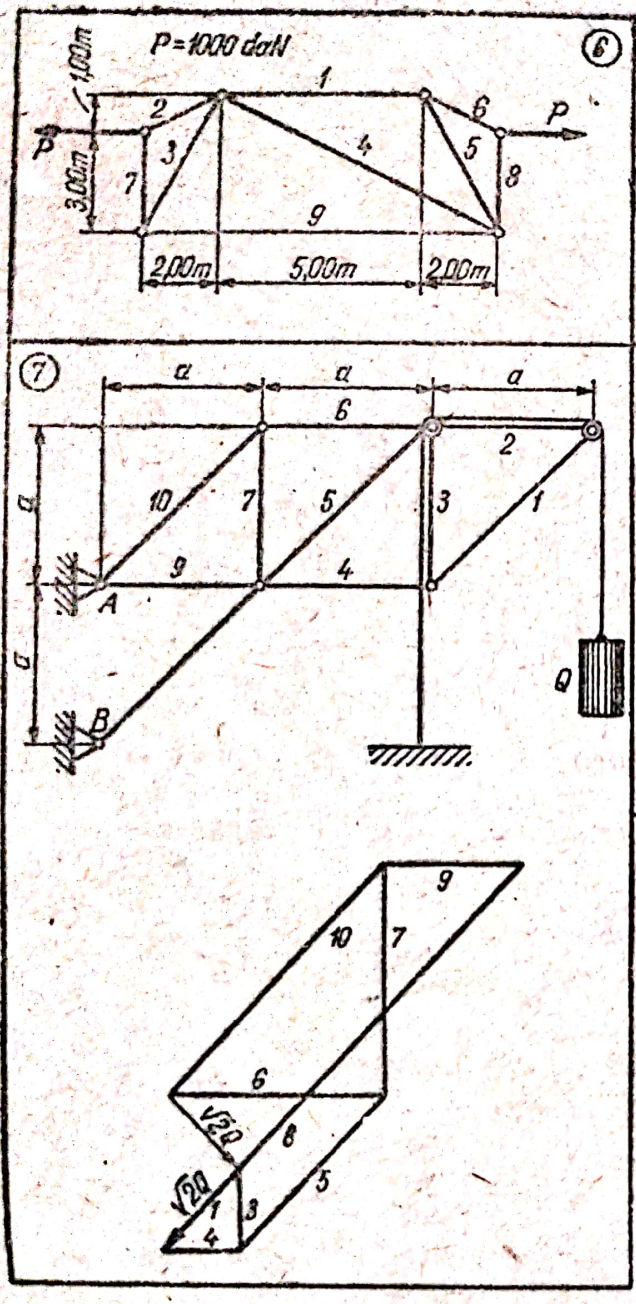
0	1	2	3
33		Structura spaţială în formă de paralelipiped cu înălţimea de 16 m şi pătratul de bază cu latura 12 m, este ancorată prin cabluri în E şi G. Efortul de montaj în fiecare cablu este $T = 9$ kN.	Eforturile din fiecare bară diagonală. R. $S = -3{,}72$ kN.
34		Structura spaţială în formă de tetraedru, este încărcată cu o sarcină de masă m şi suspendată prin trei fire verticale în punctele A, B şi C.	Eforturile care se dezvoltă în barele AC şi AB. R. $S_{AC} = -\frac{5mg}{54}$ $S_{AB} = -\frac{4mg}{27}$.
35		Structura spaţială având forma unui cub, cu şase bare în diagonală, este supusă la compresiune de forţele P aplicate în F şi D, de-a lungul diagonalei FD.	Eforturile în barele FE şi EG. R. $S_{FE} = -P/\sqrt{3}$ $S_{EG} = P/\sqrt{6}$.
36		Fiecare picior al modulului lunar reprezintă o structură spaţială simetrică faţă de planul vertical $x-z$, ca în figură. Pe talpa piciorului acţionează forţa $F = 2{,}2$ kN.	Efortul din bara BE. R. $S_{BE} = 1{,}620$ kN.

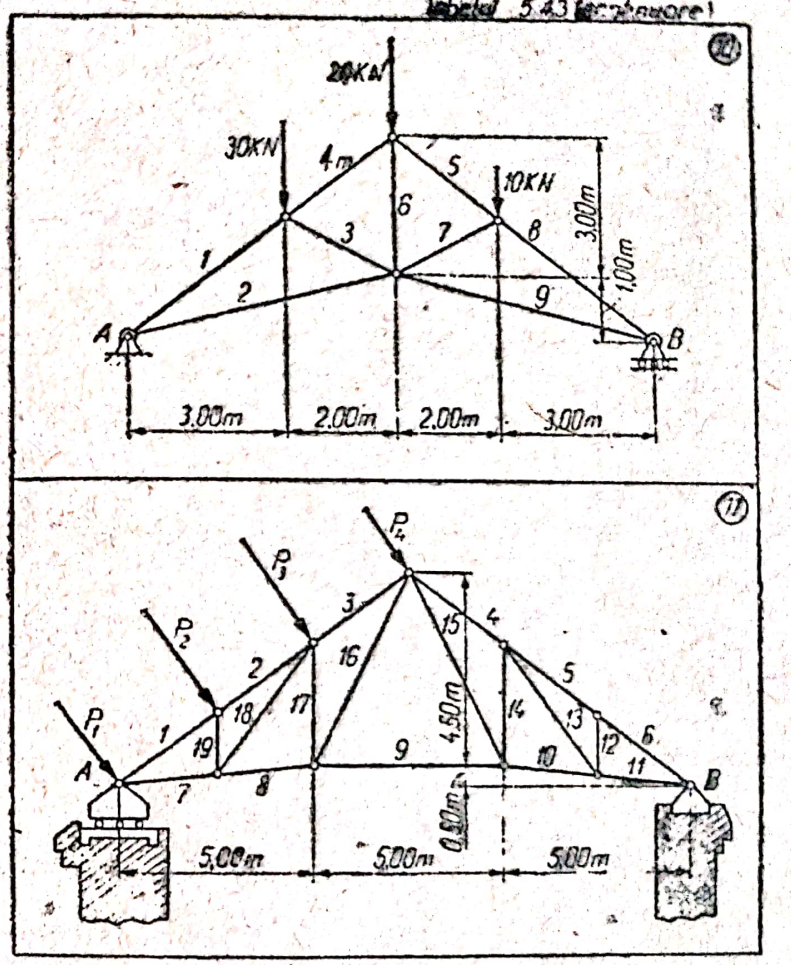
5.43. Să se rezolve problemele din tabelul 5.43. Enunțurile și răspunsurile sînt trecute în tabelul 5.43, a.

Tabelul 5.43



Tabelul 5.43 (continuare)





Tabelul 5.43 (continuare)

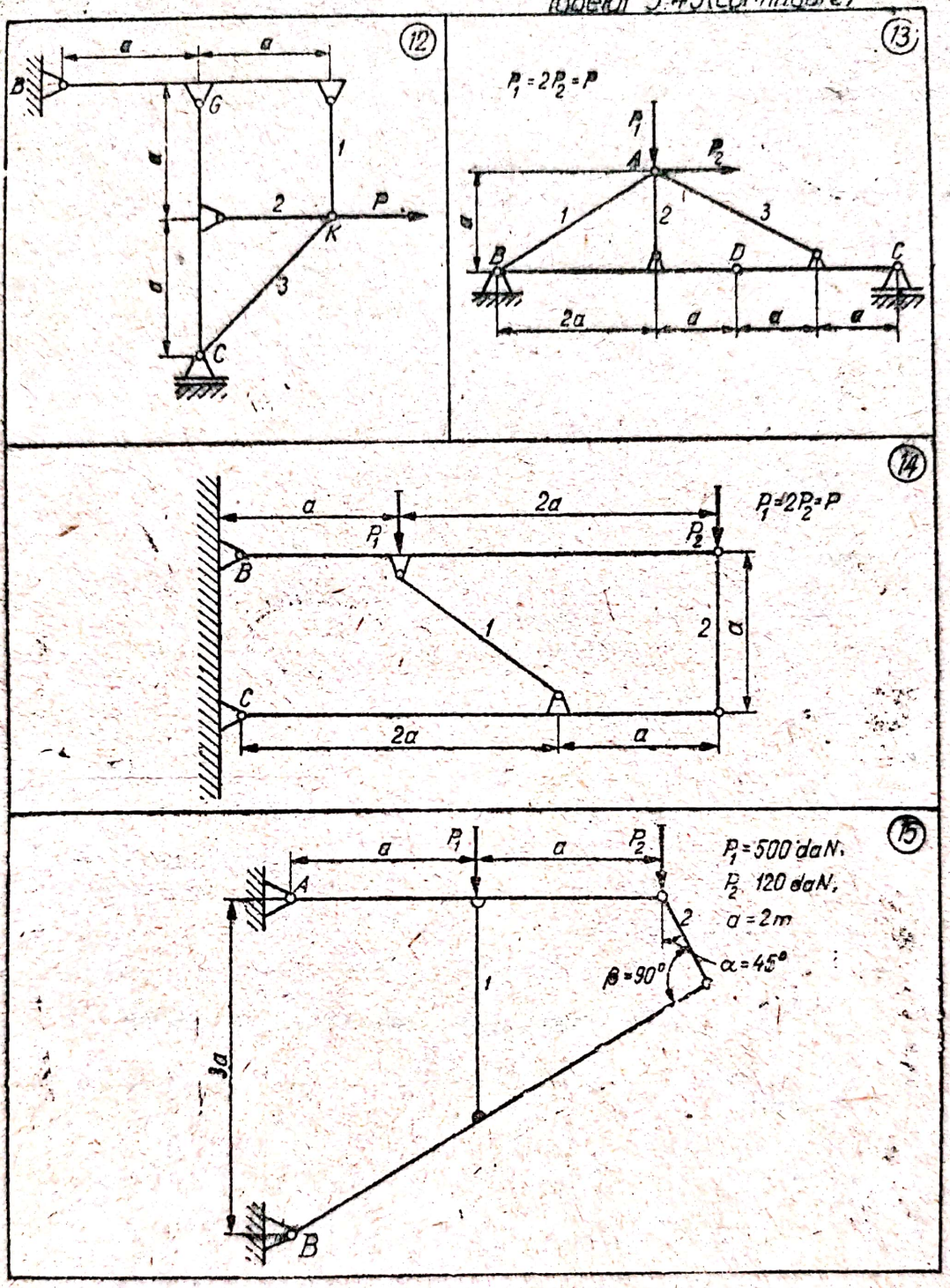


Fig. 1

$Y_A = 2P$; $Y_B = 4P$

Numărul barei	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Efortul din bară	$-2P$	0	$\sqrt{2}P$	$-P$	$-2P$	$-P$	$\sqrt{2}P$	0	$-4P$

Fig. 2

$X_A = -P$; $Y_A = -\frac{P}{2}$; $Y_B = \frac{3P}{2}$

Numărul barei	1	2	3	4	5
Efortul din bară	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$	$\frac{P}{2}$	$-2P$	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$

Fig. 3

$X_A = 0$; $Y_A = \frac{3}{2}Q - P$; $Y_B = \frac{3}{2}Q - P$

Numărul barei	1	2	3	4	5	6	7
Efortul din bară	$-\sqrt{3}P$	P	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}P$	$\frac{\sqrt{3}}{3}P$	$\frac{\sqrt{3}}{3}P$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}P$

Fig. 4

$X_A = \sqrt{3}P$; $Y_A = 3P$. Tensiunea din cablul GN este $T = 2\sqrt{3}P$.

Numărul barei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Efortul din bară	$-3P$	$-\sqrt{3}P$	$2\sqrt{3}P$	$-2P$	$-3P$	0	$\sqrt{7}P$	$-4P$	$-2P$	$\sqrt{3}P$	$-4P$

Fig. 5

$X_A = 0$; $Y_A = P$; $X_B = 0$; $Y_B = 4P$

Numărul barei	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Efortul din bară	0	$-P$	0	$-4P$	0	$-P$	0	$-4P$	$-3P$

Numărul barei	10	11	12	13	14	15	16	17
Efortul din bară	$-2\sqrt{2}P$	0	$\sqrt{2}P$	$-P$	$-3\sqrt{2}P$	$2P$	$2P$	$3P$

Scanned with OKEN Scanner

Fig. **Răspuns**

6 Eforturile, în daN

Numărul barei	1	2	3	4	5	6	7
Efortul în bară	750	250	−560	0	−560	250	500

7 Datorită simetriei $S_8 = S_7 = 500$ daN; $S_9 = 250$ daN

Numărul barei	1	2	3	4	5	6	7	8
Efortul din bară	$-2Q$	0	Q	$-Q$	$-2 \cdot 2Q$	$3Q$	$-3Q$	$-5 \cdot 2Q$

8 $X_A = P$; $Y_A = \frac{3}{2}P$; $Y_B = \frac{3}{2}P$; $S_6 = -1{,}12P$; $S_9 = \frac{3}{2}P$

Numărul barei	1	2	3	4	5	6	7
Efortul din bară	$4P$	$4P$	$3P$	$-3{,}36P$	$-3P$	$-3{,}36P$	$2P$

9 $X_A = 550$ daN; $Y_A = 2000$ daN; $X_B = 1550$ daN.
Eforturile, în daN

Numărul barei	1	2	3	4	5	6	7	8
Efortul în bară	−2000	−550	1900	−1500	−1350	800	300	−1750

Numărul barei	9	10	11	12	13
Efortul din bară	800	1000	0	−1550	0

10 $Y_A = 24$ kN; $Y_B = 26$ kN

Numărul barei	1	2	3	4	5
Efortul în kN	−73,00	58,00	−24,40	−47,00	−47,00

Numărul barei	6	7	8	9
Efortul în kN	+39,00	−8,10	−55,00	+44,00

Scanned with OKEN Scanner

Fig.	Enun	Raspuns
11	$P_1 = P_4 = 312{,}5$ daN $P_2 = P_3 = 625$ daN.	$Y_A = 997$ daN; $X_B = 1040$ daN; $Y_B = 563$ daN.

Numărul barei	1	2	3	4	5
Efortul în daN	−1525	−1940	−1560	−970	−970

Numărul barei	6	7	8	9	10	11
Efortul în daN	−970	−970	+1100	440	−215	−230

Numărul barei	11	12	13	14	15	16	17
Efortul în daN	−230	0	0	0	−26	1340	−1130

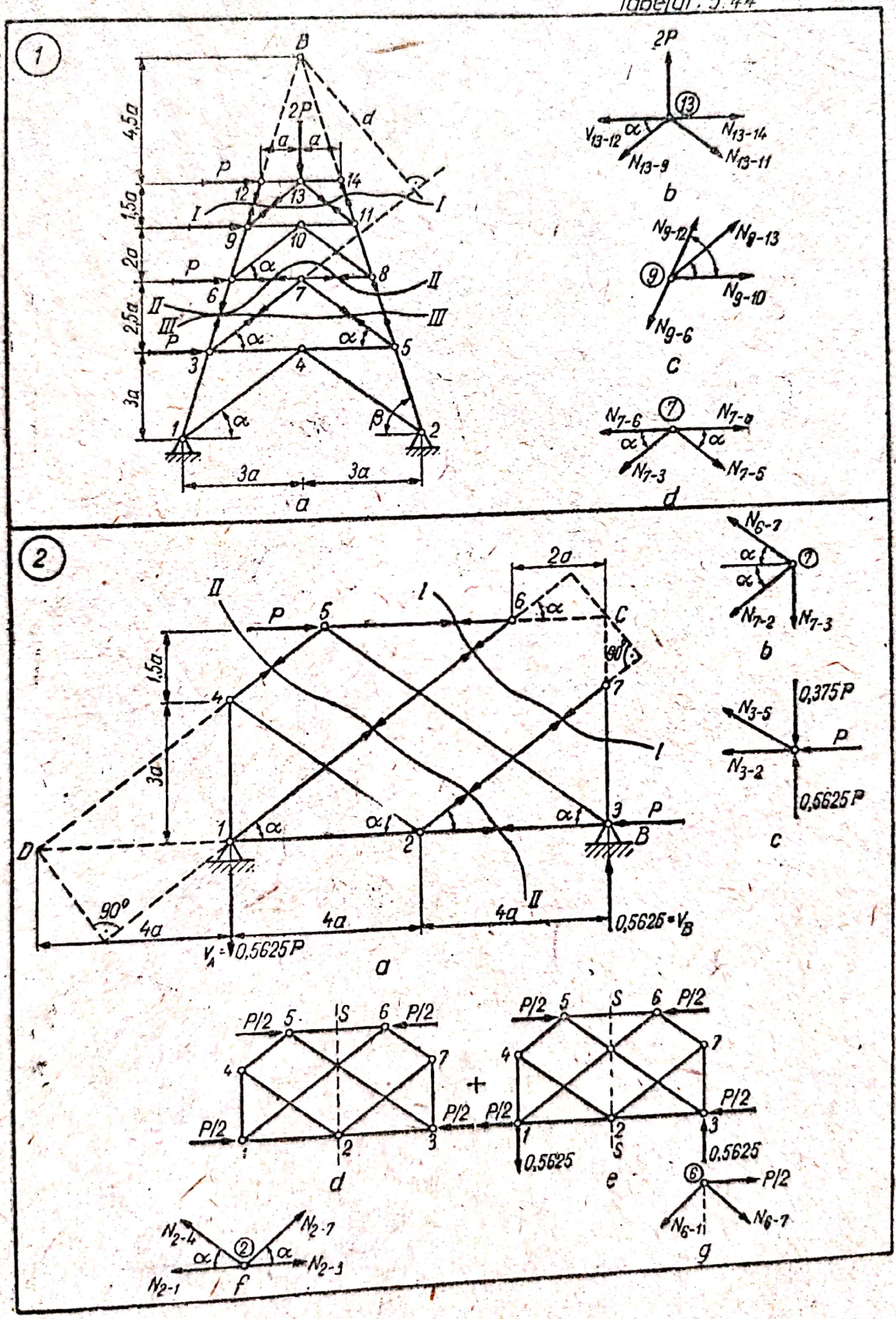
Numărul barei	18	19
Efortul în daN	+1050	−750

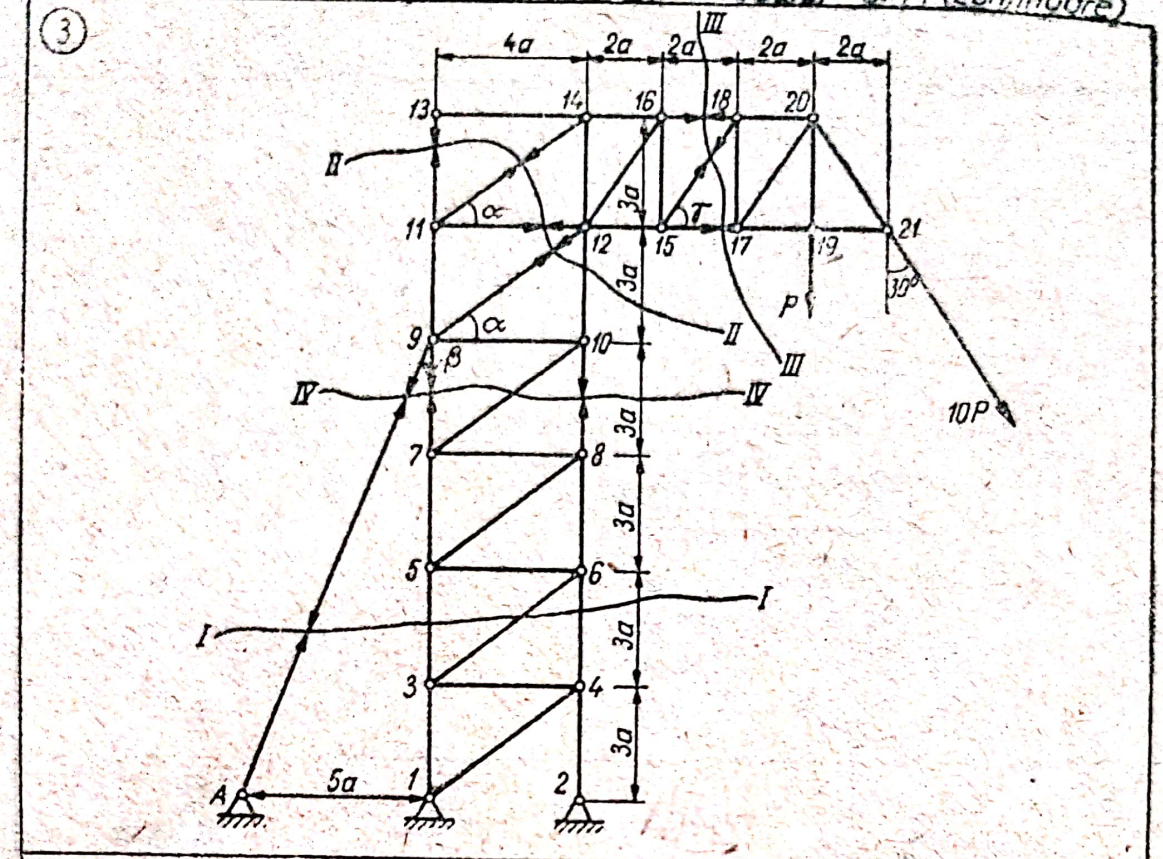
12		$X_B = -P$; $Y_B = P$; $Y_C = P$ $X_G = -P$; $Y_G = 2P$ $S_1 = -P$; $S_2 = 2P$; $S_3 = -\sqrt{2}P$
13	$P_1 = 2P_2 = P$	$X_B = -P$; $Y_B = P$; $Y_C = P$ $S_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{5}P$; $S_2 = \frac{3}{2}P$ $S_3 = -2\sqrt{5}P$.
14	$P_1 = 2P_2 = P$	$X_B = -5P$; $Y_B = \frac{14}{3}P$; $X_C = 5P$ $Y_C = -\frac{5}{3}P$; $S_1 = 5\sqrt{2}P$; $S_2 = -\frac{10}{3}P$
15	$P_1 = 500$ daN $P_2 = 120$ daN $a = 2$m	$X_A = -96{,}7$ daN; $Y_A = -217$ daN $X_B = 96{,}7$ daN; $Y_B = 387$ daN $S_1 = -483$ daN; $S_2 = 137$ daN

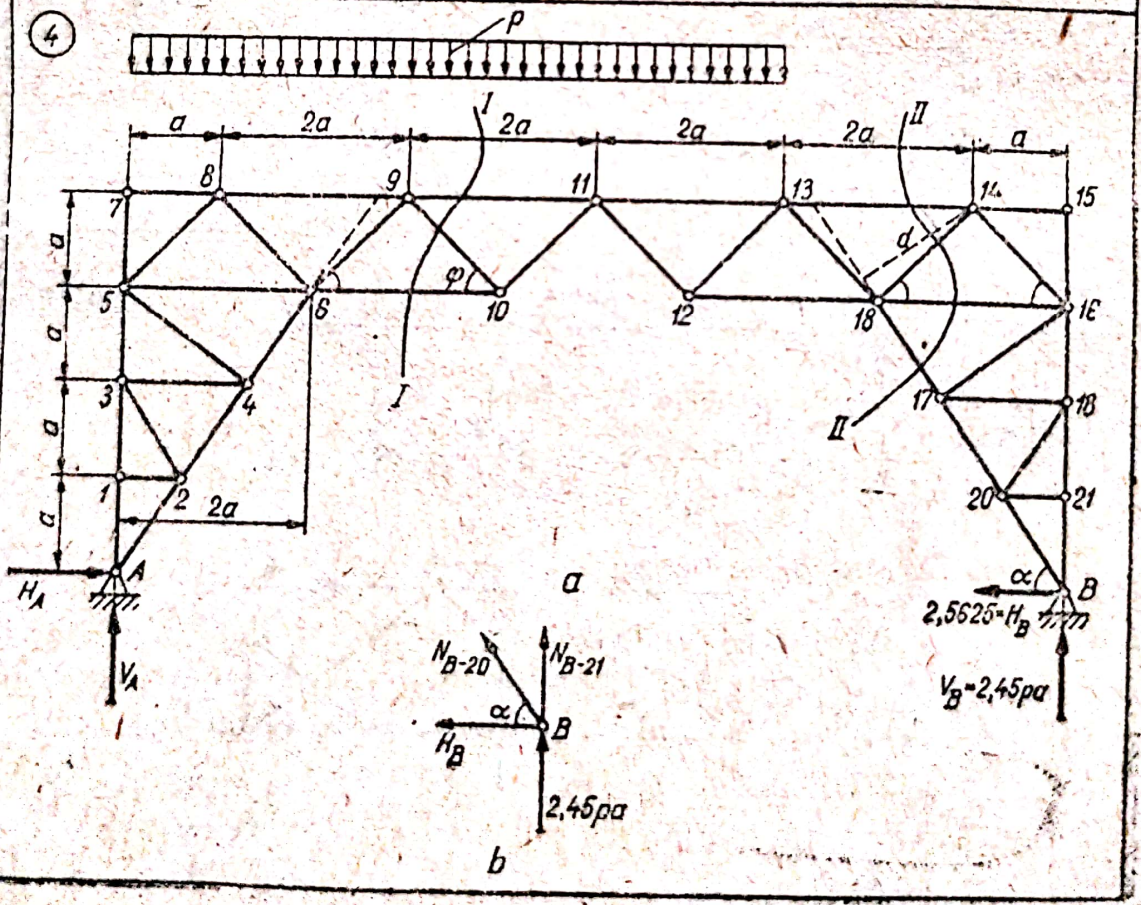
Scanned with OKEN Scanner

5.44. Să se rezolve problemele din tabelul 5.44.

Tabelul 5.44

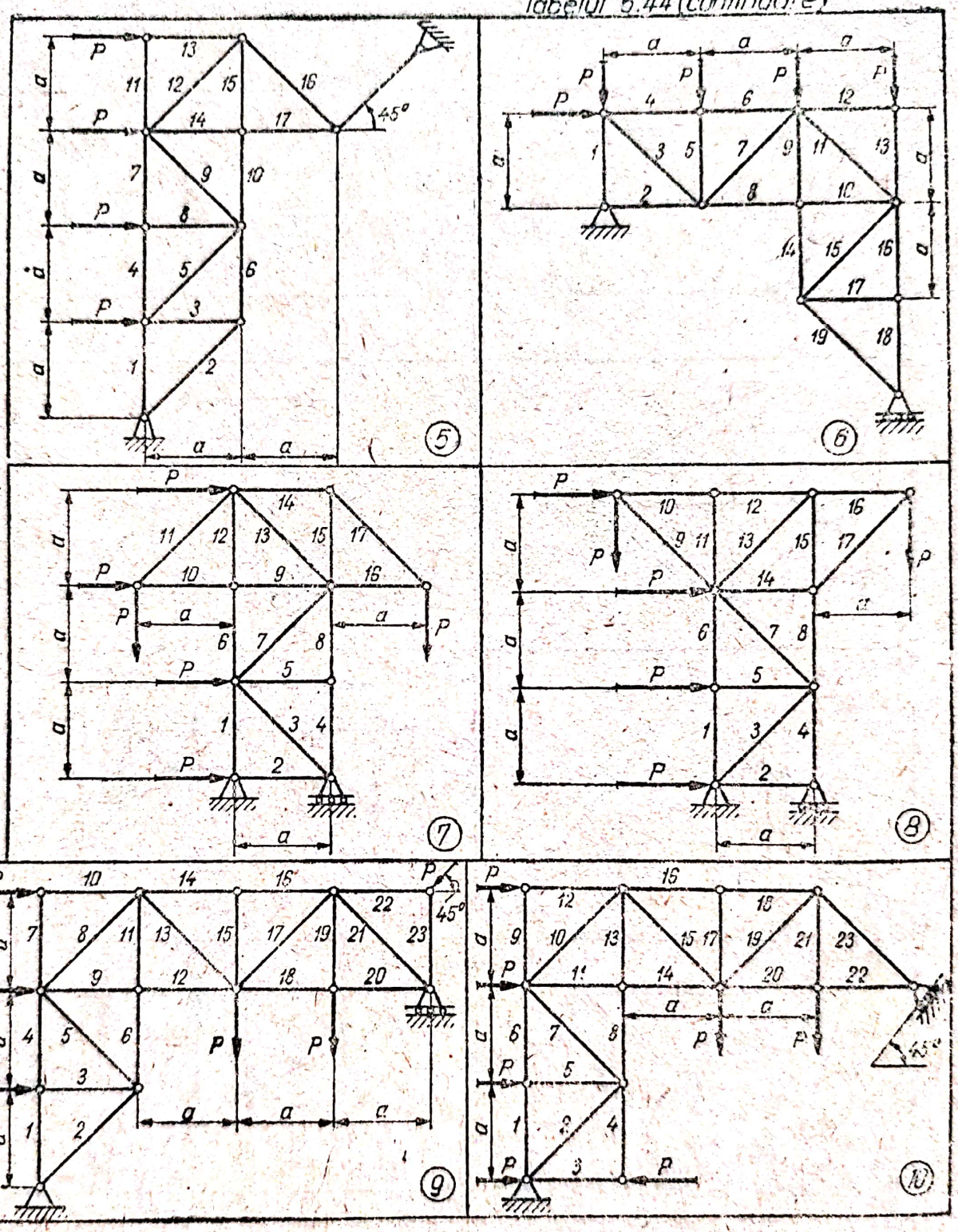






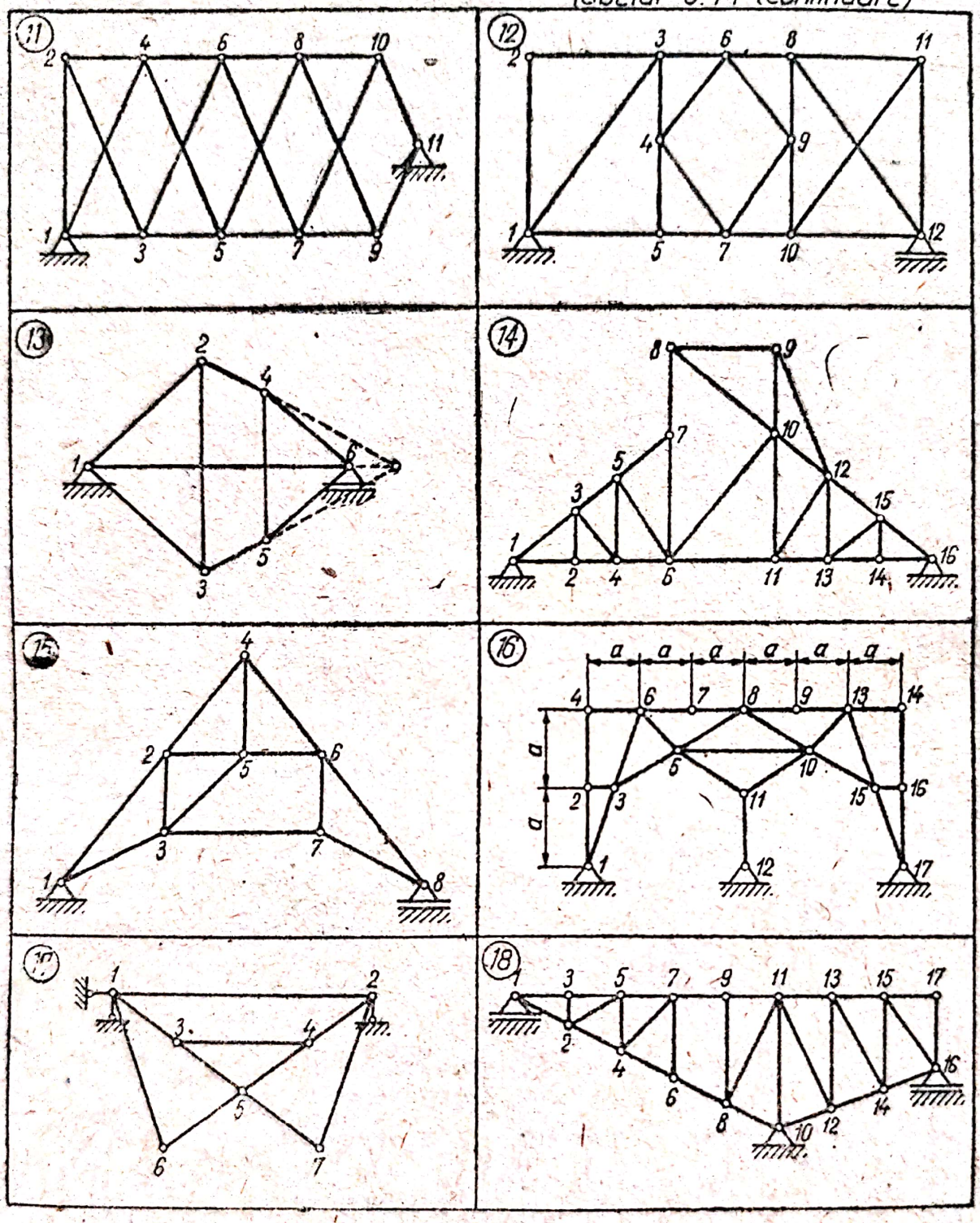
Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5.44 (continuare)

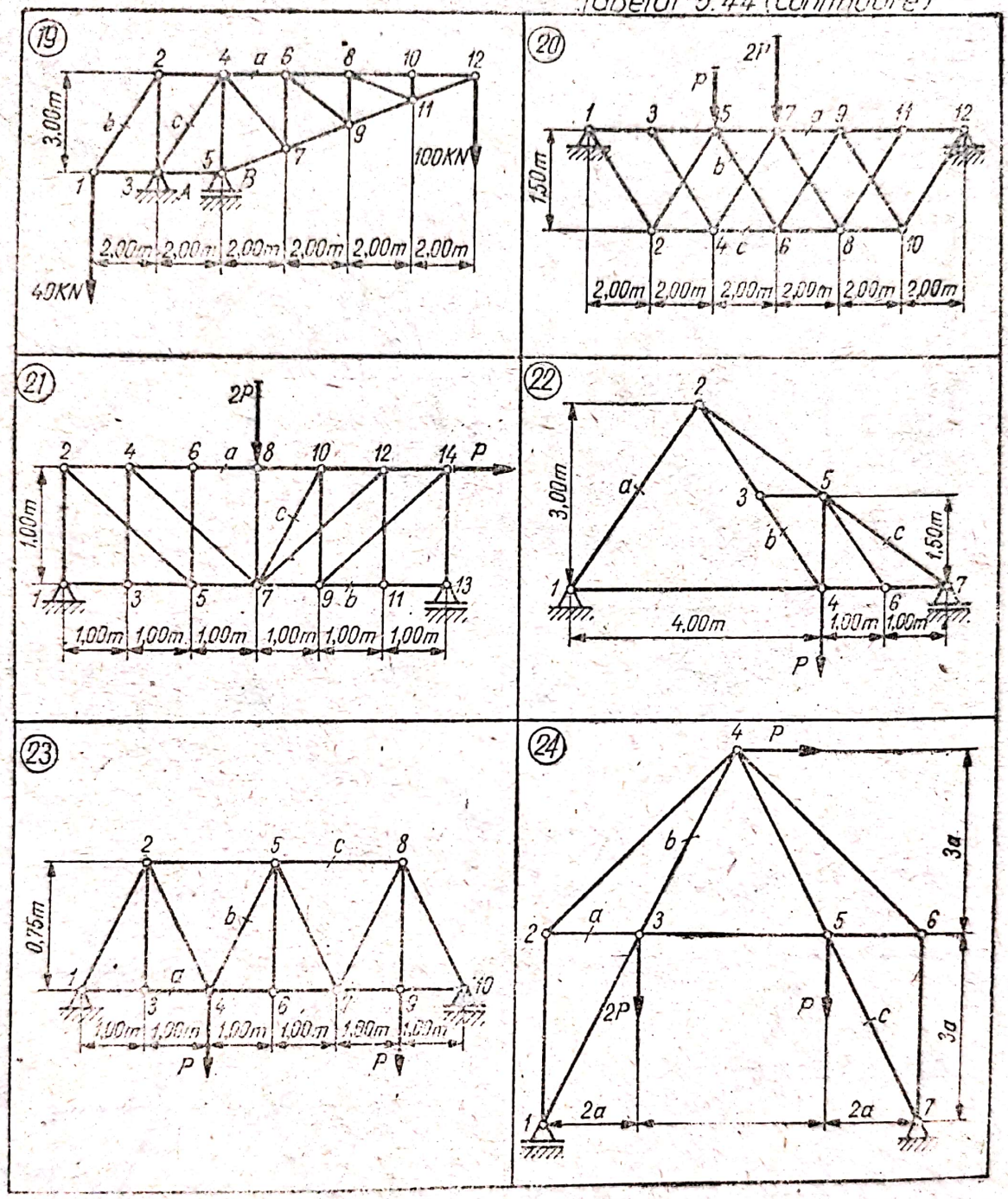


Să se analizeze dacă sînt corecte sau nu grinzile cu zăbrele 11—14 din tabelul 5.44.

Tabelul 5.44 (continuare)



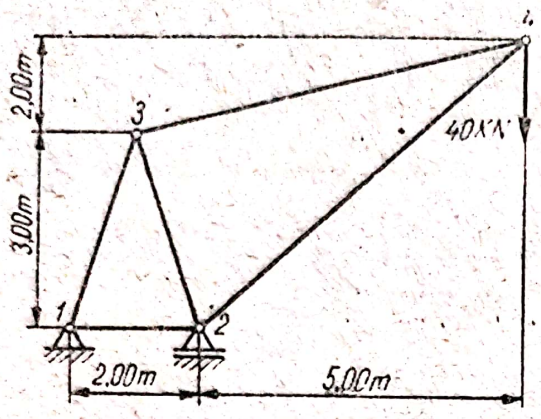
Tabelul 5.44 (continuare)



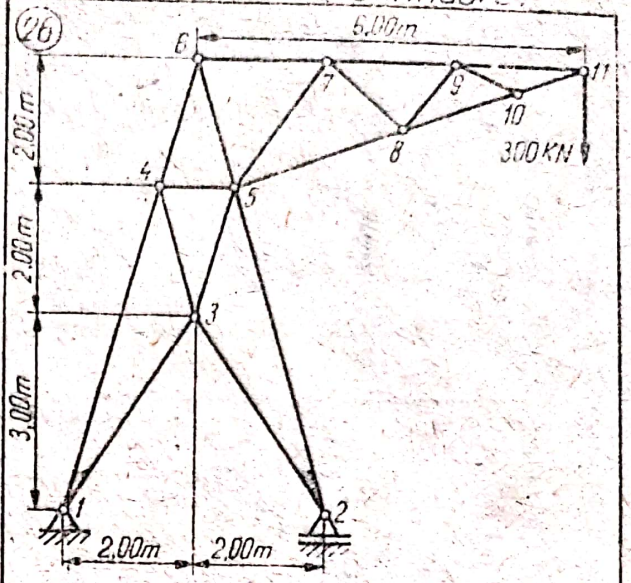
Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5.44 (continuare)

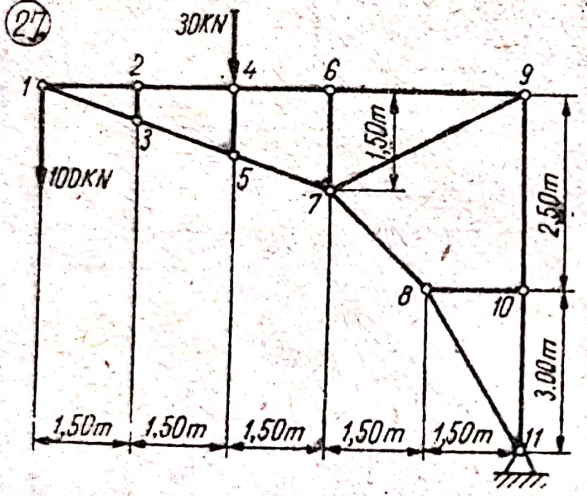
25



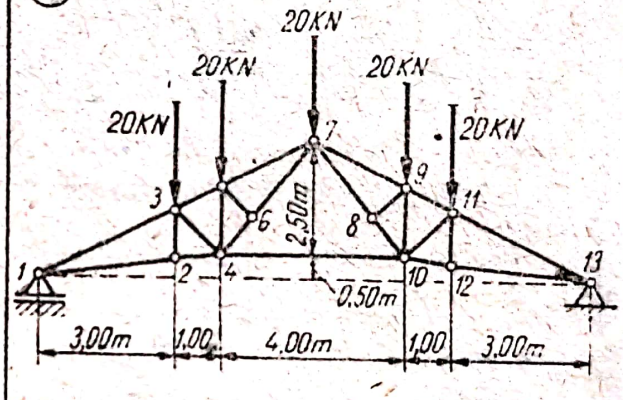
26



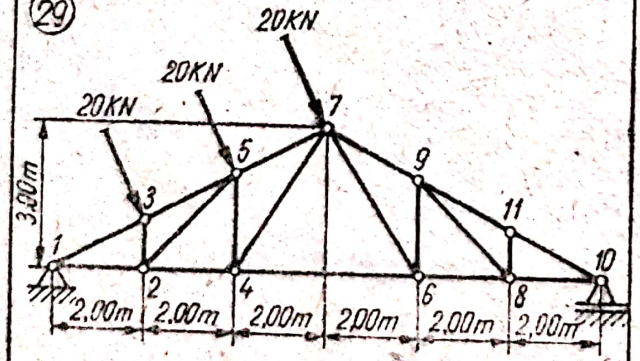
27



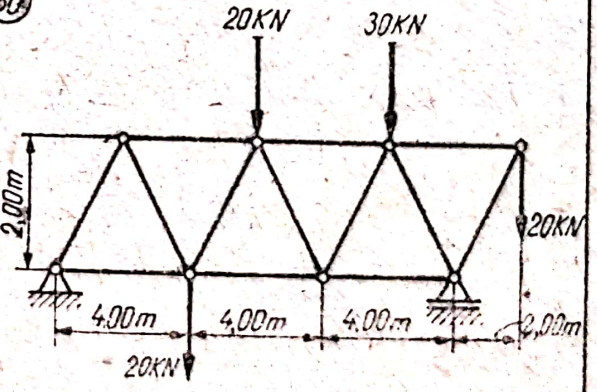
28



29

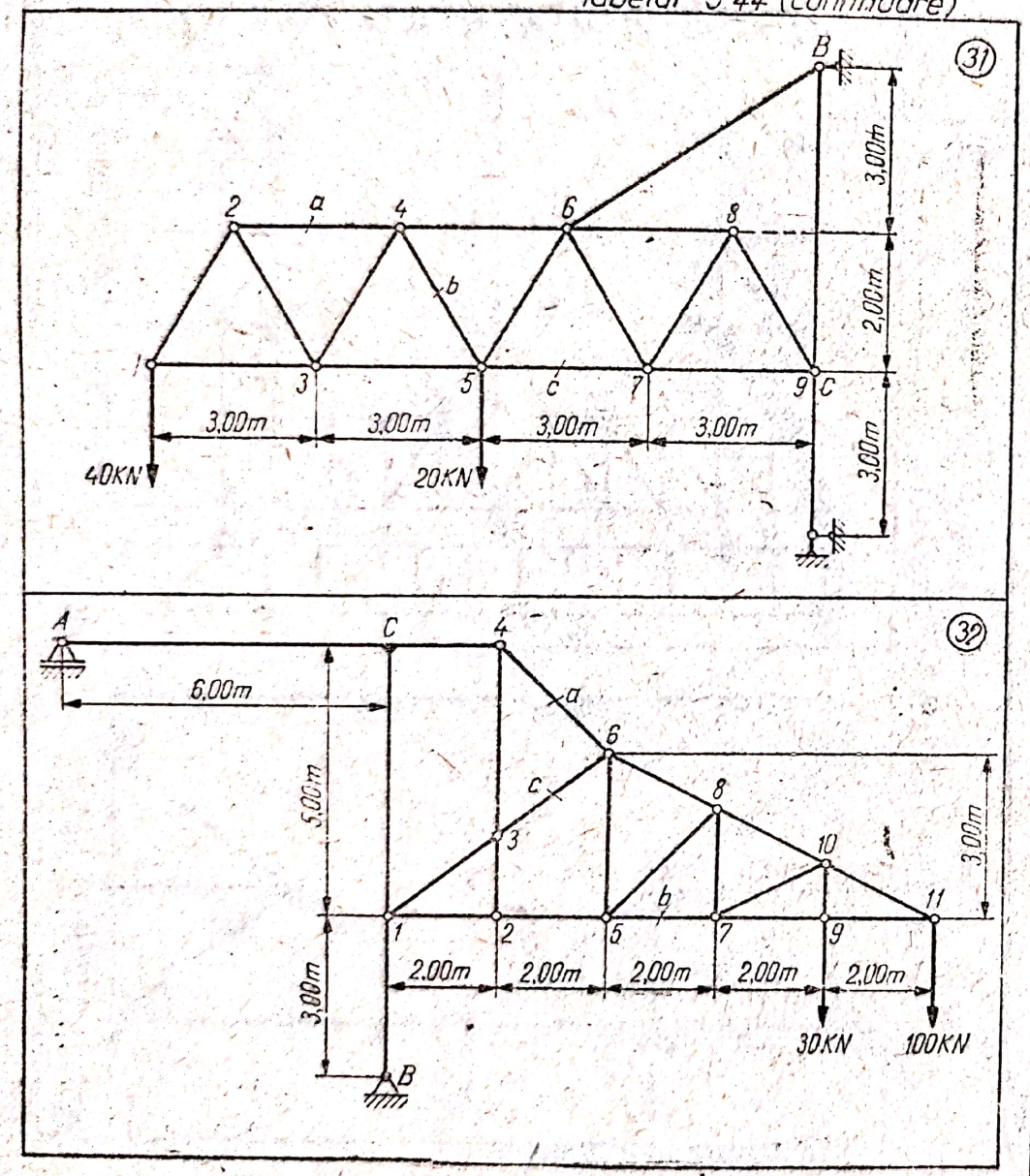


30

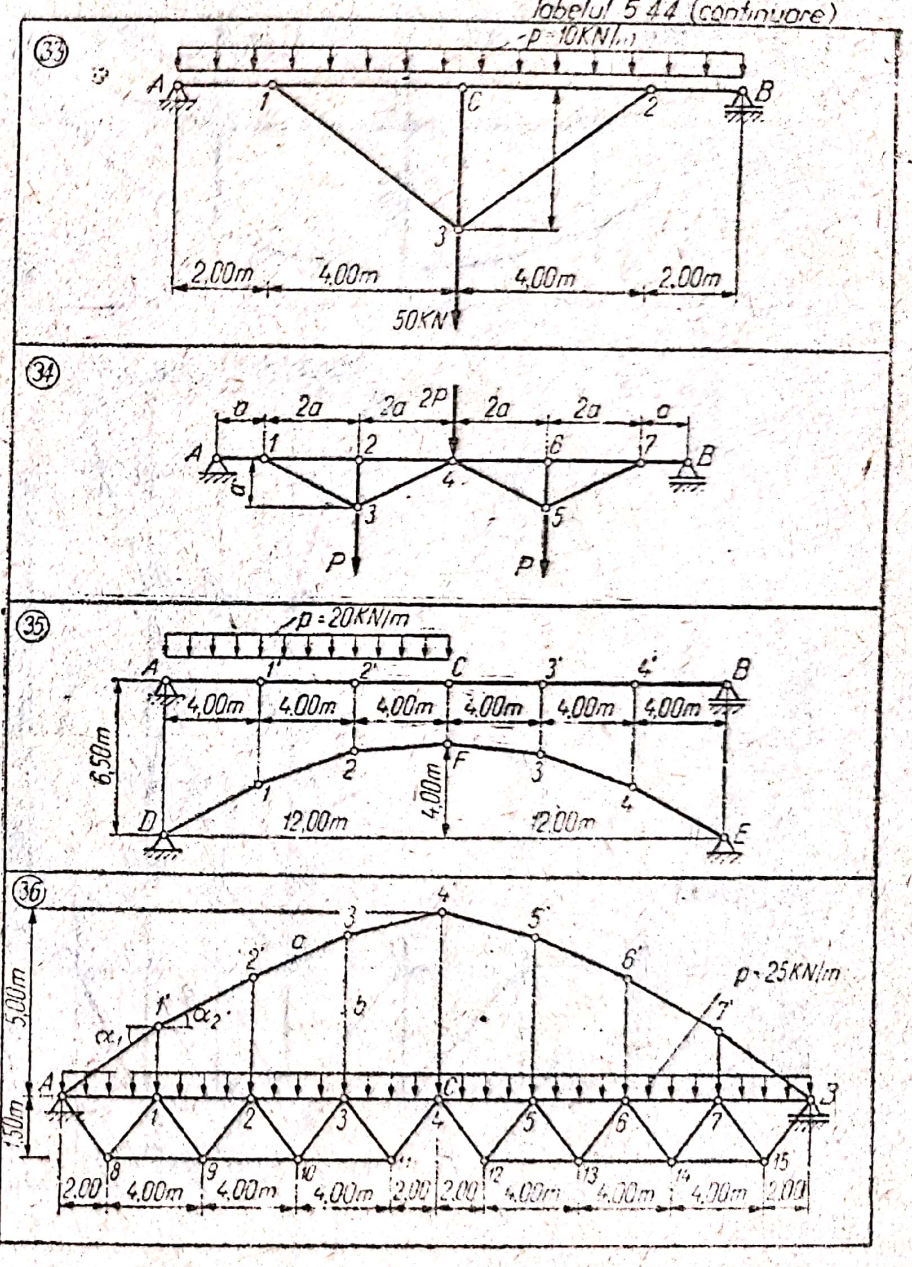


Scanned with OKEN Scanner

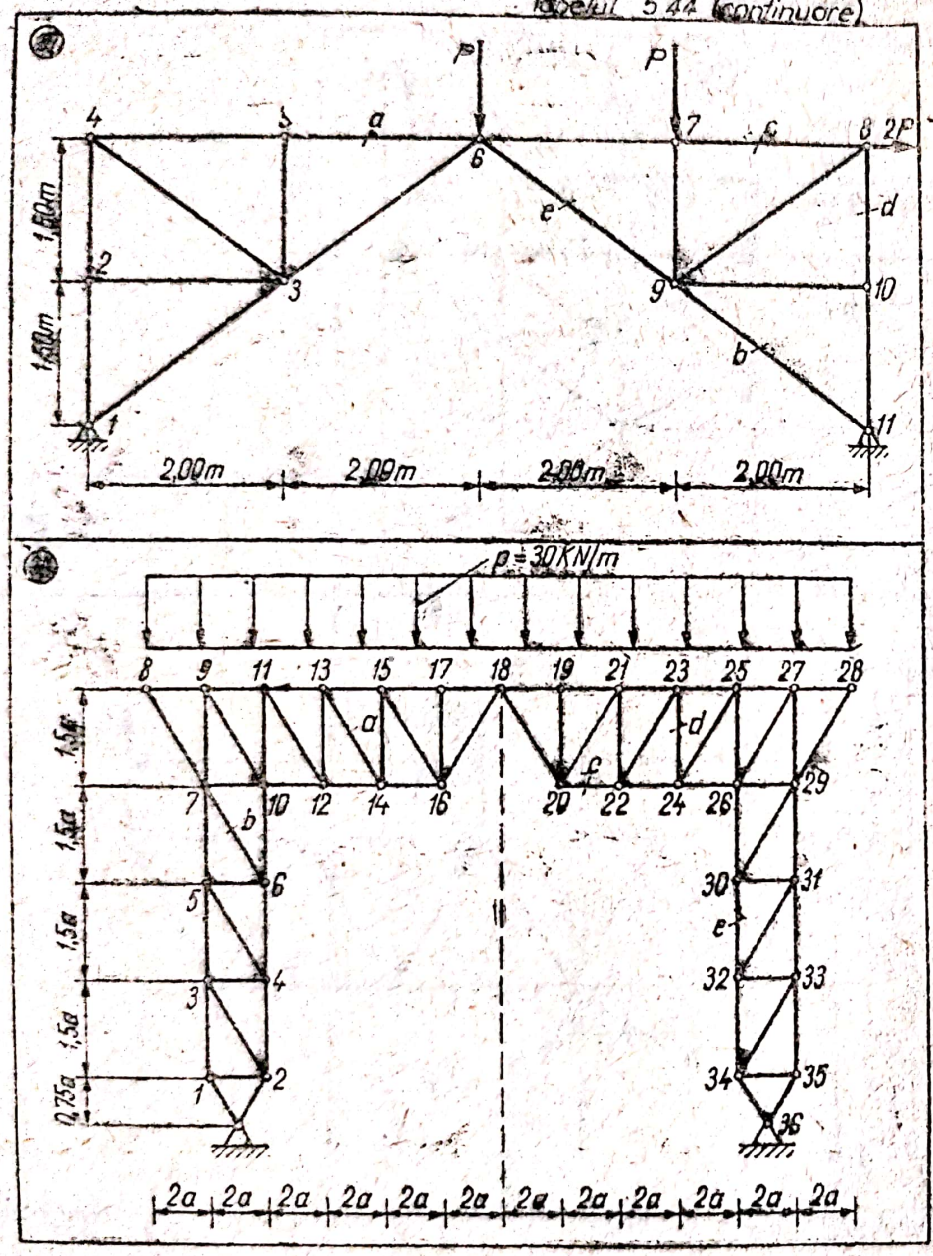
Tabelul 5.44 (continuare)



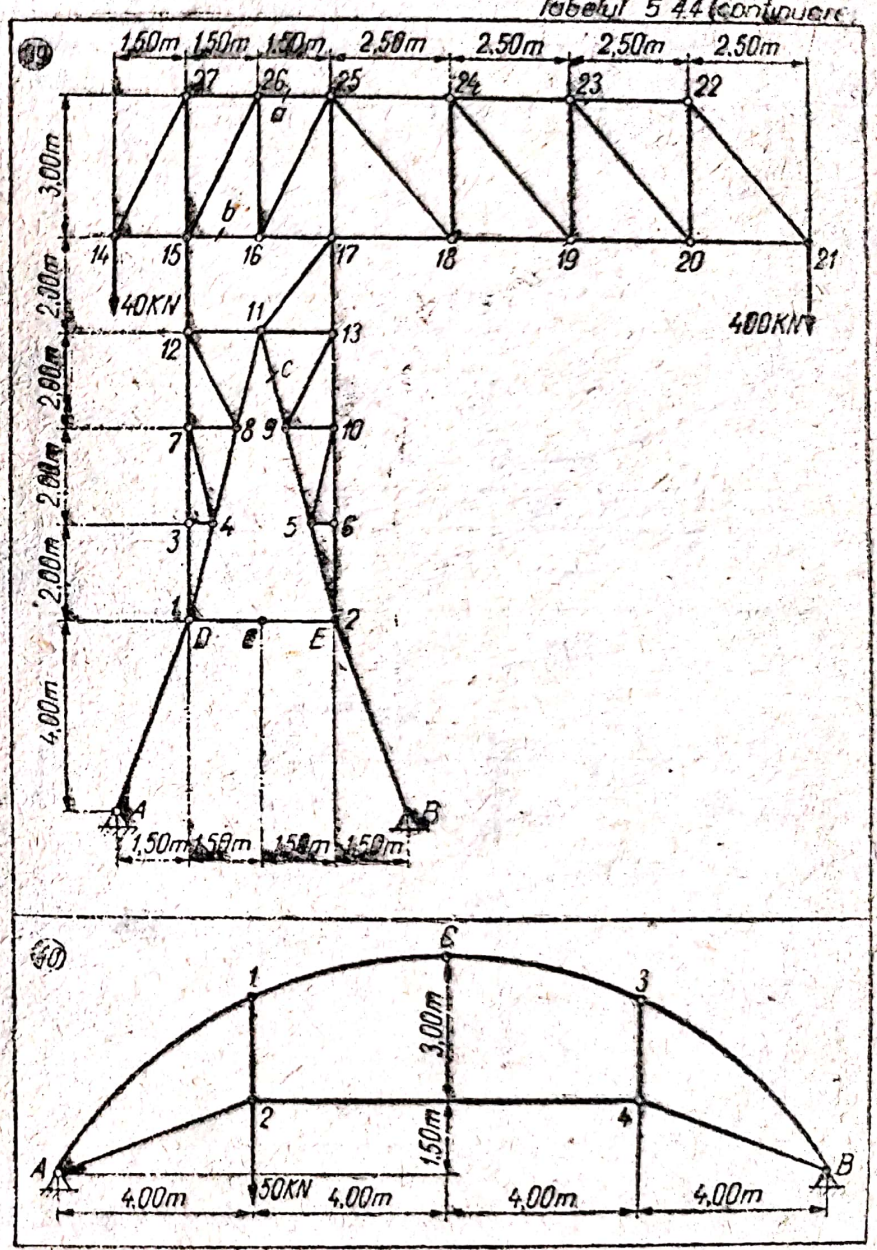
Tabelul 5.44 (continuare)



Tabelul 5.44 (continuare)

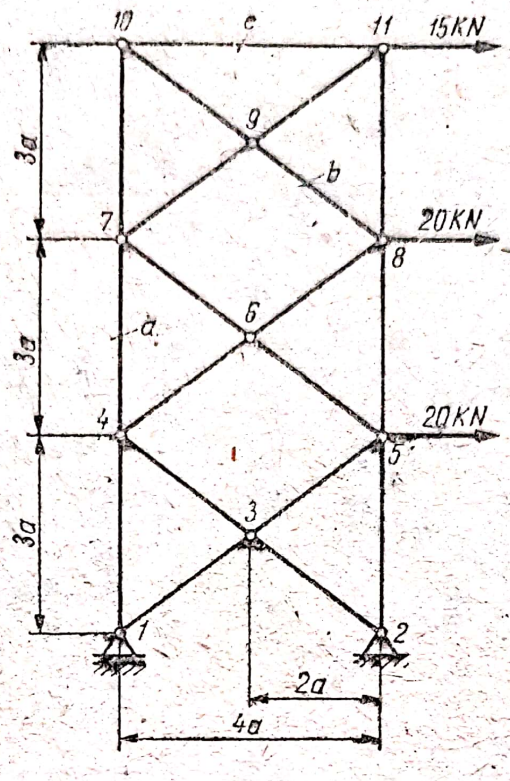


Tabelul 5.44 (continuare)

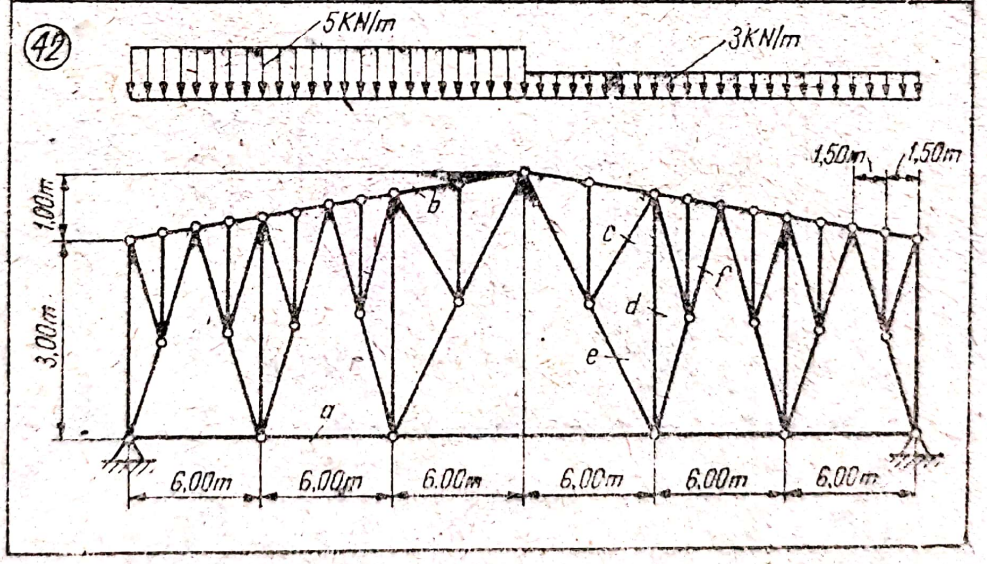


Tabelul 5.44 (continuare)

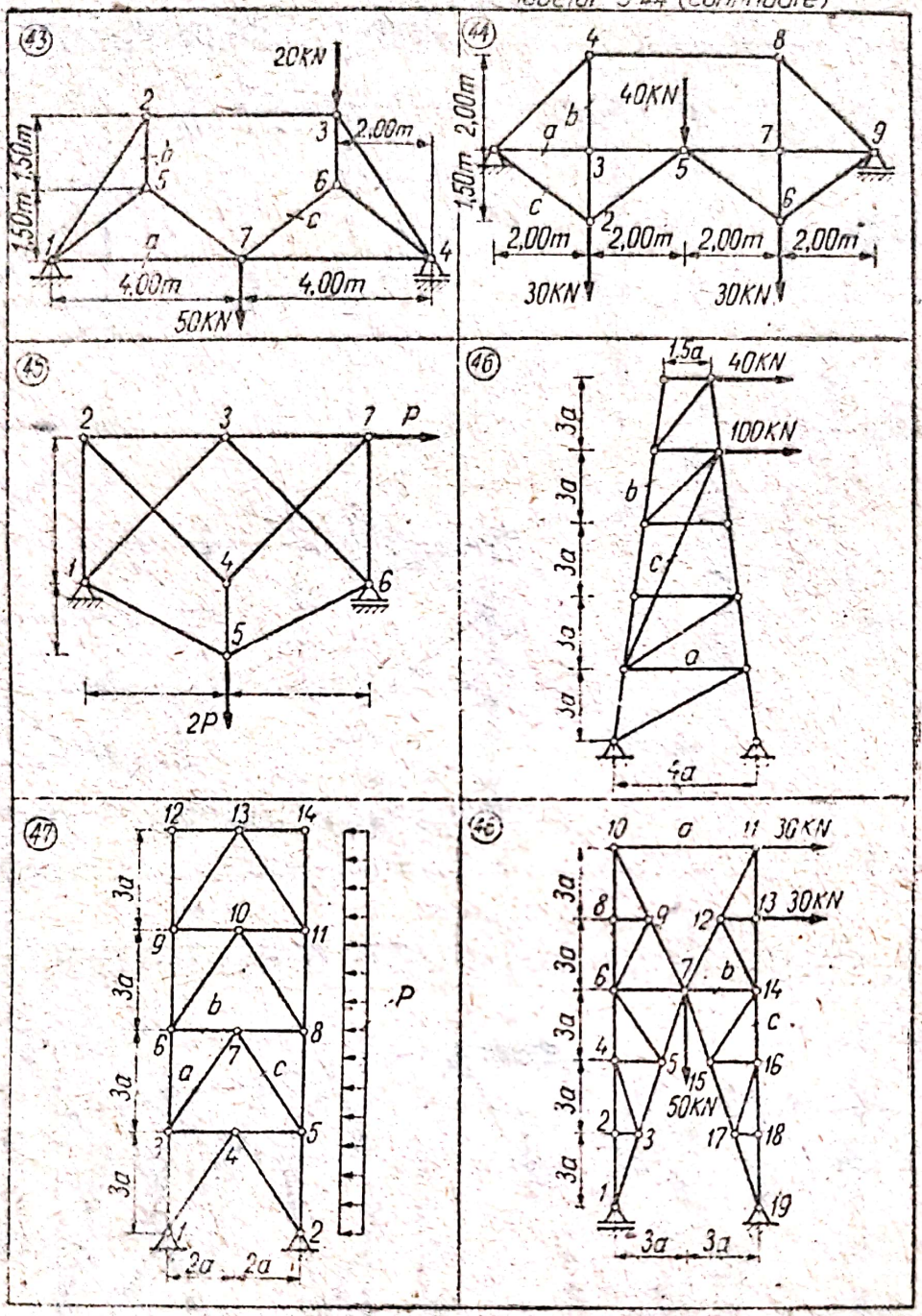
41



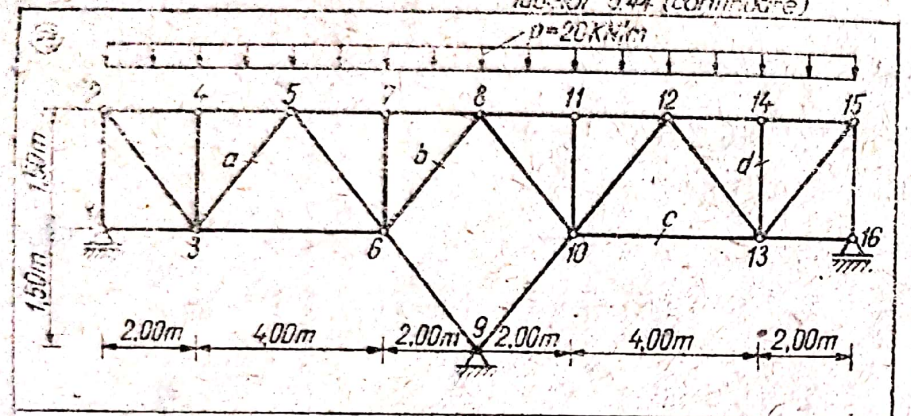
42

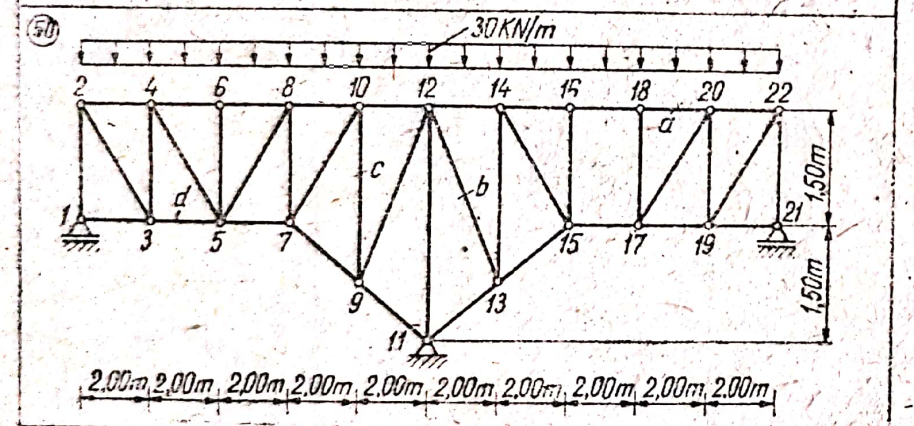


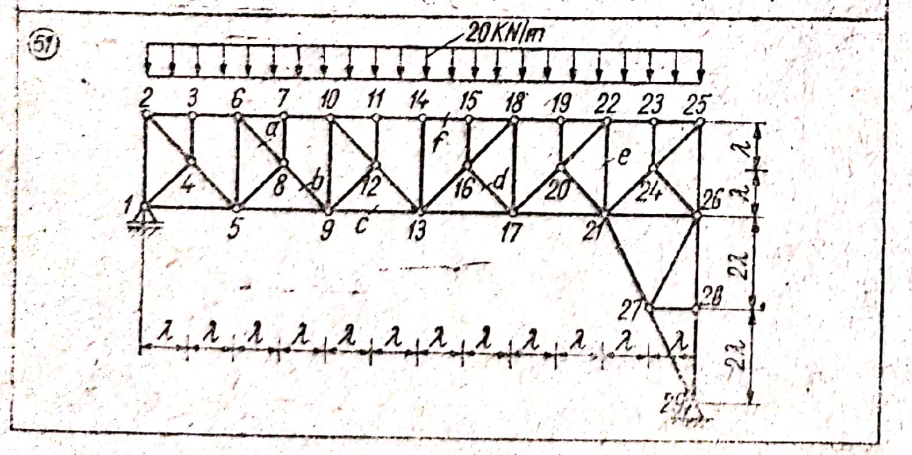
Tabelul 5.44 (continuare)



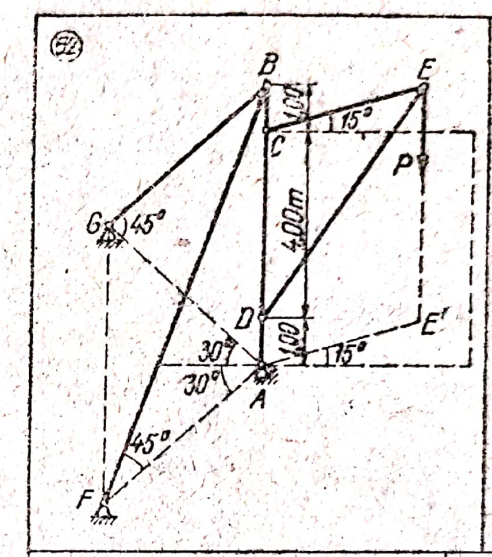
Tabelul 5.44 (continuare)

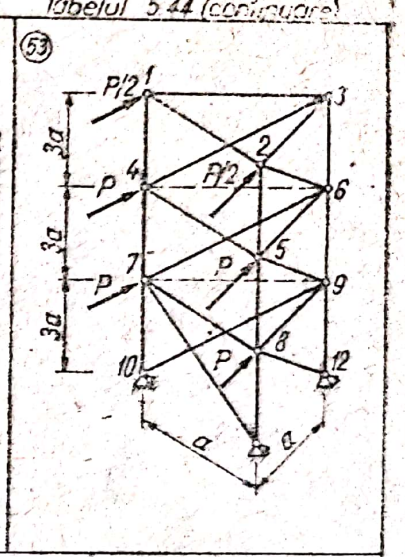


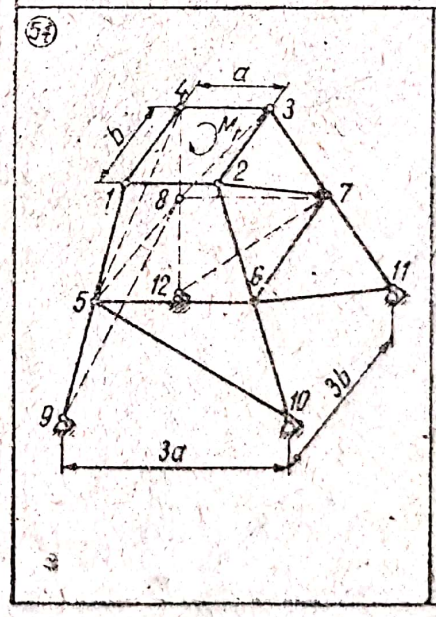


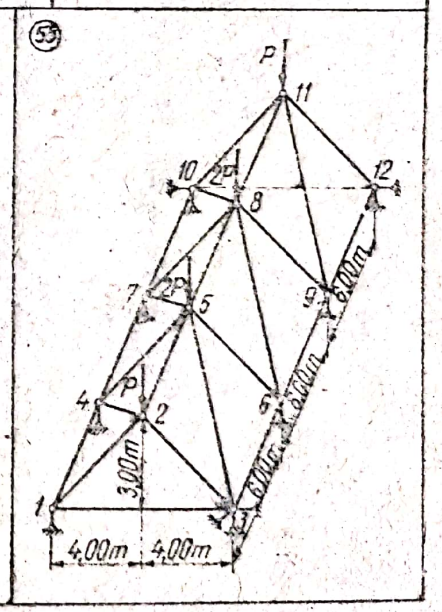


Tabelul 5.44 (continuare)

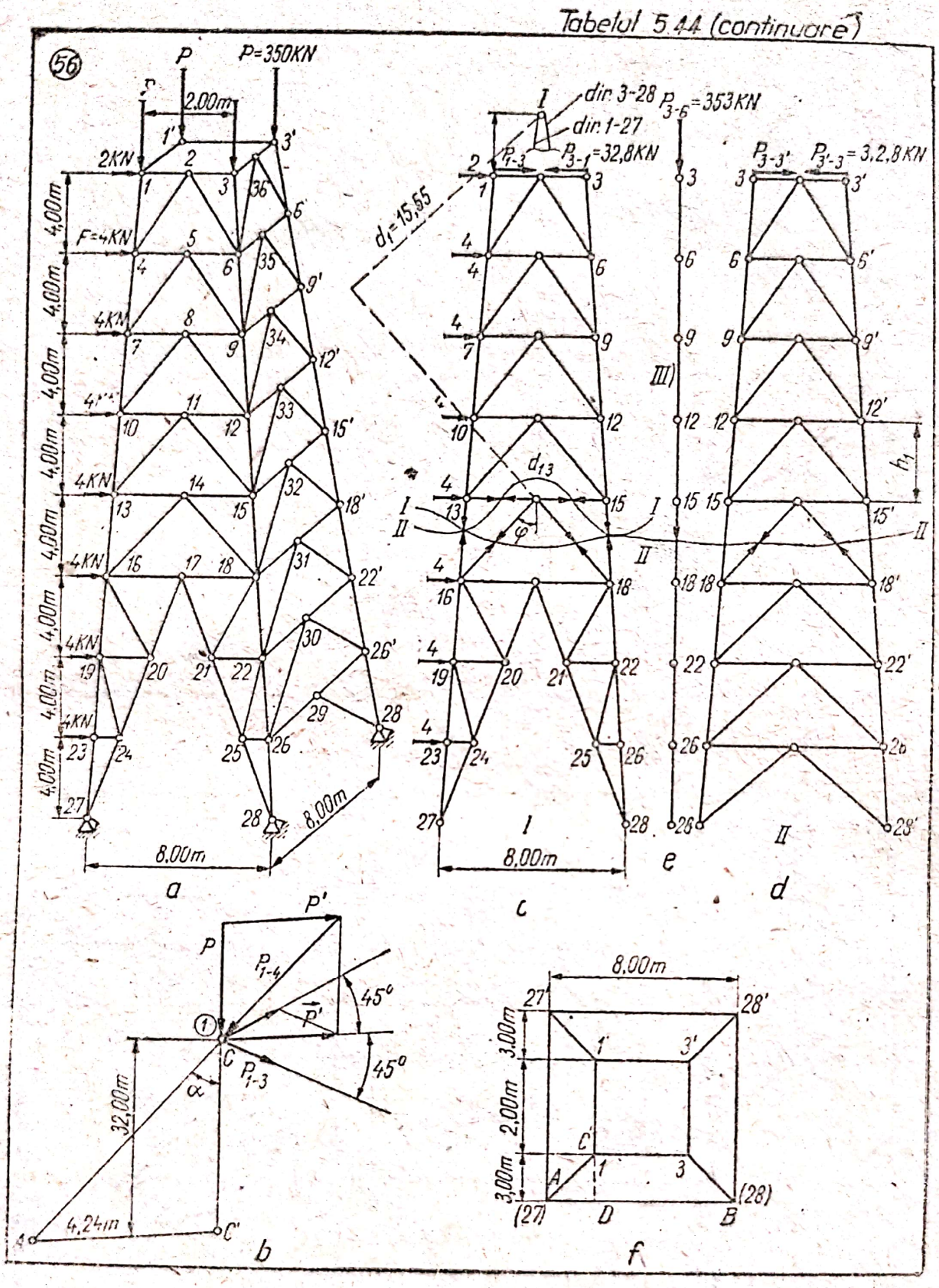








Tabelul 5.44 (continuare)



6

Statica firelor [cablurilor]

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

6.1. Generalități

Prin fir se înțelege un corp perfect flexibil, torsionabli și inextensibil, care are una dintre dimensiuni, lungimea, sensibil mai mare decît celelalte două. Ca exemple de fire în tehnică pot fi considerate: cablurile mașinilor de ridicat, firele cablurilor funicularelor, cablurile podurilor suspendate, cablurile electrice, lanțurile, funiile de cînepă etc.

Firele opun o rezistență foarte mică la deformații prin încovoiere sau răsucire. Rezultă deci că, din punct de vedere geometric, un fir poate lua forma unei curbe arbitrară, plană sau strîmbă, de aceea este asimilat cu o linie materială deformabilă. Prin urmare, firul definit mai sus este un model al mecanicii, utilizat pentru materiale continue, unidimensionale și deformabile.

Cablurile sînt funii formate din sîrme de oțel răsucite laolaltă în jurul unei inimi centrale. Inima cablului poate să fie o sîrmă de oțel mai groasă decît celelalte, sau o împletitură din fibră vegetală (cînepă, sfoară de Manilla sau de sizal) sau din material plastic.

Cablurile din oțel se pot clasifica în baza mai multor criterii, ca de exemplu: forma, materialul sîrmelor, construcția lor, cablarea etc. În literatura de specialitate [28] sînt date clasificări ale cablurilor în funcție de construcția toronului, ca fiind elementul de bază în alcătuirea cablurilor.

Clasificarea cablurilor după modul de construcție este redată în schema din fig. 6.a.

Operația de înfășurare a toroanelor în cablu în jurul unei inimi se numește cablare. La cablurile compuse se pot utiliza toroane al căror sens de înfășurare nu coincide cu sensul cablării. Acest mod de înfășurare a toroanelor în cabluri se numește cablare în cruce. Cablurile la care înfășurarea toroanelor și a cablului are același sens se numesc cabluri cu cablare paralelă. În prezent se fabrică cabluri cu înfășurare paralelă din sîrme performate (tr-lay). Operația de preformare constă în trecerea prealabilă a sîrmelor printr-un dispozitiv pentru a se da sîrmelor forma pe care o iau în procesul de înfășurare.

Considerînd firul perfect flexibil și perfect torsional, rezultă că aceasta nu poate opune nici un fel de rezistență la solicitările de încovoiere, răsucire și compresiune, singurul efort pe care-l poate prelua fiind cel de întindere (tracțiune). Cu scopul de a simplifica studiul firelor, acestea mai

Scanned with OKEN Scanner

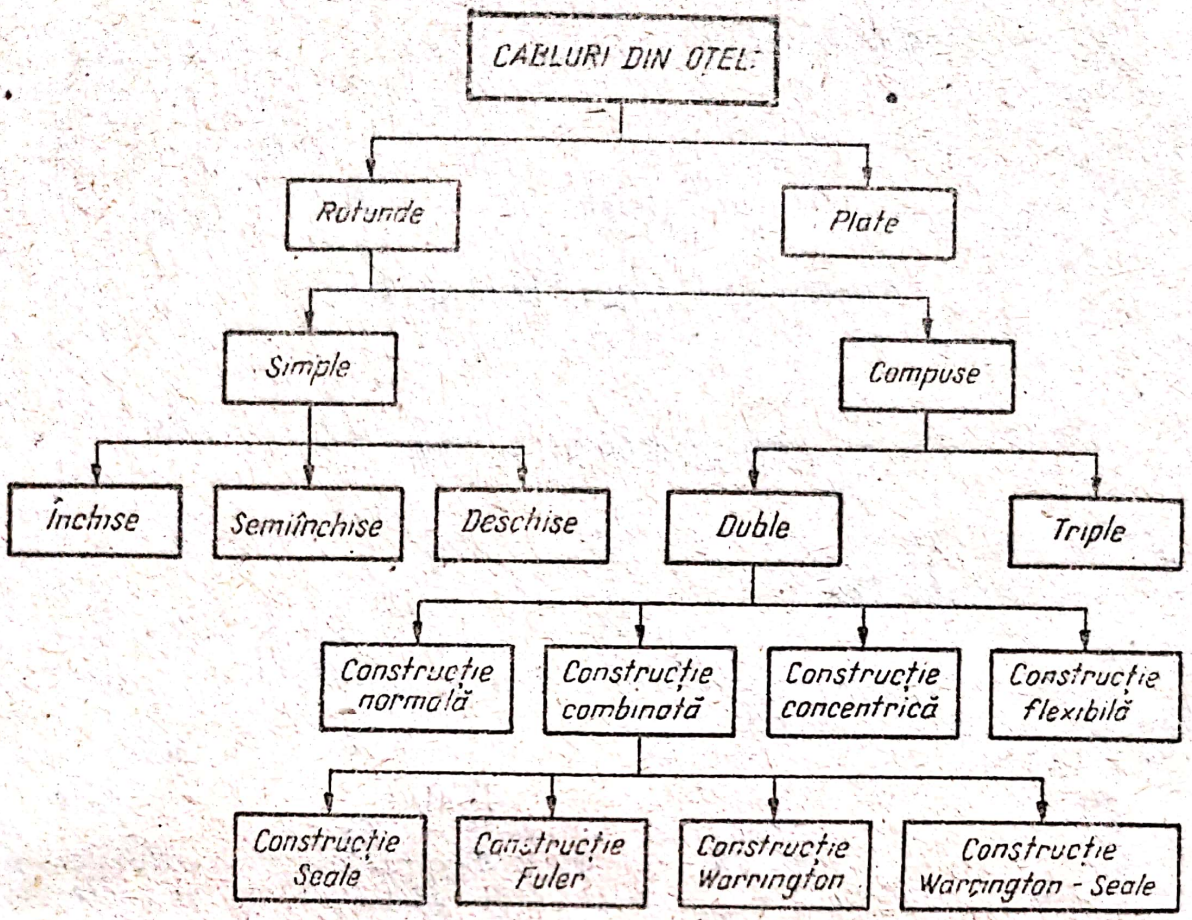


Fig. 6. a

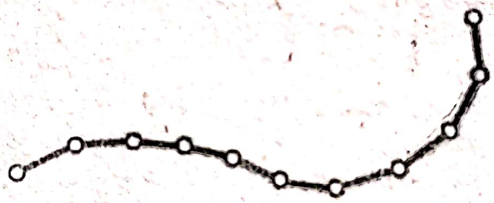


Fig. 6 b

sînt considerate inextensibile, cu alte cuvinte, lungimea unui fir rămîne constantă în timpul deformației sub acțiunea forțelor active.

Pe baza proprietăților firelor menționate mai sus, se poate considera că un fir este constituit dintr-o infinitate de bare elementare, perfect rigide, avînd o singură dimensiune și fiind articulate între ele cap la cap (fig. 6. b). De remarcat faptul că, o mare parte din problemele staticii și rezistenței mecanice a firelor elastice cu săgeți mici conduc la ecuații de gradul al treilea de forma:

$$z^3 + pz^2 + q = 0 \tag{6.1}$$

în care $q < 0$.

6.2. Calculul firelor acționate de forțe concentrate

Fie un cablu suspendat în punctele *1*, *2*, ..., *6* asupra căruia acționează forțele exterioare $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ și $\mathbf{F}_5$. Sub acțiunea acestor forțe, cablul, a cărui greutate se neglijează, capătă forma unui poligon (fig. 6. c). Fie-

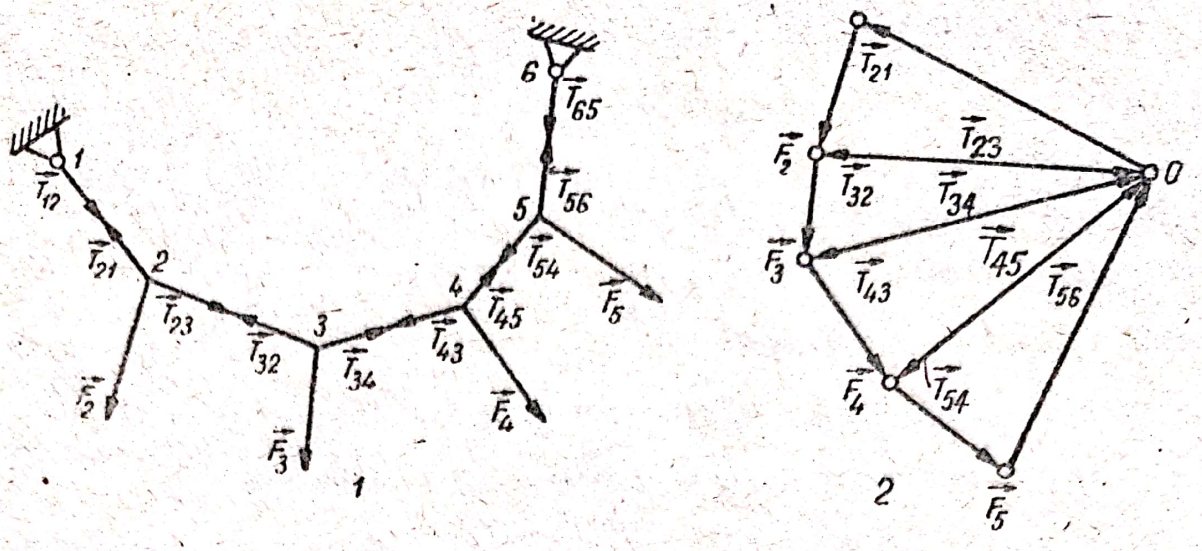


Fig. 6 c

care punct al cablului. în care acţionează o forţă exterioară, este în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare şi a eforturilor din cablu. Acest echilibru se exprimă grafic printr-un poligon de forţe închise pentru fiecare punct. Suprapunînd aceste poligoane de-a lungul laturilor lor comune, se obţine însăşi poligonul forţelor exterioare ale cărui raze polare reprezintă eforturile pe diferite porţiuni ale cablului. Se observă, de asemenea, că forma pe care o capătă cablul sub acţiunea forţelor concentrate, corespunde chiar cu poligonul funicular, construit prin punctul *1* şi corespunzător poligonului forţelor exterioare $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, şi $\mathbf{F}_5$, cu polul în *O*, a cărui lungime este egală cu lungimea cablului.

6.3. Ecuaţia curbei funiculare

Lănţişorul. Sub acţiunea greutăţii proprii de intensitate q, un cablu întins şi suspendat între două reazeme ia forma unui arc de catenoidă (lănţişor) (fig. 6. d). Considerînd un element de arc ds, se poate scrie relaţia

$$dx = p\,ds.$$

Ecuaţia diferenţială a curbei funiculare va fi în acest caz

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{H}\frac{ds}{dx} \qquad (6.2)$$

în care p este mărimea sarcinii ce revine unităţii de lungime de cablu, iar H — componenta orizontală a tensiunii din cablu.

Ecuaţia (6.2) se mai scrie

$$dy' = \frac{p}{H}\,ds \qquad (6.3)$$

Ţinînd seama că $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$ şi separînd variabilele, se obţine

$$\frac{dy'}{\sqrt{y'^2+1}} = \frac{dx}{a} \qquad (6.4)$$

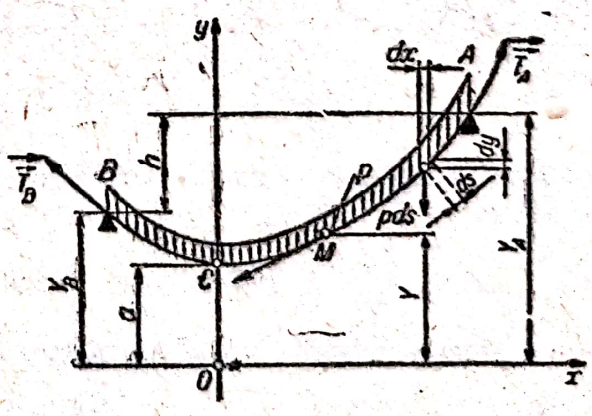


Fig. 6 d

unde s-a notat prin a raportul

$$a = \frac{H}{p} \tag{6.5}$$

care este o lungime constantă, denumită parametrul curbei funiculare. Integrînd ecuaţia (6.4), se obţine

$$\operatorname{argsh} \frac{dy}{dx} = \frac{x + C_1}{a}$$

sau

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} \frac{x + C_1}{a} \tag{6.6}$$

Printr-o nouă integrare rezultă ecuaţia curbei funiculare

$$\frac{y + C_2}{a} = \operatorname{ch} \frac{x + C_1}{a}. \tag{6.7}$$

A rezultat astfel ecuaţia curbei lănţişor. În condiţiile sistemului de referinţă din fig. 6. c rezultă

$C_1 = C_2 = 0$, astfel încît ecuaţia lănţişorului se reduce la forma

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \tag{6.8}$$

sau la forma

$$y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}). \tag{6.9}$$

Proprietăţile geometrice şi mecanice ale lănţişorului. În multe probleme legate de echilibrul cablurilor, intervin frecvent unele proprietăţi geometrice şi mecanice ale lănţişorului, dintre care le prezentăm, în cele ce urmează, pe cele mai importante, în care y_m este ordonata lănţişorului la mijlocul deschiderii, unde

$$x = x_1 + \frac{l}{2}.$$

Ţinînd seama că ordonatele y_1 şi y_m au expresiile

$$y_1 = a \operatorname{ch} \frac{x_1}{a}\ ;\ y_m = a \operatorname{ch} \frac{2x_1 + l}{2a}$$

rezultă

$$f_m = \frac{h}{2} + a\left(\operatorname{ch} \frac{y_1}{a} - \operatorname{ch} \frac{2x_1 + l}{2a}\right)$$

şi încă

$$f_m = \frac{h}{2} - 2a \operatorname{sh} \frac{4x_1 + l}{4a} \operatorname{sh} \frac{l}{4a}. \tag{6.10}$$

Coeficienţii unghiulari ai tangentelor la curbă în punctele de suspensie au valorile

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{sh} \frac{x_1}{a} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{sh} \frac{x_2}{a} \tag{6.11}$$

iar raza de curbură a curbei funiculare

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{a}{\cos^2 \alpha}. \tag{6.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Componenta orizontală a tensiunii într-un punct oarecare M al cablului este

$$H = p \cdot a = \text{const.} \tag{6.13}$$

Se observă, astfel, că substituind pe x cu $-x$, ecuația (6.8) nu se modifică; rezultă, deci, că linia de echilibru a firului este simetrică în raport cu axa Oy. De asemenea, dacă se înlocuiește a și x respectiv prin ka și kx, y devine de k ori mai mare, ceea ce înseamnă că toate lănțișoarele sînt curbe geometric-asemenea între ele; se poate conchide, deci, că nu există, de fapt, decît un singur lănțișor, susceptibil de reprezentare la diferite scări.

Săgeata f_m a curbei lănțișor la mijlocul deschiderii (fig. 6. e) se poate exprima prin relația

$$f_m = y_1 + \frac{h}{2} - y_m$$

iar componenta verticală

$$V = H \operatorname{tg} \alpha = Hy' = H \operatorname{sh} \frac{x}{a} = pa \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Tensiunea totală va fi deci

$$T = \sqrt{V^2 + H^2} = H \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = pa \operatorname{ch} \frac{x}{a} = py. \tag{6.14}$$

Prin urmare, tensiunea într-o secțiune oarecare a cablului este proporțională cu ordonata secțiunii, factorul de proporționalitate fiind greutatea unității de lungime de cablu, p.

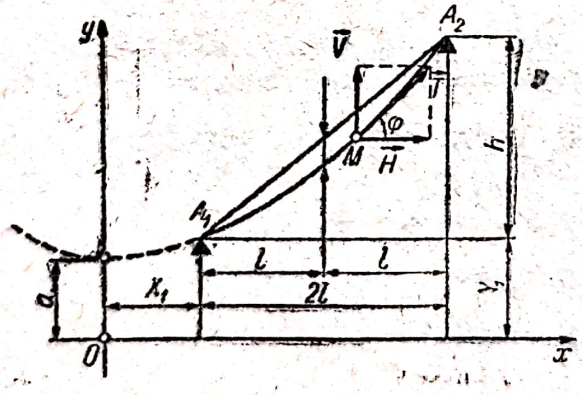


Fig. 6 c

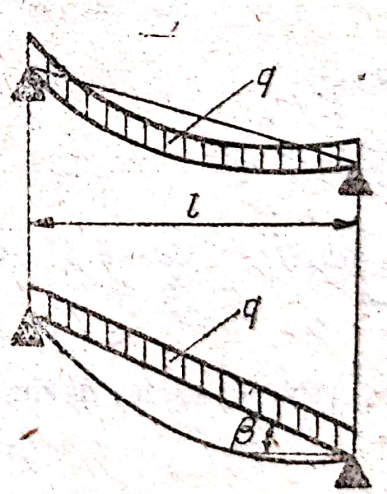


Fig. 6 f

Parabola funiculară. În practica inginerească, curba funiculară a unui cablu întins și suspendat între două reazeme este considerată ca fiind un arc de parabolă. Sensul fizic al acestei aproximări constă în aceea că, greutatea q, a unității de lungime de cablu, se consideră uniform distribuită pe coarda deschiderii (fig. 6. f).

Dezvoltînd în serie Mac Laurin ecuația lănțișorului, se obține

$$y = \frac{a}{2}\left(2 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{12a^3} + \dots\right) \tag{6.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

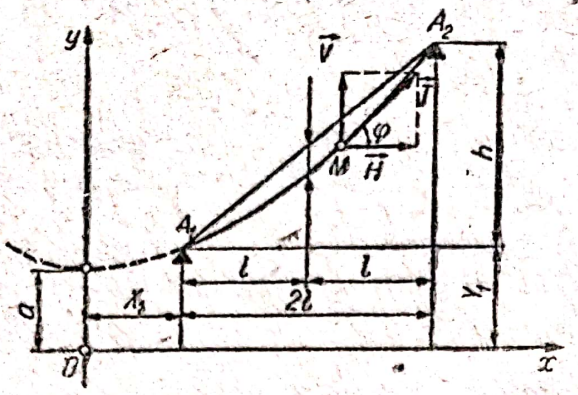


Fig. 6 g

și limitînd seria la primii doi termeni, rezultă

$$y = \frac{a}{2}\left(2 + \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{x^2}{2a} + a. \qquad (6.16)$$

Alegînd sistemul de referință astfel încît $y_1 = y - a$ și $x = x_1$; se obține ecuația parabolei

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2a}. \qquad (6.17)$$

Parametrul a se va calcula cu relația

$$a = \frac{H}{q}\cos\beta \qquad (6.18)$$

β fiind unghiul coardei.

În cazul în care se cunosc coordonatele punctelor de reazem $A_1(x_1, y_1)$ și $A_2(x_2, y_2)$ prin care trece o parabolă de parametru a (fig. 6, g) ecuația parabolei se deduce din condiția ca parabola să treacă prin cele două puncte de suspensie, rezultă

$$x_1^2 = 2ay_1;\ x_2^2 = 2ay_2$$

în care $x_2 - x_1 = l$ și $y_2 - y_1 = h$. Prin înlocuire se obține:

$$x_1 + x_2 = 2a\frac{h}{l}$$

de unde

$$x_1 = a\frac{h}{l} - \frac{l}{2}$$

iar

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2a} = \frac{ah^2}{2l^2} - \frac{h}{2} + \frac{l^2}{8a}.$$

Schimbînd originea axelor de coordonate din punctul O și A_1, se obține

$$y' = y - y_1;\ x' = x - x_1$$

iar ecuația parabolei devine

$$(x' - x_1)^2 = 2a(y' - y)$$

de unde

$$y = \frac{x'}{2a}(x' - l) + \frac{h}{l}x'.$$

Săgeata f într-un punct oarecare la distanța x este

$$f_x = \frac{h}{l}x' - y'$$

sau

$$f_x = \frac{x'(l - x)}{2a} = \frac{qx'(l - x')}{2H\cos\beta} \qquad (6.19)$$

Scanned with OKEN Scanner

Săgeata parabolei la mijlocul deschiderii ($x' = l/2$) va fi

$$f_m = \frac{l^2}{8a} = \frac{ql^2}{8H\cos\beta}. \qquad (6.20)$$

Săgeţile curbei funiculare determinate după metoda parabolei sînt mai mici faţă de cele determinate după metoda lănţişorului, diferenţa dintre ele fiind direct proporţională cu lungimea şi panta deschiderii. Pentru cablurile purtătoare, această diferenţă atinge 4—5% în condiţiile cele mai nefavorabile.

B. PROBLEME REZOLVATE

6.1. Cablul omogen al unui funicular, de lungime $2s$ şi greutate Q este suspendat în două puncte situate pe aceeaşi orizontală. Cunoscînd săgeata cablului f, să se determine tensiunea la extremităţile cablului (fig. 6.1).

Rezolvare. Determinăm parametrul lănţişorului cu relaţia

$$a = \frac{s^2 - f^2}{2f}.$$

Greutatea unităţii de lungime p de lanţ fiind

$$p = \frac{Q}{2s},$$

se poate determina componenta orizontală a tensiunii

$$H = pa = \frac{Q}{4sf}(s^2 - f^2).$$

Componenta verticală în punctul de suspensie este $V = Q/2$, iar tensiunile la extremităţile cablului vor fi

$$T = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{\left(\frac{Q}{4sf}(s^2 - f^2)\right)^2 + \frac{Q^2}{4}} = \frac{Q}{4sf}(s^2 + f^2).$$

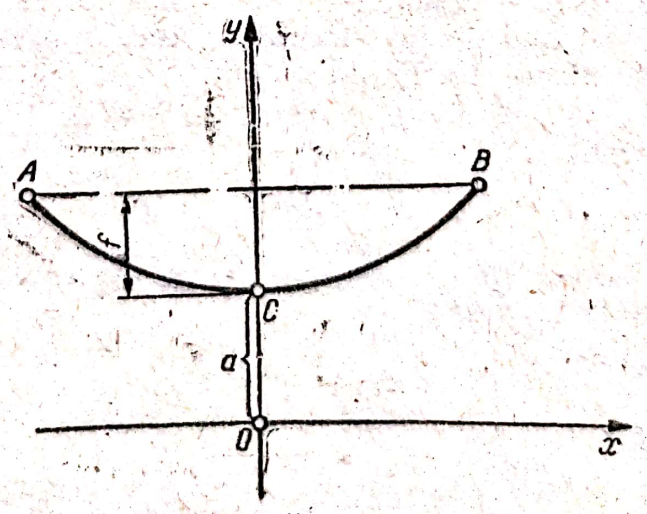


Fig. 6.1

Scanned with OKEN Scanner

6.2. Cablul omogen al unui funicular, avînd greutatea Q, este suspendat în două puncte A și B, așezate pe aceeași orizontală (fig. 6.2). Cunoscînd unghiul α, format de tangenta la cablu în punctul B cu orizontala, să se determine tensiunile din cablu în punctele de suspensie. Se va considera cablul- lănțișor.

Rezolvare. Se notează prin T tensiunea din punctele de suspensie; componenta verticală a tensiunii, V este cunoscută și egală cu jumătatea greutății întregului cablu, adică

$$V = Q/2$$

Rezultă ușor tensiunea T

$$T = \frac{V}{\sin \alpha} = \frac{Q}{2 \sin \alpha} = \frac{Q}{2} \operatorname{cosec} \alpha.$$

Se obține, de asemenea, componenta orizontală a tensiunii H:

$$H = T \cos \alpha = \frac{Q}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

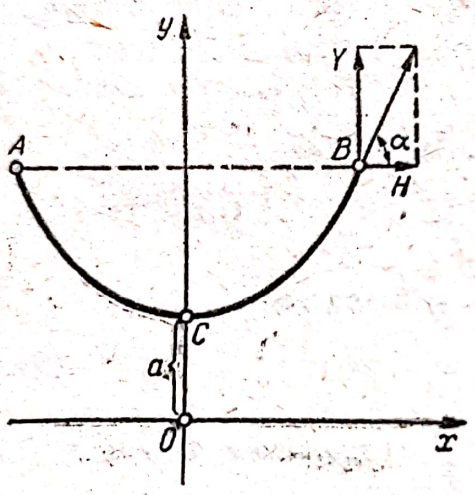


Fig. 6.2

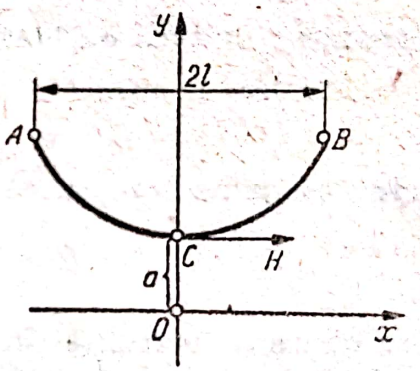


Fig. 6.3

6.3. Un cablu de funicular, avînd lungimea $2s = 33$ m este suspendat în două puncte situate pe aceeași orizontală (fig. 6.3).

Distanța între aceste puncte este $2l = 32{,}4$ m. Să se arate că tensiunea în punctul cel mai de jos al cablului este aproximativ de 1,5 ori mai mare decît greutatea întregului cablu.

Rezolvare. Tensiunea în punctul cel mai de jos al cablului este egală cu H. Va trebui să arătăm că

$$H \simeq 1{,}5\ Q.$$

Se consideră curba cablului lănțișor, care se derivează în scopul determinării lungimii sale $2s$, respectiv

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}; \quad y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}\,dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a}\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$s = \int_0^l \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, dx = a \operatorname{sh} \frac{l}{a}.$$

Înlocuind valorile lui s și l, se obține relația

$$16{,}5 = a \operatorname{sh} \frac{16{,}2}{a}$$

care se mai poate scrie

$$\frac{16{,}5}{a} \cdot \frac{16{,}2}{16{,}2} = \operatorname{sh} \frac{16{,}2}{a}.$$

Se notează $\frac{16{,}2}{a} = z$. Dezvoltînd în serie $\operatorname{sh} z$, se obține

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

Considerînd numai primii doi termeni, rezultă ecuația:

$$1{,}019z = z + \frac{z^3}{6}$$

respectiv

$$z^3 - 0{,}114z = 0,$$

a cărei soluție, care ne interesează, este

$$z = 0{,}334.$$

Cunoscînd că $z = \frac{16{,}2}{a}$, se deduce

$$a = \frac{16{,}2}{0{,}334} = 48{,}5$$

Ținînd seama că $H = pa$ și $Q = 2ps$, se obține

$$\frac{H}{Q} = \frac{48{,}5}{33} \cong 1{,}5$$

și deci $H \cong 1{,}5Q$.

6.4. Cablul unui funicular, de lungime $2s$ este suspendat în două puncte situate pe aceeași orizontală. Unghiul dintre tangenta în punctul de suspensie și orizontala este de 45° (fig. 6.4). Să se determine săgeata cablului.

Rezolvare. Unghiul dintre tangentă și orizontală fiind de 45°, rezultă că cele două componente ale tensiunii sînt egale, adică

$$H = V.$$

Însă, $V = \frac{Q}{2} = \frac{2ps}{2} = ps$, și $H = pa$. Egalînd V cu H, se obține:

$ps = pa$, de unde $a = s$.

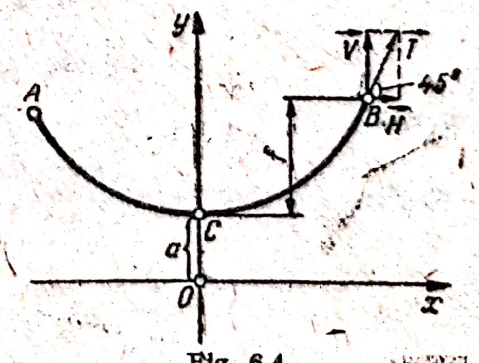


Fig. 6.4

Rezultă, că în acest caz, ordonata la origine a lănțișorului este egală cu jumătate din lungimea cablului.

Exprimînd a în funcție de s și f, se obține

$$a = \frac{s^2 - f^2}{sf} = s,$$

sau

$$s^2 - f^2 = 2fs.$$

Rezolvînd ecuația de gradul doi

$$f^2 + 2fs - s^2 = 0$$

se obține valoarea săgeții cablului

$$f = s(\sqrt{2} - 1).$$

6.5. La ce distanță trebuie alese punctele de suspensie ale cablului unui funicular, de lungime $2s$, situate pe aceeași orizontală, pentru ca tensiunea cablului, în fiecare din aceste puncte să fie egală cu greutatea întregului cablu. Să se afle, de asemenea, unghiul dintre tangenta la cablu și orizontală, în punctele de suspensie (fig. 6.5).

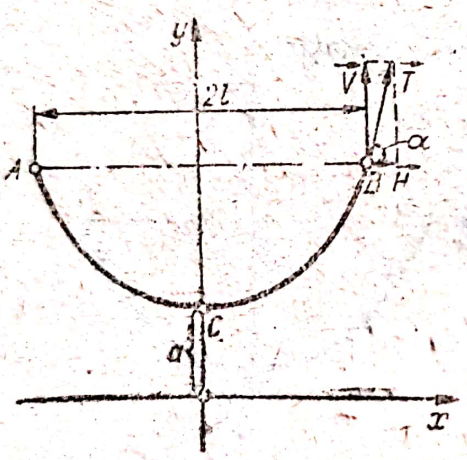


Fig. 6.5

Rezolvare. Trebuie determinată distanța dintre punctele A și B în ipoteza

$$T = Q.$$

Putem scrie deci

$$T^2 = H^2 + V^2 = Q^2.$$

Ținînd seama că $V = Q/2$ și $H = pa = \frac{Qa}{2s}$, rezultă

$$\frac{Q^2a^2}{4s^2} + \frac{Q^2}{4} = Q^2$$

de unde $a = s\sqrt{3}$.

Lungimea jumătății de cablu fiind $s = a \operatorname{sh} \frac{l}{a}$, rezultă

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{l}{a}} - e^{-\frac{l}{a}}\right);$$

sau

$$s = \frac{s\sqrt{3}}{2}\left(e^{\frac{l}{a}} - e^{-\frac{l}{a}}\right)$$

Notînd $l/a = z$, se obține

$$2 = \sqrt{3}e^z - \sqrt{3}e^{-z}$$

$$e^{2z} - \frac{2\sqrt{3}}{3}e^z - 1 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd această ecuație de gradul doi, se obține

$$e^z = \sqrt{3} \text{ sau } z = \ln \sqrt{3}.$$

Revenind la substituția $z = l/a$, deducem

$$l = az = a \ln \sqrt{3} = s\sqrt{3} \ln \sqrt{3}.$$

și deci $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

6.6. Cablul unui funicular, omogen și de lungime $2s$ este suspendat în două puncte A și B, care nu se află pe aceeași orizontală. Unghiurile dintre tangentele la fir, duse în aceste puncte și verticală sînt egale cu α și β. Să se afle diferența de înălțime a punctelor A și B (fig. 6.6).

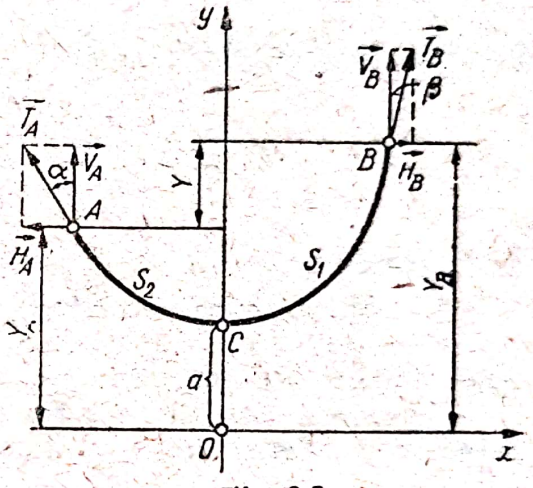


Fig. 6.6

R e z o l v a r e. Tensiunile din cablu în punctele de suspensie A și B se pot exprima în funcție de ordonatele punctelor

$$T_A = py_A;\ T_B = py_B.$$

Prin scădere se obține:

$$T_B - T_A = p(y_B - y_A) = py.$$

Notînd cu s_1 și s_2 lungimea cablului de la C la B, respectiv de la C la A, se pot scrie relațiile:

$$V_A = ps_2;\ V_B = p \cdot s_1$$

Însumînd cele două componente verticale, rezultă

$$V_A + V_B = p(s_1 + s_2) = ps. \qquad \text{(a)}$$

Se observă, însă, că

$$V_A = H \operatorname{ctg} \alpha;\ V_B = H \operatorname{ctg} \beta.$$

Înlocuind în relația (a), rezultă:

$$H(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = ps \text{ sau } H \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = ps. \qquad \text{(b)}$$

Dacă în relația

$$T_B - T_A = py$$

se înlocuiesc tensiunile în funcție de H, se obține

$$\frac{H}{\sin \beta} - \frac{H}{\sin \alpha} = py \text{ sau } H \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = py,$$

și încă

$$\frac{2H \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \alpha \sin \beta} = py. \qquad \text{(c)}$$

Din (b) se deduce

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{H \sin(\alpha+\beta)}{ps}.$$

Înlocuind în (c), se deduce

$$\frac{2H \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{H\frac{\sin(\alpha+\beta)}{ps}} = py.$$

Ţinînd seama că

$$\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

în urmă simplificării rezultă

$$y = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}s.$$

6.7. Să se stabilească lungimea cablului purtător al unui funicular.

Rezolvare. Curba funiculară a unui cablu purtător suspendat în două puncte de reazem este un lănţişor cu parametrul $a = H/p$

Lungimea arcului de lănţişor măsurat de la vîrf pînă la un punct oarecare se determină cu ajutorul integralei

$$s = \int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^x \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a\operatorname{sh}\frac{x}{a} \qquad (a)$$

Notînd cu l lungimea deschiderii şi cu h diferenţa de nivel între punctele de reazem, se obţine lungimea cablului purtător suspendat între punctele $A_1(x_1, y_1)$ şi $A_2(x_2, y_2)$

$$s = s_2 - s_1 = a\left(\operatorname{sh}\frac{x_1+l}{a} - \operatorname{sh}\frac{x_1}{a}\right)$$

sau

$$\frac{s}{a} = 2\operatorname{ch}\frac{2x_1+l}{2a}\operatorname{sh}\frac{l}{2a}. \qquad (b)$$

Ordonatele punctelor de reazem se determină din ecuaţia lănţişorului

$$y_1 = a\operatorname{ch}\frac{x_1}{a}$$

$$y_2 = h = a\operatorname{ch}\frac{x_1+l}{a}$$

de unde rezultă

$$h = a\left(\operatorname{ch}\frac{x_1+l}{a} - \operatorname{ch}\frac{x_1}{a}\right)$$

sau

$$\frac{h}{a} = 2\operatorname{sh}\frac{2x_1+l}{2a}\operatorname{sh}\frac{l}{2a}. \qquad (c)$$

Scanned with OKEN Scanner

Abscisa x_1 poate fi eliminată din relaţiile (b) şi (c) făcînd diferenţa pătratelor lor, astfel că lungimea curbei lănţişorului devine

$$s = \sqrt{h^2 + 4a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{l}{2a}}. \qquad \text{(d)}$$

Dezvoltînd în serie Taylor funcţia sinus hiperbolic

$$4a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{l}{2a} = l^2 + \frac{2l^4}{4\,!a^4} + \frac{2l^6}{6\,!a^4} + \dots$$

ţinînd seama că $l^2 + h^2 = l^2/\cos^2 \beta$, se obţine

$$s = \frac{l}{\cos \beta}\left[l + \left(\frac{2l^2}{4\,!a^2}\cos^2 \beta + \frac{2l^4}{6\,!a^4}\cos^2 \beta + \dots\right)\right]^{1/2}.$$

Dezvoltînd din nou, după binomul lui Newton expresia din paranteza dreptunghiulară, se obţine:

$$s = \frac{1}{\cos \beta}\int_0^l \left\{1 + \left[\frac{l - 2x}{a}\sin \beta + \frac{(l-2x)^2}{4a^2}\right]\right\}^{1/2} dx$$

unde s-a notat $a = H/q$. Dezvoltînd expresia obţinută după binomul lui Newton şi limitînd seria la trei termeni, rezultă

$$s = \frac{l}{\cos \beta}\int_0^l \left\{1 + \frac{1}{2}\left[\frac{l-2x}{a}\sin \beta + \frac{(l-2x)^2}{4a^2}\right] - \frac{1}{8}\left[\frac{l-2x}{a}\sin \beta + \frac{(l-2x)^2}{4a^2}\right]\right\} dx =$$

$$= \frac{l}{\cos \beta}\int_0^l \left[1 + \frac{(l-2x)}{2a}\sin \beta + \frac{(l-2x)^2}{8a^2}\cos^2 \beta - \frac{(l-2x)^3}{16a^2}\sin^2 \beta - \frac{(l-2x)^4}{128a^4}\right] \cdot dx$$

de unde se obţine lungimea cablului purtător

$$s = \frac{l}{\cos \beta} + \frac{l^3}{24a^2} \cdot \left(1 - \frac{l^2}{27a^2 \cos^2 \beta}\right) \cos \beta.$$

Pentru $l = 1000$ m, $a = 3000$ m şi lungimea $\beta = 45°$, considerate condiţii limită la instalarea funicularelor pasagere, expresia din paranteză are valoarea 0,983. Neglijînd termenul al doilea din paranteză, rezultă că pentru determinarea lungimii cablului purtător într-o deschidere se poate folosi relaţia

$$s = \frac{l}{\cos \beta_1} + \frac{l^3 \cos \beta}{24a^2}$$

sau luînd $a = H/g$, se obţine

$$s = \frac{l}{\cos \beta} + \frac{q^2 l^3 \cos \beta}{24H^2}.$$

6.8. Cablul omogen al unui funicular AC de lungime l şi greutate p[kN/m] este suspendat în A şi rezemat pe un plan înclinat (fig. 6.8). Cunoscînd unghiurile α şi β dintre tensiunea în A şi planul orizontal şi dintre planul înclinat şi planul orizontal, să se determine lungimea l_1 a cablului rezemat de plan.

Scanned with OKEN Scanner

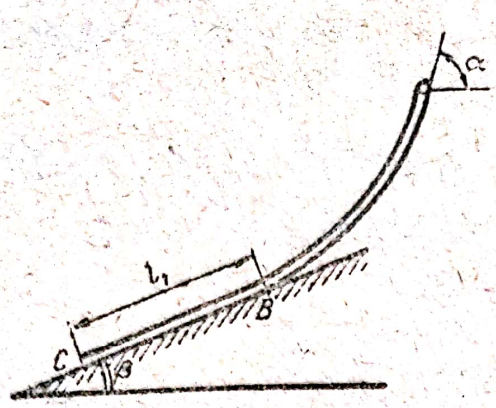


Fig. 6.8

Rezolvare. Se consideră cablul format din două porțiuni distincte: porțiunea BC rezemată pe planul înclinat și porțiunea AB care atîrnă din punctul A pînă pe planul înclinat.

Ecuația de echilibru a porțiunii CB este

$$T_B - pl_1 \sin \beta = 0$$

iar ecuațiile de echilibru ale porțiunii BA sînt

$$\begin{aligned} -T_B \cos \beta + T_A \cos \alpha &= 0 \\ -T_B \sin \beta - p(l - l_1) + T_A \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \qquad (a)$$

Din prima ecuație se obține

$$T_B = pl_1 \sin \beta$$

iar din ecuația doua

$$T_A = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} T_B = pl_1 \frac{\sin \beta \cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Înlocuind valorile lui T_A și T_B în cea de a treia ecuație, se obține

$$-pl_1 \sin^2 \beta - p(l - l_1) + pl_1 \sin \beta \cos \beta \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

de unde se deduce lungimea l_1

$$l_1 = \frac{l \cos \alpha}{\cos \beta (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)} = \frac{l \cos \alpha}{\cos \beta \cos(\alpha - \beta)}.$$

6.9. Cablul unui funicular, considerat fir greu omogen este suspendat în două puncte A și B avînd o diferență de nivel $2h$. Lungimea $2s$ a cablului, precum și distanța pe orizontală între punctele A și B fiind cunoscute, să se determine parametrul a.

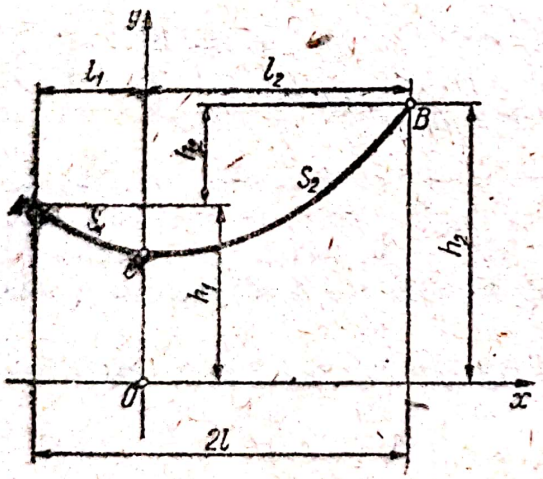


Fig. 6.9

Rezolvare. Din fig. 6.9 se vede că:

$$2l = l_1 + l_2; \quad 2h = h_2 - h_1.$$

Lungimea totală a lănțișorului este

$$2s = s_1 + s_2 = a\left(\operatorname{sh} \frac{l_1}{a} + \operatorname{sh} \frac{l_2}{a}\right).$$

Avem, de asemenea,

$$2h = h_2 - h_1 = a\left(\operatorname{ch} \frac{l_2}{a} - \operatorname{ch} \frac{l_1}{a}\right).$$

Ridicînd la pătrat aceste două relații și scăzînd relația a doua din prima se obține

$$s^2 - h^2 = \frac{a^2}{4}\left(\operatorname{sh}^2 \frac{l_1}{a} + \operatorname{sh}^2 \frac{l_2}{a} + 2 \operatorname{sh} \frac{l_1}{a} \operatorname{sh} \frac{l_2}{a} - \operatorname{ch}^2 \frac{l_1}{a} - \operatorname{ch}^2 \frac{l_2}{a} + \right.$$

$$\left. + 2 \operatorname{ch} \frac{l_2}{a} \operatorname{ch} \frac{l_1}{a}\right) = \frac{a^2}{4}\left(-2 + 2 \operatorname{ch} \frac{l_1 + l_2}{a}\right) = a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{l}{a};$$

Scanned with OKEN Scanner

prin urmare

$$\sqrt{s^2 - h^2} = a \operatorname{sh} \frac{l}{a}.$$

Dezvoltînd în serie $\operatorname{sh} \frac{l}{a}$ și considerînd numai primii doi termeni ai dezvoltării, avem

$$\operatorname{sh} \frac{l}{a} = \frac{l}{a} + \frac{l^3}{6a^3}$$

Rezultă

$$\sqrt{s^2 - h^2} = l + \frac{l^3}{6a^2}$$

de unde se obține

$$a = \frac{l\sqrt{l}}{\sqrt{6(\sqrt{s^2 - h^2} - l)}}.$$

6.10. Cunoscînd că în problemele legate de echilibrul firelor intervin în mod frecvent unele proprietăți geometrice ale lănțișorului, să se determine lungimea arcului de lănțișor, $VB = b$ (fig. 6.10), măsurat de la vîrf pînă într-un punct oarecare $B(x, y)$, lungimea arcului de lănțișor cuprins între punctele de suspensie $A_1(x_1, y_1)$ și $A_2(x_2, y_2)$, precum și coordonatele punctelor de suspensie (T. Redlov, „Fire elastice").

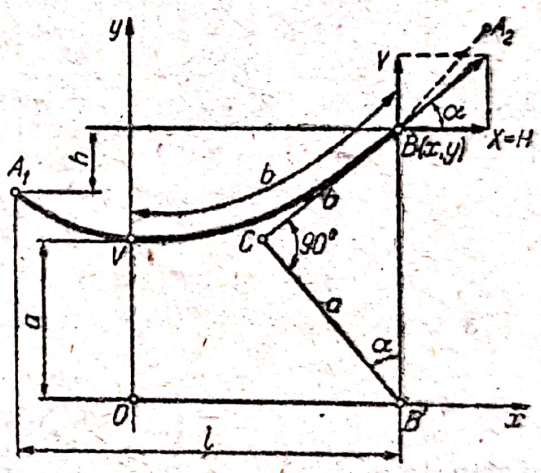


Fig. 6.10

R e z o l v a r e. Ținînd seama de ecuația lănțișorului

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \qquad (a)$$

lungimea arcului, $\overline{VB} = b$, măsurat de la vîrf pînă la un punct oarecare $B(x, y)$ are expresia

$$b = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}. \qquad (b)$$

Din (a) și (b) prin ridicare la pătrat și scădere, se obține

$$y^2 = a^2 + b^2. \qquad (c)$$

Relația (c) ne arată că y este ipotenuza unui triunghi dreptunghic $BB'C$, avînd catetele egale cu a și b. Mărimea unghiului $BB'C$ rezultă din

$$\cos \widehat{BB'C} = \frac{a}{y} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}} = \cos \alpha$$

deoarece $y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\alpha$, α fiind înclinarea tangentei în B la curbă față de Ox; prin urmare

$$\widehat{BB'C} = \alpha. \tag{d}$$

Proprietățile exprimate de relațiile (c) și (d) servesc la construcția tangentei și normalei în B, precum și la rectificarea arcului VB, dacă se cunoaște parametrul lănțișorului.

6.11. Cablul unui funicular este suspendat în două puncte A și B, la niveluri diferite (fig. 6.11). Se cunoaște distanța l pe orizontală dintre punctele de suspensie, diferența de cotă dintre aceste puncte h, greutatea unității de lungime a proiecției cablului pe orizontală p, și tensiunea H. Considerînd curba funiculară parabolă, să se determine ordonatele y_1 și y_2, tensiunile T_A și T_B în punctele de suspensie precum și abscisele a și b ale acestor puncte. Se cere, de asemenea, lungimea cablului.

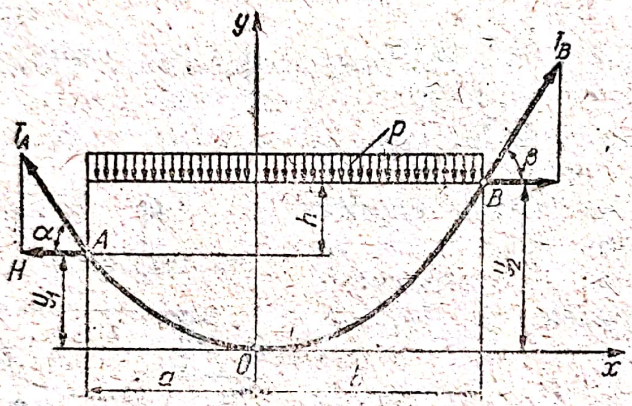


Fig. 6.11

Rezolvare. Se particularizează ecuația parabolei funiculare

$$y = \frac{px^2}{2H}$$

pentru punctele A și B, făcînd $x = -a$ și $y = y_1$; se obține

$$y_1 = \frac{pa^2}{2H}$$

Analog rezultă

$$y_2 = \frac{pb^2}{2H}$$

Observînd că

$$y_2 - y_1 = h;\ a + b = l \tag{a}$$

sau

$$\frac{p}{2H}(b^2 - a^2) = h;\ a + b = l \tag{b}$$

și încă

$$b - a = \frac{2Hh}{lp};\ b + a = l \tag{c}$$

rezultă

$$a = \frac{l}{2} - \frac{pH}{pl};\ b = \frac{l}{2} + \frac{hH}{pl}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se determină tensiunile în punctele de suspensie

$$T_A = \frac{H}{\cos\alpha} = H\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\,;\quad \operatorname{tg}\alpha = y'(-a) = -\frac{pa}{H}\,.$$

$$T_B = \frac{H}{\cos\beta} = H\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}\,;\quad \operatorname{tg}\beta = y'(b) = \frac{pb}{H}\,.$$

Pentru determinarea lungimiii arcului de lănţişor cuprins între punctele de suspensie $A_1(x_1, y_1)$ şi $A_2(x_2, y_2)$ vom utiliza relaţia (b). Notînd cu l deschiderea şi cu h denivelarea firului, se obţine

$$s = b_2 - b_1 = a\left(\operatorname{sh}\frac{x_1+l}{a} - \operatorname{sh}\frac{x_1}{a}\right)$$

sau

$$\frac{s}{a} = 2\operatorname{ch}\frac{2x_1+l}{2a}\operatorname{sh}\frac{l}{2a}\,. \qquad (d)$$

Coordonatele punctelor de suspensie verifică ecuaţia lănţişorului

$$y_1 = a\operatorname{ch}\frac{x_1}{a}\,;\quad y_1 + h = a\operatorname{ch}\frac{x_1+l}{a}$$

de unde

$$h = a\left(\operatorname{ch}\frac{x_1+l}{a} - \operatorname{ch}\frac{x_1}{a}\right)$$

sau

$$\frac{h}{a} = 2\operatorname{sh}\frac{2x_1+l}{2a}\operatorname{sh}\frac{l}{2a}\,. \qquad (e)$$

Abscisa x_1 poate fi eliminată din relaţiile (d) şi (e) făcînd diferenţa pătratelor lor, aşa încît:

$$s = \sqrt{h^2 + 4a^2\operatorname{sh}^2\frac{l}{2a}}\,. \qquad (f)$$

Determinăm coordonatele punctelor de suspensie. Abscisa punctului inferior de suspensie rezultă din relaţia (e)

$$\operatorname{sh}\frac{2x_1+l}{2a} = \frac{h}{2a\operatorname{sh}\dfrac{l}{2a}}$$

sau, ţinînd seama de (f),

$$\operatorname{sh}\frac{2x_1+l}{2a} = \frac{h}{\sqrt{s^2-h^2}}$$

de unde

$$\frac{2x_1+l}{2a} = \operatorname{arg\,sh}\frac{h}{\sqrt{s^2-h^2}} = \frac{l}{2}\ln\frac{s+h}{s-h}$$

deci

$$x_1 = \frac{l}{2}\left(a\ln\frac{s+h}{s-h} - l\right). \qquad (g)$$

În baza relaţiei (f), rezultă că x_1 este funcţie de a, l şi h. Deci

$$T_A = H\sqrt{l + \frac{p^2a^2}{H^2}} = \sqrt{H^2 + p^2a^2}.$$

Analog se obţine

$$T_B = \sqrt{H^2 + p^2b^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Lungimea cablului va fi

$$s = \int_{-a}^{b} \left(l + \frac{y'^2}{2}\right) dx = \int_{-a}^{b} \left(l + \frac{p^2 x^2}{2H^2}\right) dx = l + \frac{p^2}{6H^2}(a^3 + b^3).$$

6.12. Să se stabilească eroarea care se face cînd se calculează cablurile utilizînd ecuaţia parabolei, în loc de a folosi ecuaţia lănţişorului, admiţînd că ambele curbe au acelaşi parametru (fig. 6.12).

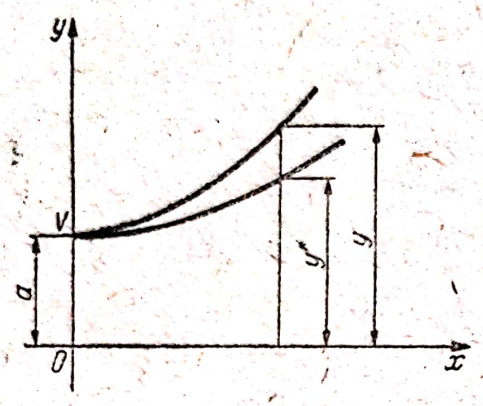


Fig. 6.12

Rezolvare. Ecuaţia desfăşurată în serie a lănţişorului este

$$y = a\left(1 + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^4}{24a^4} + \frac{x^6}{720a^6} + \ldots\right) \quad (a)$$

iar ecuaţia parabolei

$$y^* = a + \frac{x^2}{2a}. \quad (b)$$

Se observă că păstrînd numai primii doi termeni ai seriei (a), se obţine ecuaţia (b) a parabolei. Eroarea relativă.

$$\frac{y - y^*}{y} = \frac{\frac{x^4}{24a^3} + \frac{x^6}{720a^5} + \ldots}{a + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{24a^3} + \frac{x^6}{720a^5} + \ldots} \quad (c)$$

ce se comite asimilînd lănţişorul cu o parabolă, are valorile date în tabelul 6.12.

Tabelul 6.12

$\frac{x}{a}$	$\frac{y}{a}$	$\frac{y^*}{a}$	$\frac{y - y^*}{y}$ %
0,0	1,000 000	1,000 000	0,000
0,1	1,005 004	1,005 000	0,004
0,2	1,020 067	1,020 000	0,065
0,3	1,045 339	1 045 000	0,324
0,4	1,081 072	1,080 000	0,99
0,5	1,128 626	1,125 000	2,33
0,6	1,185 465	1,180 000	4,61
0,7	1,255 169	1,245 000	8,1
0,8	1,337 435	1,320 000	13,0
0,9	1,433 086	1,405 000	19,6
1,0	1,543 081	1,500 000	27,9

Înlocuirea lănţişorului cu o parabolă de acelaşi parametru este admisibilă numai dacă punctele de suspensie nu prezintă denivelări mari şi dacă săgeţile sînt mici în comparaţie cu deschiderea. Asimilarea lănţişorului cu o parabolă de acelaşi parametru are ca urmare o subevaluare a săgeţilor, erorile crescînd cu denivelarea, la o deschidere dată.

Scanned with OKEN Scanner

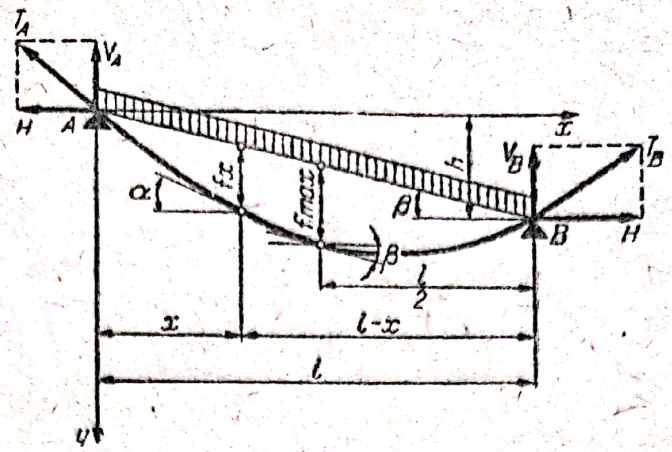


Fig. 6.13

6.13. Să se determine săgeata maximă a unui cablu sub acţiunea greutăţii sale proprii.

Rezolvare. Se utilizează relaţia

$$f_x = \frac{M_x}{H}$$

pentru determinarea săgeţii unui cablu sub acţiunea greutăţii sale proprii, considerată ca sarcină continuă cu intensitatea q; se obţine (fig. 6.13)

$$f_x = \frac{M_x}{H} = \frac{qx(l-x)}{2H\cos\beta}. \qquad (a)$$

Abscisa x a punctului de pe curba funiculară în care săgeata are valoarea maximă se determină din condiţia

$$\frac{df_x}{dx} = \frac{q(l-2x)}{2H\cos\beta} = 0.$$

de unde

$$x = \frac{l}{2}$$

iar săgeata, la mijlocul deschiderii

$$f_m = \frac{ql^2}{8H\cos\beta}. \qquad (b)$$

În baza relaţiilor (a) şi (b), se poate scrie relaţia dintre săgeata maximă şi săgeata într-un punct de abscisă x de pe curba funiculară sub forma

$$\frac{f_x}{f_m} = 4\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Valorile raportului f_x/f_m se dau în tabelul 6.13.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 6.13

Valorile raportului $\frac{f_x}{f_m}$ după parabolă

$\frac{x}{l}$	$\frac{f_x}{f_m}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{f_x}{f_m}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{f_x}{f_m}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{f_x}{f_m}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{f_x}{f_m}$
0,01	0,036	0,11	0,391	0,21	0,664	0,31	0,856	0,41	0,967
0,02	0,78	0,12	0,423	0,22	0,685	0,32	0,870	0,42	0,975
0,03	0,115	0,13	0,452	0,23	0,707	0,33	0,885	0,43	0,980
0,04	0,154	0,14	0,481	0,24	0,729	0,34	0,898	0,44	0,985
0,05	0,190	0,15	0,510	0,25	0,750	0,35	0,910	0,45	0,990
0,06	0,226	0,16	0,537	0,26	0,770	0,36	0,922	0,46	0,994
0,07	0,260	0,17	0,564	0,27	0,788	0,37	0,932	0,47	0,996
0,08	0,294	0,18	0,580	0,28	0,806	0,38	0,942	0,48	0,998
0,09	0,327	0,19	0,615	0,29	0,824	0,38	0,951	0,49	0,999
0,10	0,360	0,20	0,640	0,30	0,840	0,40	0,960	0,50	1,000

6.14. Să se stabilească ecuația generală a săgeții arcului purtător.

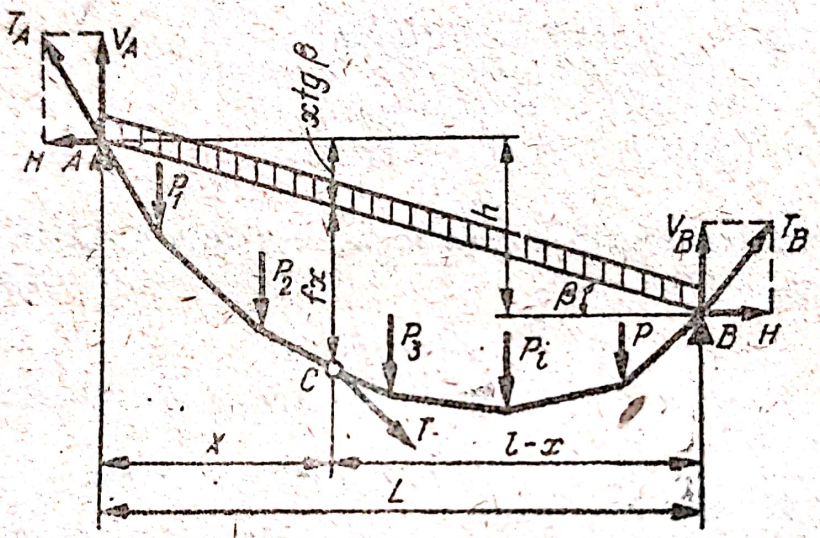


Fig. 6.14

Rezolvare. Fie un cablu suspendat în două puncte de reazem, încărcat coplanar cu o sarcină repartizată uniform pe coardă și sarcini concentrate paralele. Dacă se asociază arcului curbei funiculare o grindă dreaptă, simplu rezemată la capetele de deschidere și încărcată ca și curba funiculară, se poate stabili o analogie între curba funiculară și momentul încovoietor al grinzii.

Folosind notațiile din fig. 6.14, se determină reacțiunile din punctele de reazem ale cablului, V_A și V_B. În baza condițiilor de echilibru ale cablului se poate scrie

$$\begin{aligned} M_{(A)} = 0: \quad & M_A^q + V_B l - Hh = 0 \\ M_{(B)} = 0: \quad & -M_B^q + V_B l - H \cdot h = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

în care M_A^q și M_B^q sînt momentele față de reazemele A și B ale forțelor verticale. Avînd în vedere că $\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{l}$ și că $\frac{M_A^q}{l}$ și $\frac{M_B^q}{l}$ sînt reacțiunile

Scanned with OKEN Scanner

din punctele de reazem ale grinzii simplu rezemate asociate curbei funiculare, se obţine relaţia

$$V = V^q + H \operatorname{tg} \beta \qquad (b)$$

în care V este reacţiunea în punctele de reazem ale cablului; V^q — reacţiunea în punctele de reazem ale grinzii simplu rezemate asociate curbei funiculare; H — componenta orizontală a efortului în cablu.

Semnul (+) se ia pentru reacţiunea reazemului superior, iar semnul (—) pentru reacţiunea reazemului inferior.

Săgeata f_x a cablului se obţine din condiţia de echilibru a segmentului de cablu AC faţă de punctul C

$$M_{(C)} = 0: \quad V_A x - H(f_x + x \operatorname{tg} \beta) - M_C^q = 0,$$

în care M_C^q este momentul faţă de punctul C al forţelor verticale care acţionează asupra segmentului AC.

Ţinînd seama că $V_A = V_A^q + H \operatorname{tg} \beta$, se obţine

$$f_x = \frac{xV_A^q - M_C^q}{H}.$$

Numărătorul acestei fracţii reprezintă momentul de încovoiere M_x al grinzii drepte simplu asociate cablului. Prin urmare, săgeata cablului este egală cu raportul dintre momentul grinzii asociate cablului şi componenta orizontală a efortului din cablu

$$f_x = \frac{M_x}{H} \qquad (c)$$

Componenta orizontală H a efortului din cablu, în cazul încărcării acestuia cu sarcini verticale coplanare este constantă pentru toate secţiunile deschiderii.

6.15. Un cablu de funicular, de greutate $p = 7{,}2$ daN/m, este montat pe cinci piloni, avînd deschiderile succesive egale cu 473; 755; 345; 552 m şi denivelările respective de 246; 423; 214 şi 287 m (fig. 6.15). Cablul este ancorat la extremitatea superioară şi întins cu greutatea $G = 100$ kN la extremitatea inferioară. Să se determine eforturile din cablu, pantele tangentelor la curba funiculară în dreptul pilonilor şi săgeţile celor patru cîmpuri, neglijînd frecările. Ce valori iau săgeţile în cazul cînd G se reduce la 80 kN (T. Redlov, „Fire elastice").

Rezolvare. Cunoscînd că, în ipoteza curbei funiculare lănţişor, tensiunea într-un punct al lănţişorului este proporţională cu ordonata lănţişorului, factorul de proporţionalitate fiind greutatea unităţii de lungime de fir, adică

$$T = py$$

eforturile din cablu au în dreptul pilonilor valorile:

Cîmpul I ..., $T_1 = py_1 = G = 100$ kN; $T_{2\cdot st} = p(y_1 + h) = 117{,}71$ kN
Cîmpul II ..., $T_{2\cdot dr} = 117{,}71$ kN; $T_{3\cdot st} = 148{,}17$ kN
Cîmpul III ..., $T_{3\cdot dr} = 148{,}17$ kN; $T_{4\cdot st} = 163{,}58$ kN
Cîmpul IV ..., $T_{4\cdot dr} = 163{,}58$ kN; $T_5 = 184{,}24$ kN.

Scanned with OKEN Scanner

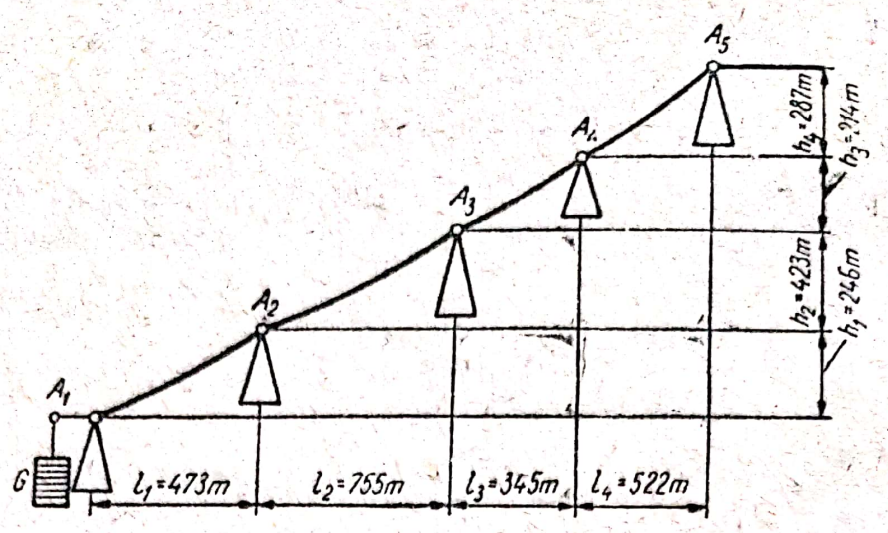


Fig. 6.15

Ordonatele punctelor superioare de suspensie din cele patru cîmpuri au valorile

$$y_{2\cdot st} = 11771 : 7{,}2 = 1635 \text{ m}; \quad y_{3\cdot st} = 14817 : 7{,}2 = 2058 \text{ m}$$

$$y_{4\cdot st} = 16358 : 7{,}2 = 2272 \text{ m}; \quad y_{5\cdot st} = 18424 : 7{,}2 = 2559 \text{ m}.$$

Schimbînd în fiecare cîmp unitatea de măsură pentru lungimi, astfel încît fiecare deschidere să fie egală cu 100 unităţi de lungimi, se obţin cu ajutorul nomogramelor 3 parametri de lănţişor, după cum urmează (a se vedea nomogramele anexe ale lucrării „Fire elastice" de T. Redlov):

Cîmpul I ..., $l = 473 : 4{,}73 = 100\ U_0$, $h = 246 : 4{,}73 = 52\ U_0$,

$$a_1 = 270{,}2\ U_0$$

$$y_2 = 1635 : 4{,}73 = 346\ U_0,$$

Cîmpul II, ..., $l = 755 : 7{,}55 = 100\ U_0$, $h = 423 : 7{,}55 = 56\ U_0$,

$$a_2 = 207{,}2 U_0,$$

$$y_2 = 2058 : 7{,}55 = 272\ U_0,$$

Cîmpul III, ..., $l = 345 : 3{,}45 = 100\ U_0$, $h = 214 : 3{,}45 = 62 U_0$,

$$y_2 = 2272 : 3{,}45 = 658 U_0, \quad a_3 = 531{,}5\ U_0;$$

Cîmpul IV, ..., $l = 622 : 5{,}22 = 100 U_0$, $h = 285 : 5{,}22 = 490 U_0$,

$$a_3 = 402{,}0\ U_0.$$

Nomogramele 5 dau valorile săgeţilor în funcţie de a şi b. Revenind la sistemul metric, rezultă:

$$f_1 = 5{,}06 \cdot 4{,}73 = 23{,}92 \text{ m}; \quad f_2 = 6{,}94 \cdot 7{,}55 = 52{,}40 \text{ m}$$

$$f_3 = 2{,}77 \cdot 3{,}45 = 9{,}54 \text{ m}; \quad f_4 = 3{,}55 \cdot 5{,}22 = 18{,}53 \text{ m}.$$

Din nomogramele 6 şi 7 se extrag, cunoscînd a şi h, pantele tangentelor la axa cablului în dreptul pilonilor:

Scanned with OKEN Scanner

Cîmpul I ..., $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}322 \ldots \alpha_1 = 17°51'$.

$\operatorname{tg} \alpha_{2\cdot st} = 0{,}730 \ldots \alpha_{2\cdot st} = 36°08'$

Cîmpul II, ..., $\operatorname{tg} \alpha_{2\cdot dr} = 0{,}291 \ldots \alpha_{2\cdot dr} = 16°13'$

$\operatorname{tg} \alpha_{3\cdot st} = 0{,}847 \ldots \alpha_{3\cdot st} = 40°16'$

Cîmpul III ..., $\operatorname{tg} \alpha_{3\cdot dr} = 0{,}511 \ldots \alpha_{3\cdot dr} = 27°04'$

$\operatorname{tg} \alpha_{4,st} = 0{,}733 \ldots \alpha_{4\cdot st} = 36°14'$

Cîmpul IV ..., $\operatorname{tg} \alpha_{4\cdot dr} = 0{,}412 \ldots \alpha_{4\cdot dr} = 22°24'$

$\operatorname{tg} \alpha_5 = 0{,}695 \ldots \alpha_5 = 34°48'$

Pentru $G = 80$ kN rezultă:

$$f_1' = 6{,}250 \cdot 4{,}73 = 29{,}56 \text{ m}; \quad f_2' = 8{,}225 \cdot 7{,}55 = 62{,}10 \text{ m}$$

$$f_3' = 3{,}185 \cdot 3{,}45 = 10{,}99 \text{ m}; \quad f_4' = 4{,}025 \cdot 5{,}22 = 21{,}01 \text{ m}.$$

Micşorarea greutăţii de întindere cu 20% atrage după sine mărirea săgeţilor pentru cele patru cîmpuri succesive cu 23,6%, 18,5%, 15,0% şi 13,4%. (Aceste sporuri se micşorează cu creşterea numărului de ordine ale deschiderii, din cauză că p rămîne invariabil).

6.16. Să se determine componenta orizontală H a efortului din cablu, în conformitate cu notaţia din fig. 6.16.

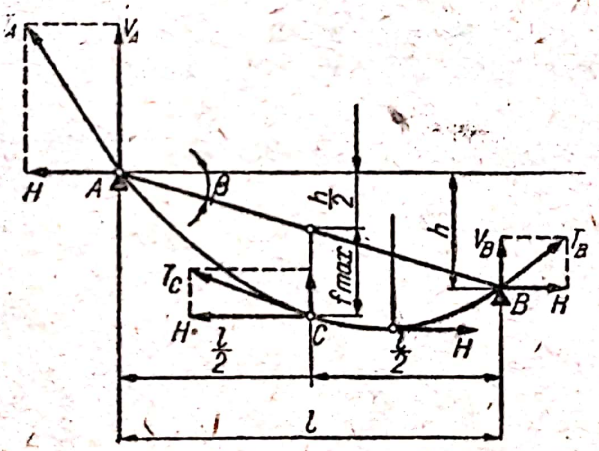


Fig. 6.16

Rezolvare. Din figură se observă că

$$H = T_C \cos \beta. \tag{a}$$

Utilizînd legea de bază a firelor perfect flexibile, efortul T_C se poate exprima în funcţie de eforturile în punctele de reazem prin relaţiile

$$T_C = T_A + q\left(\frac{h}{2} + f_m\right) = T_A - \frac{ql \operatorname{tg} \beta}{2} - qf_m$$

$$T_C = T_B + q\left(\frac{h}{2} - f_m\right) = T_B + \frac{ql \operatorname{tg} \beta}{2} - qf_m$$

de unde prin însumare

$$T_C = \frac{T_A + T_B}{2} - qf_m = T_m - qf_m. \tag{b}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în relaţia (a) valoarea efortului T_C din (b), rezultă

$$H = (T_m - qf_m)\cos\beta \qquad (c)$$

în care $T_m = \frac{T_A + T_B}{2}$ este efortul mediu din cablu. Dacă în relaţia (c) se înlocuieşte valoarea săgeţii f_m prin $f_m = \frac{ql^2}{8H\cos\beta}$, se obţine

$$H = T_A \cos\beta\left(1 - \frac{q^2l^2}{8T_m^2\cos^2\beta}\right). \qquad (d)$$

Pentru aplicaţiile practice, în majoritatea cazurilor poate fi neglijat termenul qf_m a cărui valoare este mică. În acest caz, efortul mediu din cablul purtător poate fi determinat prin relaţia

$$T_m \cong T_A - \frac{ql\,\mathrm{tg}\,\beta}{2} = T_B + \frac{ql\,\mathrm{tg}\,\beta}{2} \qquad (e)$$

iar componenta orizontală a efortului din cablu, cu relaţia

$$H \simeq T_m \cos\beta. \qquad (f)$$

6.17. Un cablu este suspendat în două puncte A şi B, asupra căruia mai acţionează forţa concentrată P, în punctul C (fig. 6.17). Cotele fiind date în figură, se pune problema determinării tensiunilor în punctele de suspensie.

R e z o l v a r e. Se asimilează cu arce de parabolă porţiunile de cablu AC şi BC. Parabola AC va avea axele x_1 şi y_1, iar parabola BC, x_2 şi y_2. Ecuaţiile celor două parabole sînt respectiv:

$$y_1 = \frac{p}{2H}x_1^2 + C_1x_1$$
$$y_2 = \frac{p}{2H}x_2^2 + C_2x_2 \qquad (a)$$

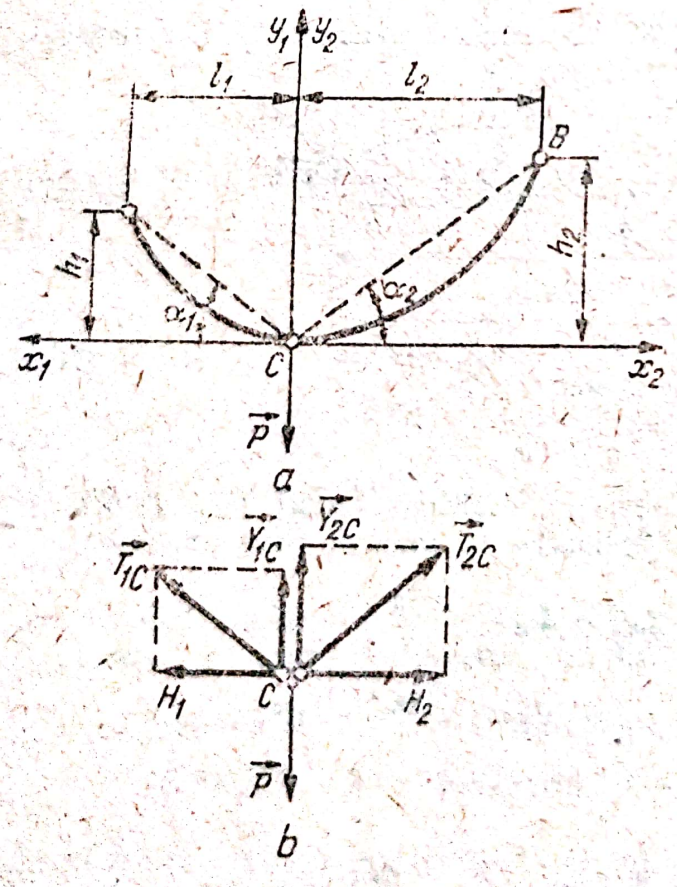


Fig. 6.17

C_1 şi C_2 fiind două constante. Punînd condiţia ca parabolele să treacă prin punctele de suspensie A şi B, se obţine

$$h_1 = \frac{pl_1^2}{2H} + C_1l_1;$$
$$h_2 = \frac{pl_2^2}{2H} + C_2l_2.$$

Rezultă expresiile constantelor C_1 şi C_2

$$C_1 = \frac{h_1}{l_1} - \frac{pl_1}{2H};$$
$$C_2 = \frac{h_2}{l_2} - \frac{pl_2}{2H}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația generală a componentei verticale a tensiunii din fir este

$$V = H\frac{dy}{dx} = px + CH.$$

În punctul C, $x = 0$; componentele verticale ale tensiunii, V, pentru partea stîngă, respectiv partea dreaptă a punctului C sînt

$$V_{1C} = C_1 H = \frac{h_1}{l_1} H - \frac{pl_1}{2}$$

$$V_{2C} = C_2 H = \frac{h_2}{l_2} - \frac{pl_2}{2}.$$

Scriind ecuațiile de proiecții pe axele de coordonate ale forțelor din punctul C, se obține

$$\begin{aligned} \Sigma X_i = 0: &\quad -H_1 + H_2 = 0 \\ \Sigma Y_i = 0: &\quad V_{1C} + V_{2C} - P = 0 \end{aligned} \qquad (b)$$

Rezultă

$$H_1 = H_2 = H \text{ și } H\left(\frac{h_1}{l_1} + \frac{h_2}{l_2}\right) - \frac{p}{2}(l_1 + l_2) - P = 0$$

de unde se deduce

$$H = \frac{P + \frac{p}{2}(l_1 + l_2)}{\frac{h_1}{l_1} + \frac{h_2}{l_2}} = \frac{P + \frac{p}{2}(l_1 + l_2)}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Componentele verticale ale tensiunilor din punctele A și B se determină prin particularizarea relației

$$V = H\frac{dy}{dx}.$$

Se obține

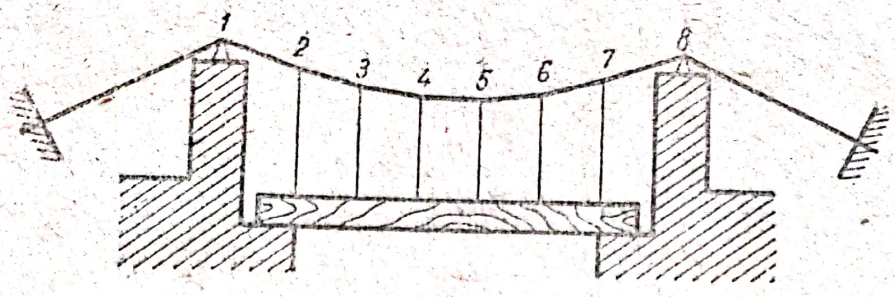
$$V_A = \frac{pl_1}{2} + \frac{h_1}{l_1} H; \quad V_B = \frac{pl_2}{2} + \frac{h_2}{l_2} H. \qquad (c)$$

Tensiunile în punctele de suspensie sînt

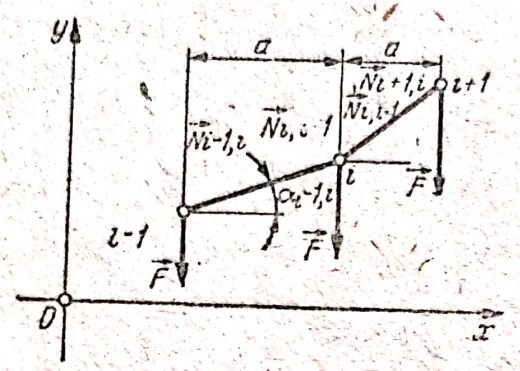
$$\left.\begin{aligned} T_A = \sqrt{H^2 + V_A^2} &= \sqrt{\left[\frac{P + \frac{p}{2}(l_1 + l_2)}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}\right]^2 + \left[\frac{pl_1}{2} + \frac{h_1}{l_1} \cdot \frac{P + \frac{p}{2}(l_1 + l_2)}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}\right]^2} \\ T_B = \sqrt{H^2 + V_B^2} &= \sqrt{\left[\frac{P + \frac{p}{2}(l_1 + l_2)}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}\right]^2 + \left[\frac{pl_2}{2} + \frac{h_2}{l_2} \cdot \frac{P + \frac{p}{2}(l_1 + l_2)}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}\right]^2} \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

6.18. Se consideră podul suspendat din fig. 6.18, a, format dintr-un cablu ancorat la extremități și acționat de forțe concentrate, paralele, egale, echidistanțate și de același sens. Se cere să se stabilească ecuația cablului.

Scanned with OKEN Scanner



a



b

Fig. 6.18

R e z o l v a r e. Considerînd o porţiune dintr-un fir încărcat cu forţe concentrate vertical şi echidistanţate (fig. 6.18, b), coordonatele unui punct i sînt:

$$x_i = a(i-1); \tag{a}$$

$$y_i = a(\operatorname{tg}\alpha_{1,2} + \operatorname{tg}\alpha_{2,3} + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_{i-1,i}) \tag{b}$$

unde a este distanţa dintre suporţii forţelor.

Pentru a se obţine expresiile tangentelor se folosesc ecuaţiile de echilibru ale sistemului de forţe

$$\{\mathbf{F},\ \mathbf{N}_{i,i-1},\ \mathbf{N}_{i,i+1}\}$$

aplicate punctului i (fig. 6.18, b).

Ecuaţia de proiecţii pe direcţia axei Ox va fi

$$N_{i,i-1}\cos\alpha_{i-1,i} = N_{i,i+1}\cos\alpha_{i,i+1} = H \tag{c}$$

H reprezentînd proiecţia pe orizontală a eforturilor pe diferite porţiuni ale firului.

Ecuaţia de proiecţii pe axa Oy se scrie

$$-N_{i,i-1}\sin\alpha_{i-1,i} + N_{i,i-1}\sin\alpha_{i,i+1} = F \tag{d}$$

Din (c) rezultă

$$N_{i-1,i} = \frac{H}{\cos\alpha_{i-1,i}};\quad N_{i,i+1} = \frac{H}{\cos\alpha_{i,i+1}}. \tag{e}$$

Substituind expresiile (e) în (d), se obţine relaţia

$$\operatorname{tg}\alpha_{i,i+1} - \operatorname{tg}\alpha_{i-1,i} = \frac{F}{H} = k \tag{f}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde k este o constantă. Scriind ecuații de forma (f) pentru fiecare nod, de la nodul 2 la nodul $i-1$, se obține

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}\alpha_{2,3} - \operatorname{tg}\alpha_{1,2} = k \\ &\operatorname{tg}\alpha_{3,4} - \operatorname{tg}\alpha_{2,3} = k \\ &\operatorname{tg}\alpha_{4,5} - \operatorname{tg}\alpha_{3,4} = k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\operatorname{tg}\alpha_{i-1,i} - \operatorname{tg}\alpha_{i-2,i-1} = k. \end{aligned} \tag{g}$$

Însumînd relațiile (g), se obține

$$\operatorname{tg}\alpha_{i-1,i} = \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + k(i-2). \tag{h}$$

Pe baza acestei ecuații, se poate scrie:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}\alpha_{2,3} = \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + k; \\ &\operatorname{tg}\alpha_{3,4} = \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + 2k; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\operatorname{tg}\alpha_{i-1,i} = \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + (i-2)k. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$y_i = a\{(i-1)\operatorname{tg}\alpha_{1,2} + [1 + 2 + \ldots + (i-2)k]\}$$

sau

$$y_i = a\left[(i-1)\operatorname{tg}\alpha_{1,2} + \frac{(i-1)(i-2)}{2}k\right]. \tag{i}$$

Eliminînd i între ecuațiile (a) și (i), se obține

$$a_i = x_i \operatorname{tg}\alpha_{1,2} + \frac{k}{2}x_i\left(\frac{x_i}{a} - 1\right);$$

deci cablul încărcat cu forțe concentrate verticale, egale și echidistanțate se va înscrie într-o parabolă a cărei ecuație este:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha_{1,2} + \frac{k}{2}\left(\frac{x}{a} - 1\right)x. \tag{j}$$

C. PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

6.19. Care trebuie să fie legea de variație a greutății unității de lungime de cablu, pentru ca forma lui să fie un semicerc, ca în fig. 6.19. Care este tensiunea într-un punct M al firului?

R. $q_M = \dfrac{q_0}{\cos^2\varphi}$; $T_M = \dfrac{q_0 \cdot r}{\cos\varphi}$

6.20. De punctele A și B este suspendat un cablu, a cărui greutate este $q = 4$ daN/m (fig. 6.20). Să se determine distanța x la care trebuie așezat discul D, în condiția ca $f_2 = 2f_1 = l/100$. Punctele A, D și B se găsesc pe aceeași orizontală.

R. 16,56 m.

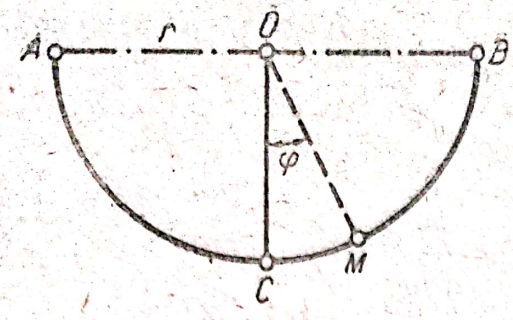


Fig. 6.19

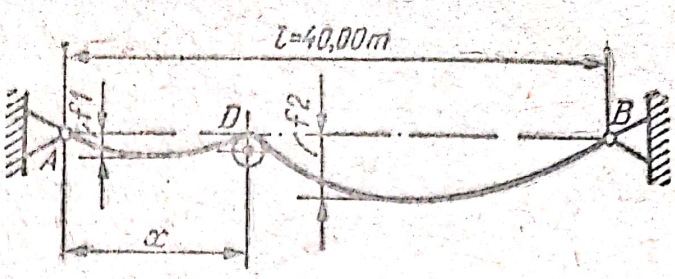


Fig. 6.20

6.21. Un cablu avînd greutatea 4 daN/m este suspendat în două puncte A și B, ca în fig. 6.21, și trece prin punctul C, unde tangenta la curbă este orizontală. Se cere să se determine tensiunea în punctul B, în ipoteza că se asimilează curba după care se așază cablul cu o parabolă.

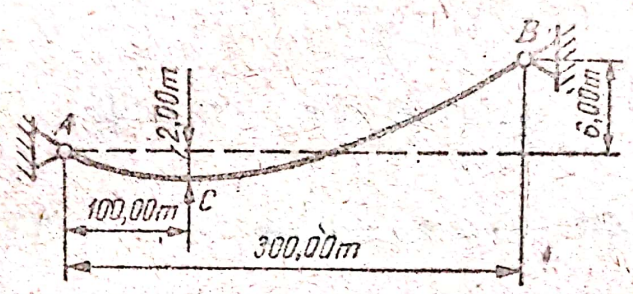


Fig. 6.21

R. $T_B = \sqrt{10\,000^2 + 800^2} \simeq 10031{,}95$ daN.

6.22. Un cablu este suspendat în două puncte A și B situate pe aceeași orizontală. Sub acțiunea încărcării repartizată pe orizontală, cablul ia forma de echilibru dată de ecuația

$$y = h \cos \frac{\pi x}{2b}.$$

Să se determine legea de variație a încărcării.

R. $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2b}$

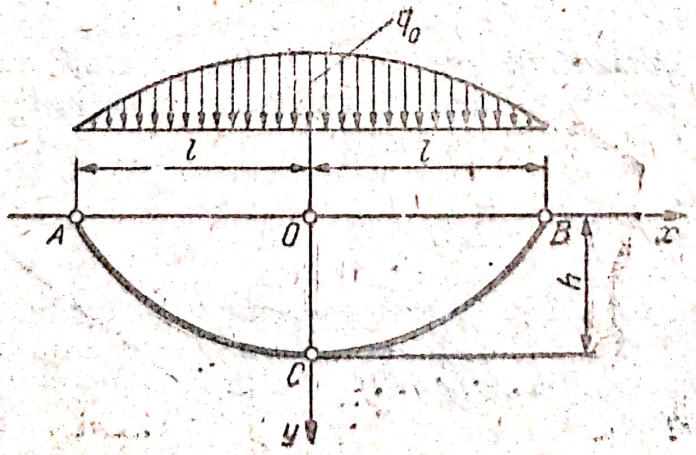


Fig. 6.22

6.23. Un cablu de greutate p[daN/m], este legat ca în fig. 6.23, în punctul A, înfăşurat pe jumătatea superioară a unui cilindru şi atîrnă cu o lungime a. Se cer tensiunile în punctele A, B şi C.

R. $T_C = pa$; $T_B = p(r + a)$; $T_A = pa$.

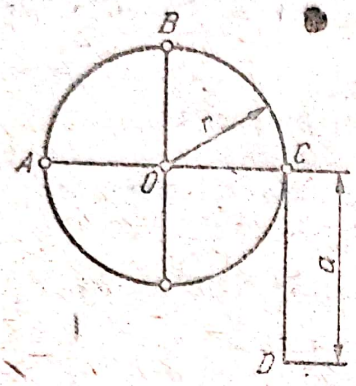


Fig. 6.23

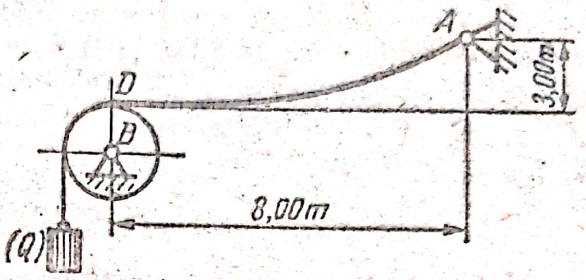


Fig. 6.24

6.24. Un cablu este suspendat într-un punct A şi trecut peste o rolă B, ca în fig. 6.24. La capătul liber al cablului este legată o sarcină Q. Cunoscînd greutatea unităţii de lungime de cablu $p = 5$[daN/m] şi că în D cablul este tangent la rolă, să se determine reacţiunile din punctele A şi B.

R. $R_A = 70$ daN; $R_B = 78{,}6$ daN.

6.25. Să se determine săgeata unui cablu suspendat în două puncte de nivel, astfel încît efortul în punctul de suspensie să fie minim.

Indicaţie. Se consideră parametrul „a" variabil şi se calculează derivata efortului în punctul de suspensie în raport cu parametrul a şi apoi se anulează derivata. În urma efectuării calculelor, se obţine $l/2a \simeq 1{,}20$. Săgeata este egală în acest caz cu

$$f = a\left(\operatorname{ch}\frac{l}{2a} - 1\right) \cong 0{,}338\, l.$$

6.26. Un cablu greu omogen, de lungime $2s$ este suspendat la extremităţi în două puncte A şi B, situate pe aceeaşi orizontală. Unghiul dintre tangenta în punctul B şi orizontală este de 45°. Se cere să se determine săgeata cablului.

R. $f = (\sqrt{2} - 1)\, s$.

6.27. Un cablu omogen este trecut peste doi scripeţi mici ideali, situaţi la acelaşi nivel. În acest fel, extremităţile firului atîrnă liber. Se cere să se determine lungimea minimă a cablului, pentru care este posibil echilibrul.

R. $s = a \cdot e$, unde e este baza logaritmilor naturali.

6.28. Un cablu greu, neomogen, este suspendat în două puncte. Să se deducă următoarea formulă pentru raza de curbură a cablului

$$\rho = \frac{T^2}{\gamma g H}.$$

Scanned with OKEN Scanner

unde T este tensiunea într-un punct dat al cablului, γ — densitatea liniară a cablului în același punct, iar H — tensiunea în punctul cel mai de jos al cablului.

6.29. Un cablu are sarcina p uniform distribuită pe orizontală (fig. 6.29). Cunoscînd valorile: p, f_1, f_2 și l, să se demonstreze că valoarea minimă H a tensiunii cablului este dată de relația:

$$H = \frac{4p \cdot l^2}{(f_2 - f_1)^2}\left(\frac{f_1 + f_2}{2} \pm \sqrt{f_1 \cdot f_2}\right)$$

De asemenea, să se determine tensiunile în punctele de suspensie

R. $T_A = T_B = \frac{p \cdot l^2}{2f}\sqrt{1 + 4\frac{f^2}{l^2}}$

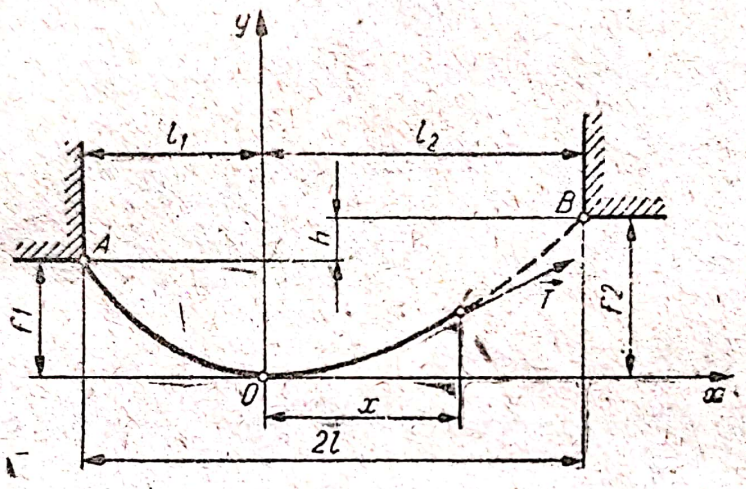


Fig. 6.29

6.30. Un cablu neomogen, aflat în echilibru în cîmpul forței de gravitație are forma unei cicloide, exprimată prin ecuațiile

$$x = R(\theta + \sin\theta)$$
$$y = R(1 - \cos\theta)$$

axa y avînd direcția verticală. Să se afle legea variației densității de-a lungul cablului, cunoscînd densitatea în punctul cel mai de jos γ_0.

R. $\gamma = \gamma_0\left[1 - \left(\frac{s}{4R}\right)^2\right]^{-3/2}$

s fiind lungimea arcului de cicloidă, calculată de la punctul cel mai de jos.

6.31. Un cablu neomogen cu greutatea specifică variabilă, se află în echilibru în cîmpul forței de gravitație. Variația densității de-a lungul cablului este dată de ecuația $\gamma = f(s)$, unde s este arcul cablului. Să se arate, că ecuația diferențială a figurii de echilibru a cablului, se poate prezenta sub forma

$$\frac{dp}{ds} = Af(s)$$

în care $A = \text{const.}$, iar $p = dy/dx$.

Scanned with OKEN Scanner

6.32. Un cablu greu, omogen, de lungime s, este suspendat cu extremităţile sale de o bară fixă orizontală, prin intermediul a două inele mici, care pot aluneca, cu frecare, pe bară. Cunoscînd unghiul de frecare φ, să se determine distanţa (d) între inelele pentru care este posibil echilibrul.

R. $d \leqslant s \operatorname{tg} \varphi \ln\left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right)$.

6.33. Un lanţ omogen, de greutate Q este atîrnat în două puncte A şi B. Tensiunea lanţului în punctul cel mai de jos C are valoarea dată H. Porţiunea AC a lanţului are lungimea s_1, iar porţiunea CB — lungimea s_2. Să se determine coordonatele punctelor A şi B, presupunînd că axa y trece prin punctul C, iar axa x coincide cu baza lănţişorului ACB.

R. $$X_A = \frac{H(s_1+s_2)}{Q} \ln \frac{\sqrt{s_1^2Q^2 + (s_1+s_2)^2H^2} - s_1Q}{H(s_1+s_2)}$$

$$Y_A = \sqrt{s_1^2 + \frac{H^2(s_1+s_2)^2}{Q^2}}$$

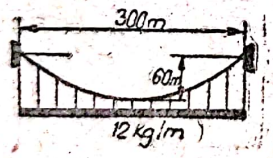
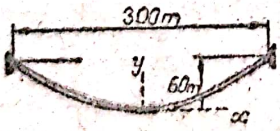
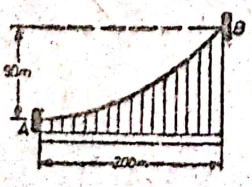
$$X_B = \frac{H(s_1+s_2)}{Q} \ln \frac{\sqrt{s_2^2Q^2 + (s_1+s_2)^2H^2} + s_2Q}{H(s_1+s_2)}$$

$$Y_B = \sqrt{s_2^2 + \frac{H^2(s_1+s_2)^2}{Q^2}}.$$

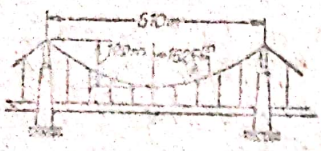
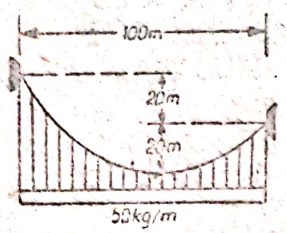
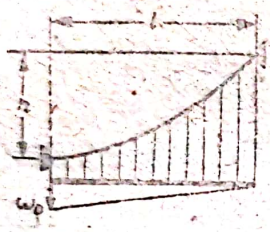
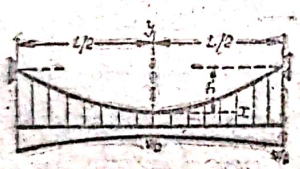
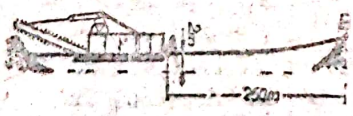
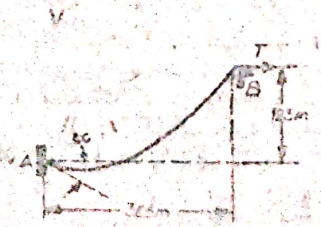
6.34. Să se rezolve problemele recapitulative din tabelul 6.34.

Tabelul 6.34

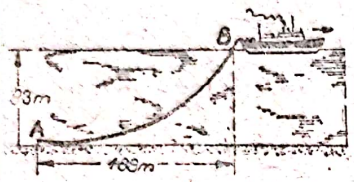
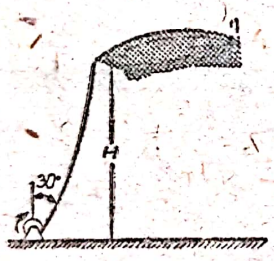
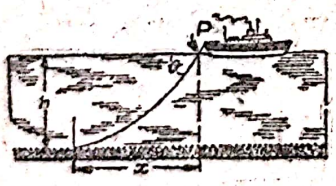
Probleme recapitulative [26]

Nr. crt.	Figura	Se cunoaşte	Să se determine
0	1	2	3
1		Un cablu de greutate neglijabilă suportă o încărcare de 12 kg/m distribuită pe direcţia orizontală. Cablul este suspendat în două puncte la acelaşi nivel, avînd deschiderea de 300 m şi săgeata de 60 m.	Efectul minim T_0 care se dezvoltă la mijlocul cablului, efortul maxim T_{max} şi lungimea totală a cablului. R. $T_0 = 22{,}07$ kN $T_{max} = 28{,}27$ kN $s = 329$ m.
2		Un cablu omogen, avînd masa de 12 kg/m este solicitat numai de către greutatea proprie. Cablul este suspendat în două puncte la acelaşi nivel, avînd deschiderea de 300 m şi săgeata de 60 m.	Efortul minim T_0 care se dezvoltă la mjlocul cablului, efortul maxim T_{max} şi lungimea totală a cablului. R. $T_0 = 23{,}2$ kN $T_{max} = 30{,}2$ kN $s = 330$ m.
3		Cablul de la A la B susţine o sarcină de 80 Mg distribuită uniform pe orizontală. Greutatea proprie a cablului este neglijabilă în comparaţie cu sarcina suspendată.	Efortul maxim din cablu dacă componenta verticală a efortului din A este nulă. R. $T_{max} = 1173$ kN.

Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
4		Efortul măsurat în punctul A de pe cablul de suspendare al podului este $T = 1{,}78 \cdot 10^6$ N	Sarcina pe metru liniar q din lungimea podului, neglijînd greutatea proprie a cablului. R. $q = 4{,}3$ kN/m.
5		Un cablu este solicitat cu o sarcină de 50 kg/m, uniform distribuită pe orizontală, fiind suspendat în cele două puncte indicate în figură.	Efortul maxim T și efortul minim T_0 din cablu. R. $T = 35{,}61$ kN $T_0 = 21{,}04$ kN.
6		Un cablu, de masă neglijabilă, suspendat în două puncte fixe ca în figură, suportă o încărcare uniformă w, care descreşte uniform cu x de la w_0 la zero, ca în figură.	Ecuaţia curbei care reprezintă forma de echilibru a cablului. R. $y = \frac{3hx^2}{2l^2}\left(1 - \frac{x}{3l}\right)$.
7		Un cablu de greutate neglijabilă este suspendat în două puncte aflate pe orizontală, la distanţa L unul de celălalt. Încărcarea pe orizontală a cablului variază de la w_0 la centru, pînă la w_1 la extremităţi, conform expresiei $w = a + bx^2$.	Expresia săgeţii maxime h în funcţie de efortul la mijlocul cablului T_0. R. $h = \frac{L^2}{48T_0}(5w_0 + w_1)$.
8		O dragă plutitoare este ancorată cu un (singur) cablu cu masa 22 kg/m, legat la pupă în A şi fixat pe mal în B (la 250 m pe orizontală). În punctul A cablul are direcţia orizontală şi (este necesar să se dezvolte)un efort de 300 kN (cablul are o masă de 22 kg/m).	Înălţimea necesară de ancorare H şi lungimea cablului între punctele A şi B. R. $H = 24{,}5$ m; $s = 251$ m.
9		Un cablu flexibil este fixat în punctul A şi trece peste un scripete, de dimensiuni neglijabile, situat în B la 123 m mai sus decît A.	Greutatea pe unitatea de lungime μ a cablului, dacă este necesar un efort $T = 534$ kN în B pentru a face ca să fie zero în A. R. $\mu = 92{,}5$ N/m.

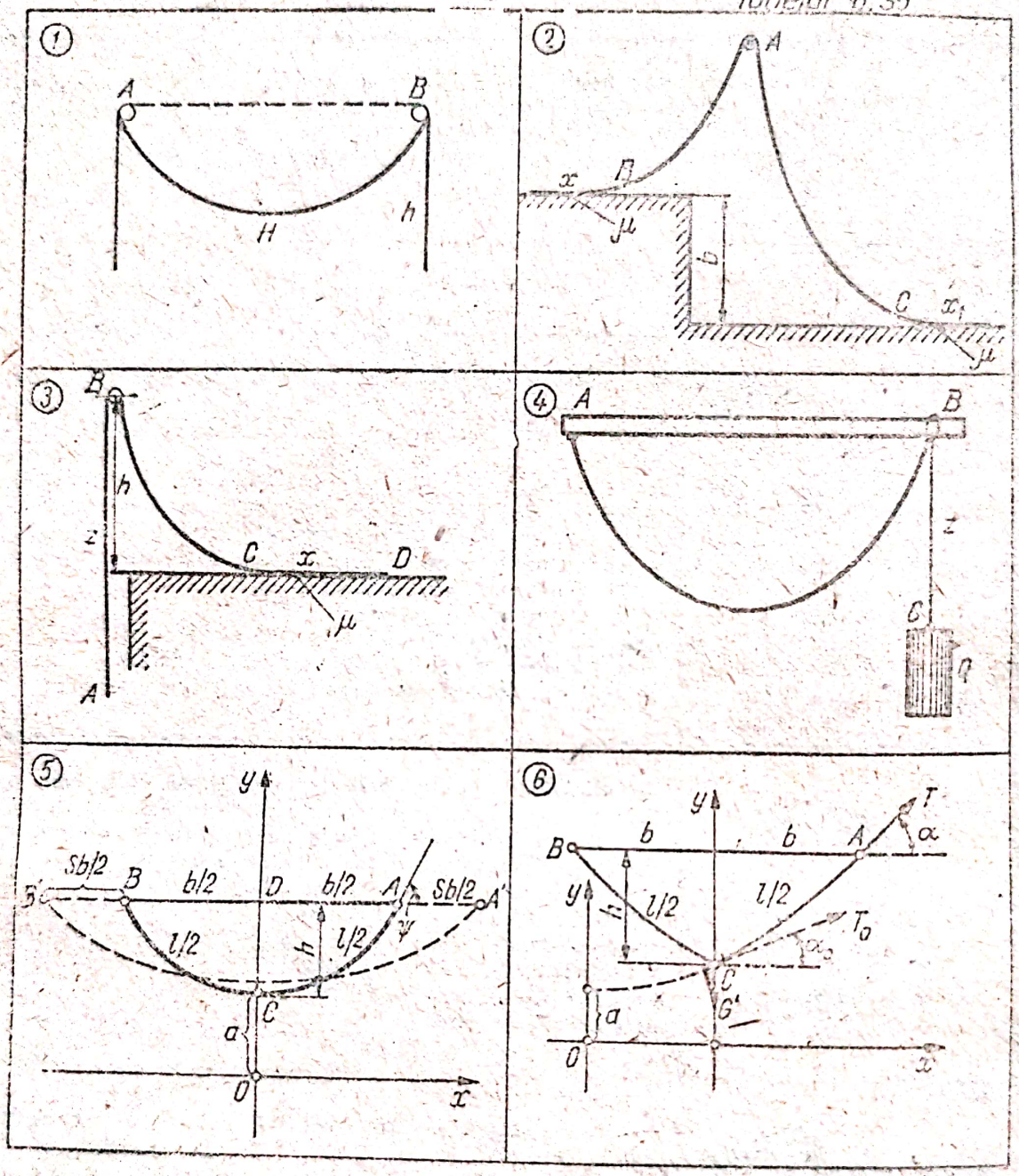
Scanned with OKEN Scanner

0	1	2	3
10		O frînghie de 40 m lungime este suspendată între două puncte, aflate pe orizontală, la 10 m distanță unul de celălalt.	Distanța h pînă la punctul cel mai de jos al buclei. R. $h = 18{,}5$ m.
11		Un vapor tractează, cu un cablu, un plug A pe fundul mării pentru executarea canalului în care se așează firele telefonice. Cablul are o lungime suficientă, astfel ca în A să fie orizontal. Greutatea pe metru liniar a cablului este de 45 N/m luînd în considerare și capacitatea de plutire a acestuia. Plugul se află la adîncimea de 183 și la 488 m de punctul B de pe vapor.	Forța orizontală T_0, aplicată plugului și efortul maxim din cablu, neglijînd rezistentele la înaintarea cablului la viteze mici. Determinați și lungimea cablului de remorcare între punctele A și B. R. $T_0 = 30{,}7$ kN $T_{max} = 39$ kN $s = 531$ m.
12		Un dirijabil este ancorat la sol de un vinci, pe un vînt slab, cu un cablu avînd 100 m lungime, 12 mm diametru și 0,51 kg/m. Pentru a produce bobinarea cablului pe tamburul vinciului este necesar un cuplu de 400 Nm. În aceste condiții cablul face un unghi de 30° cu verticala în vinci.	Înălțimea H la care se află dirijabilul, dacă diametrul tamburului vinciuliu este de 0,5 m. R. $H = 90$ m.
13		Pentru menținerea poziției vasului în ape calme pe durata reparațiilor cablului, elicele dezvoltă o forță de împingere de 300 kN, iar cablul face un unghi $\theta = 60°$, cu orizontala în punctul P, la intrarea în apă. Cablul are masa de 22 kg/m, aria secțiunii transversale fiind 4600 mm², iar densitatea apei de mare este 1030 kg/m³. (Încărcarea verticală a cablului se va considera diferența dintre greutatea cablului și greutatea apei dislocate).	Lungimea s a cablului, de la punctul P la punctul de așezare pe fundul oceanului, distanța x pe orizontală de la acest punct la verticala punctului P, adîncimea h a oceanului în zonă și cuplul M necesar a fi aplicat la tamburul pe care se înfășoară cablul, avînd 2 m, diametru, pentru a contracara rotirea tamburului. R. $s = 3070$ m; $x = 2330$ m; $h = 1770$ m; $M = 600$ kN·m.

Scanned with OKEN Scanner

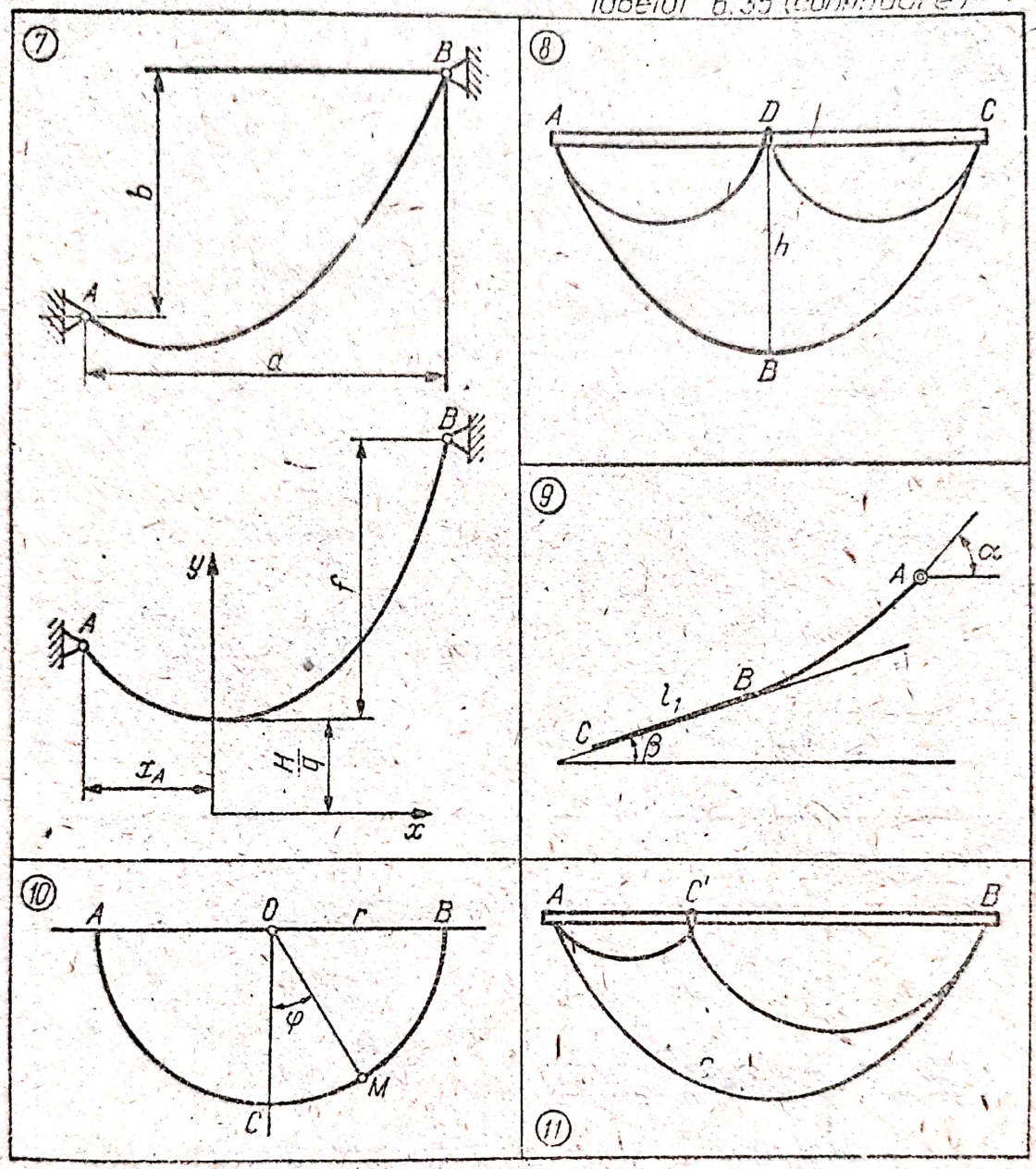
6.35. Să se rezolve problemele recapitulative din tabelul 6.35.

Tabelul 6.35

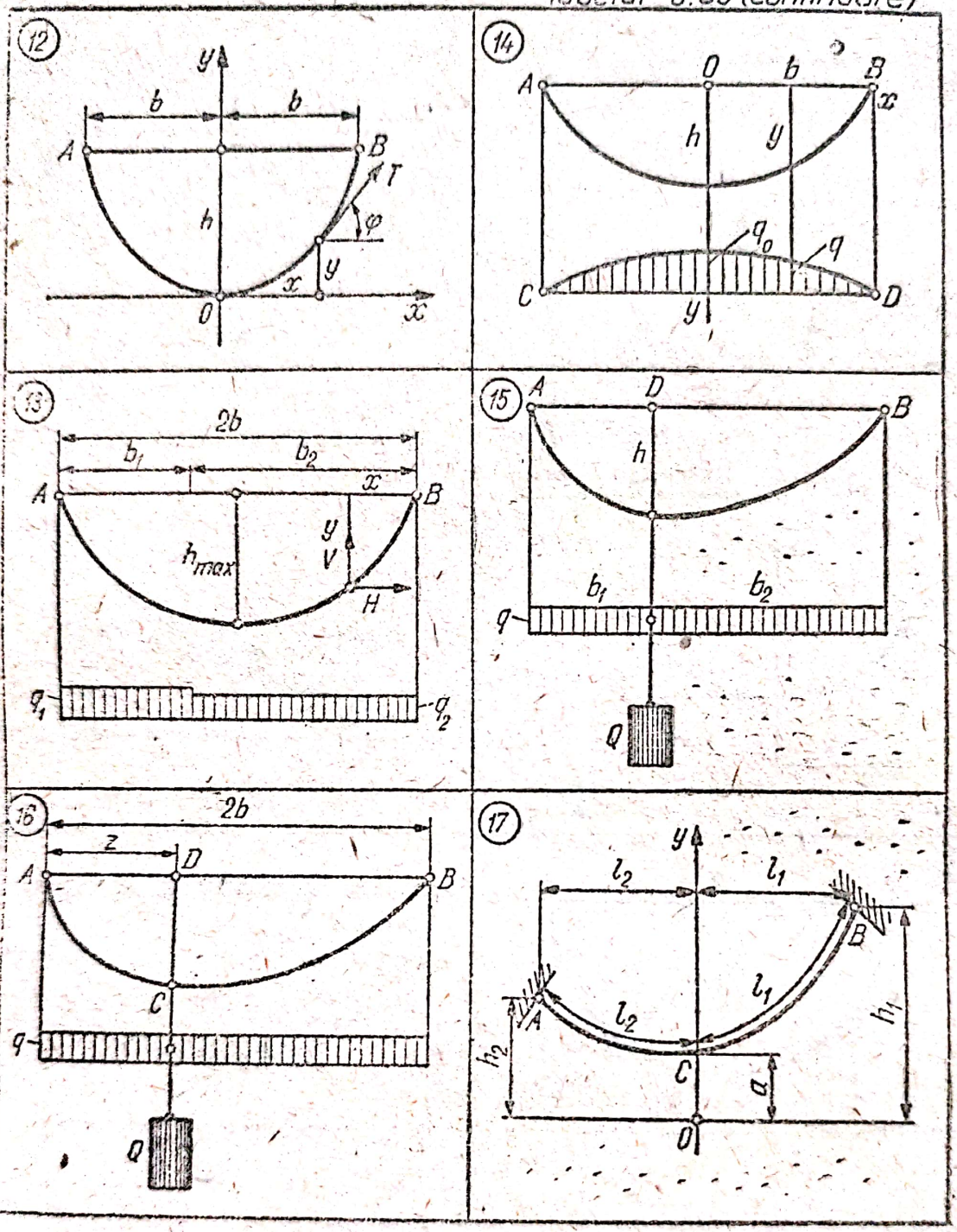


Scanned with OKEN Scanner

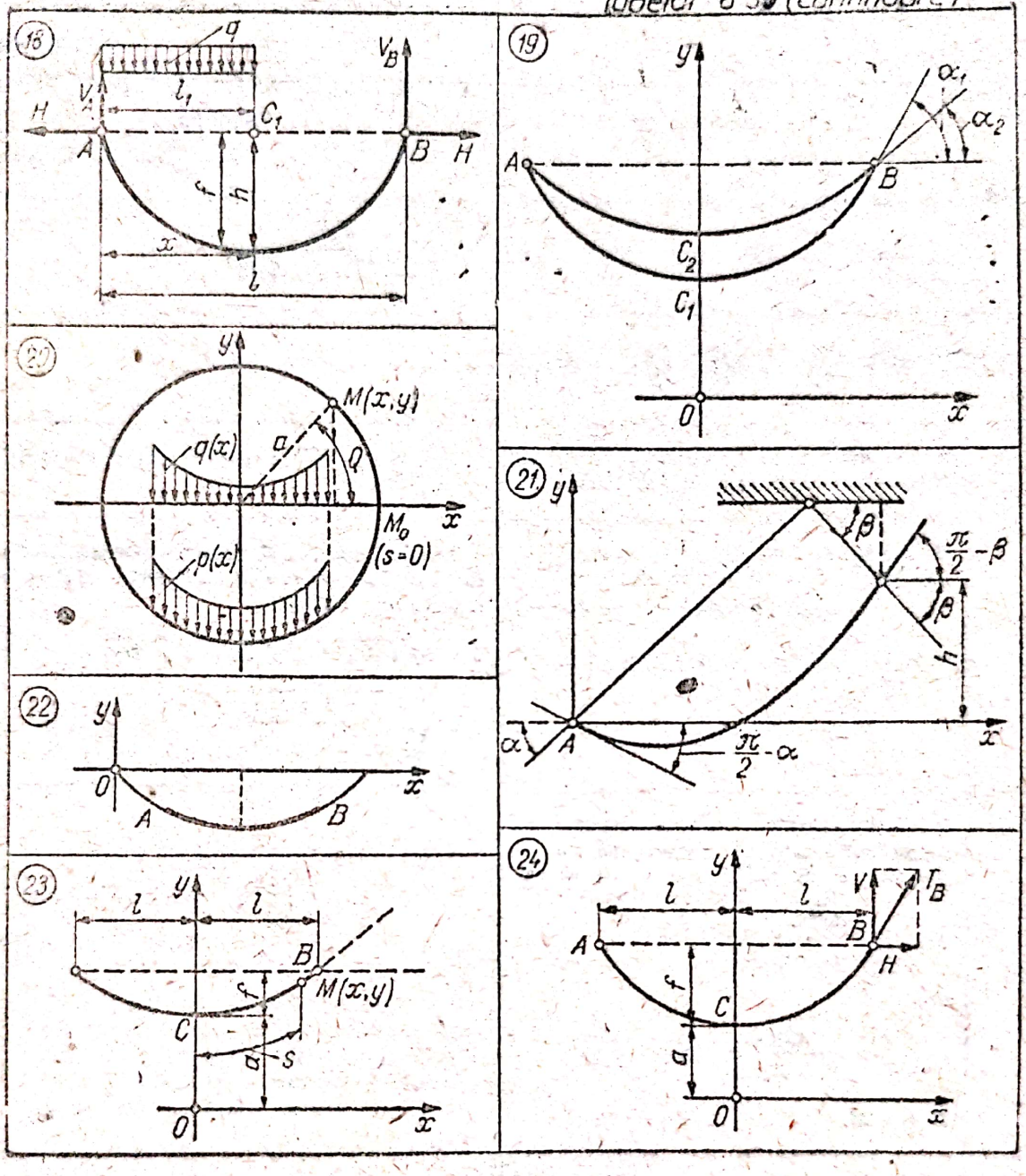
Tabelul 6.35 (continuare)



Tabelul 6.35 (continuare)



Tabelul 6.35 (continuare)



Enunțurile și răspunsurile sînt trecute în tabelul 6.35, a.

Tabelul 6.35,a

Fig.	Enunț	Răspuns
0	1	2
1	$H = 2ql$; $L = 2l$; $h = ?$	$h = \dfrac{b\sqrt{5}}{2 \ln [(1+\sqrt{5})/2]}$
2	Se cere condiția de echilibru a firului	$x - x_1 = \dfrac{a - a_1}{\mu} = \dfrac{b}{\mu}$.
3	Să se determine z, pentru ca firul de lungime l să se afle în echilibru.	$(1+\mu)^2 z^2 - 2[(1+\mu)(h+\mu l) + \mu^2 h]z + + \mu^2 h^2 P = 0$.
4	Se cere distanța AB = x, pentru poziția de echilibru a firului	Înlocuind sarcina Q printr-o bucată de fir de lungime $m = Q/q$, distanța $AB = x$ rezultă din ecuația: $x = \sqrt{(z+l+2m)(3z-l+2m)} \cdot \cdot \ln \sqrt{\dfrac{z+l+2m}{3z-1+2m}}$
5	Să se demonstreze că dacă distanța AB se mărește sau se micșorează cu δb, punctul C se ridică sau coboară cu: $\delta h = \dfrac{h \cos\psi}{b - l\cos\psi}\,\delta b$, iar $a = \dfrac{l}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}\psi}{b - l\cos\psi}\,\delta b$; $H = q\,\delta a$.	
5′	Să se demonstreze că, în cazul problemei 5, centrul de greutate se ridică sau coboară cu: $\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\psi\,\delta b$.	
6	Se dă greutatea G a firului și forța concentrată G'. Se cere tensiunea în fir în punctul A.	$T = \dfrac{h}{2l} + \dfrac{l}{4h}G' + \dfrac{l}{8h}G$.
7	$L = 250$ m; $a = 200$ m; $b = 50$ m; $q = 40$ N · m^{-1}	$H = 3{,}56 \cdot 10^3$ N; $x_A = 82$ m. $T_{max} = T_B = 7{,}16 \cdot 10^3$ N; $f = 40{,}5$ m
8	$L_{ABC} = 2l$; $BD = h$	$a = \dfrac{l^2 - h^2}{2h}$ $T_{max} = qy = q(a+b) = q\dfrac{l^2+h^2}{2h}$

Scanned with OKEN Scanner

0	1	2
9	$AC = l$; $BC = l_1 = ?$ (Walton)	$l_1 = \dfrac{l \cos \alpha}{\cos \beta \cos (\alpha - \beta)}$
10	$T = ?$ (John Bernoulli)	$T_\varphi = \dfrac{rq_0}{\cos \varphi}$; $q = \dfrac{q_0}{\cos^2 \varphi}$
11	$AB = 2b$; $AC = 2l_1$; $BC = 2l_2$; $a = ?$	Tensiunea orizontală a celor două bucle trebuie să fie egală, adică: $H = a_1 q = a_2 q$; $a_1 = a_2 = a$. Se obține: $y_1^2 = a^2 + l_1^2$, $y_1 + l_1 = a + e^{b_1/a}$. $y_2^2 = a^2 + l_2^2$, $y_2 + l_2 = a + e^{b_1/a}$. Prin înmulțire rezultă ecuația: $\left(l_1 + \sqrt{l_1^2 + a^2}\right)\left(l_2 + \sqrt{l_2^2 + a^2}\right) = a^2 e^{b/a} \Rightarrow a$.
12	$q = K \cos \varphi$ Se cere ecuația firului (Jakob și John Bernoulli)	Ecuația lanțului este parabola: $x^2 = \dfrac{b^2}{h} y$.
13	$b_1 < b_2$; $q_1 > q_2$ $H = ?$	$H = \dfrac{[q_1 b_1^2 + q_2 b_2 (2b_1 + b_2)]^2}{32 q_2 b^2 h_m}$.
14	Firul AB, de greutate neglijabilă susține o sarcină q, neuniformă distribuită pe dreapta $CD = AB$. După ce lege trebuie să se modifice sarcina q, dacă ecuația firului este: $y = h \cos \dfrac{\pi x}{2b}$?	$q = q_0 \dfrac{h}{y}$.
15	Firul AB de greutate neglijabilă susține o grindă de sarcină q, uniform distribuită și greutate Q. Se cere tensiunea H din fir.	$H = \dfrac{b_1 b_2}{2h}\left(q + \dfrac{Q}{b}\right)$
16	Neglijînd greutatea firului, asupra căruia acționează sarcina continuă q, se cere săgeata maximă a firului și tensiunea corespunzătoare în punctul de suspensie, cunoscînd și Q.	$y_{max} = h\left(q + \dfrac{Q}{b}\right) \dfrac{z(2b - z)}{Q(2b - z) + qb^2}$ $H = \dfrac{Q(2b - z) + qb^2}{2h}$ $V = qb + Q \dfrac{2b - z}{2b}$.

Scanned with OKEN Scanner

0	1	2
17	Se cere parametrul a, pentru lănţişorul din figură.	Valoarea parametrului a se deduce din relaţia: $a \operatorname{sh} \frac{l}{a} = \sqrt{L^2 - h^2}$ $L = \frac{a}{2}\left(\operatorname{sh} \frac{l_1}{a} + \operatorname{sh} \frac{l_2}{a}\right)$ $h = \frac{a}{2}\left(\operatorname{ch} \frac{l_1}{a} - \operatorname{ch} \frac{l_2}{a}\right)$.
18	Se cere: H, x şi h.	$H = \frac{qx^2}{2f}$; $x = \frac{l_1(2l - l_1)}{2l}$ $h = \frac{4l(l - l_1)}{(2l - l_1)^2} f$.
19	Firul de lungime $2L$ este trecut peste scripeţii A şi B. Se cer lungimile $2L_1$ şi $2L_2$ ale lănţişoarelor AC_1B şi AC_2B, cunoscînd unghiurile α_1 şi α_2.	$L_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2} L$ $L_2 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2} L$.
20	Se cere legea de variaţie a forţei verticale pe proiecţia orizontală de fir şi legea de variaţie a aceleiaşi forţe verticale distribuite pe fir, în funcţie de x.	$q(x) = q(0)a^3(a^2 - x^2)^{-3/2}$ $p(x) = p(0)\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{-1}$
21	Se cere să se determine parametrul lănţişorului şi denivelarea punctelor de suspensie, pentru următoarele mărimi date: lungimea L, α şi β	$a = \frac{L}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$ $h = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} L$.
22	Se cere legea de variaţie a densităţii unui fir, în funcţie de arcul s, dacă firul se aşează după cicloida: $x = a(\theta - \sin \theta)$ $y = -a(1 - \cos \theta)$, $(0 < \theta < 2\pi)$	$p(s) = p(0)\left[1 - \left(\frac{s}{4a}\right)\right]^{-3/2}$
23	Se cunosc: lungimea lănţişorului $2L$ şi unghiul tangentei în B la fir. Se cere deschiderea $AB=2l$ şi săgeata f a firului.	$AB = 2l = 2L \operatorname{ctg} \alpha \ln\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$; $f = L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
24		$T_B = \frac{l^2 + f^2}{4lf} Q$.

Scanned with OKEN Scanner

7

Principiul deplasărilor virtuale

A CONSIDERAȚII TEORETICE

Deplasări virtuale. Fie un punct material A, constrîns să se miște pe o suprafață fixă (Σ) (fig. 7. a).

Se numește deplasare reală $\mathbf{dr} = \mathbf{AA'}$ a punctului A, deplasarea infinitezimală ce are loc sub acțiunea forțelor ce acționează punctul material. Deplasarea reală este situată în planul tangent la suprafață. Dacă ecuația suprafeței este

$$f(x, y, z) = 0, \tag{7.1}$$

componentele dx, dy și dz ale deplasării $\mathbf{dr}$ satisfac relația

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \tag{7.2}$$

Se numește deplasare posibilă orice deplasare infinitezimală compatibilă cu legăturile. În cazul reprezentat în figura 7.a, deplasările infinitezimale $\mathbf{AA''}$, $\mathbf{AA'''}$ etc. sînt deplasări posibile și sînt tangente la suprafața (Σ) ca și deplasarea reală. Deplasarea reală este, evident, una din deplasările posibile.

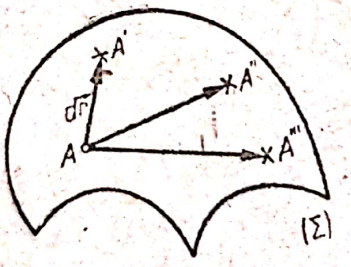


Fig. 7 a

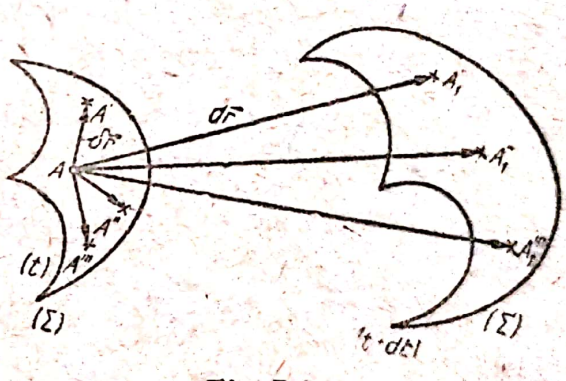


Fig. 7 b

În cazul unei suprafețe mobile, sau deformabile, să considerăm două poziții ale acestei suprafețe: (Σ) la momentul t și (Σ') la momentul $t + dt$ (fig. 7.b). Presupunînd că sub acțiunea forțelor date, punctul A ajunge la timpul $t + dt$ în A_1', deplasarea reală va fi, în acest caz, $\mathbf{dr} = \mathbf{AA_1'}$ și nu va mai fi tangentă la suprafața (Σ). Dacă ecuația suprafeței (Σ) este: $f(x, y, z, t) = 0$, componentele dx, dy și dz ale deplasării reale $\mathbf{dr} = \mathbf{AA_1'}$ vor satisface relația

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0 \tag{7.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deplasările infinitezimale $\mathbf{AA}_1''$, $\mathbf{AA}_1'''$ etc. compatibile cu legăturile şi care ar putea fi produse de diferite sisteme de forţe ce ar acţiona asupra punctului material A, sînt deplasări posibile şi nici acestea nu mai sînt tangente la suprafaţa (Σ). Deplasarea reală este şi ea una dintre deplasările posibile.

Una dintre noţiunile de mare importanţă ce intervin în mecanică este aceea de deplasare virtuală. Pentru a contura această noţiune, să ne imaginăm că, pentru un moment suprafaţa (Σ) ar rămîne imobilă, aşa cum se află la momentul t. În această situaţie deplasările infinitezimale $\mathbf{AA}'$, $\mathbf{AA}''$, $\mathbf{AA}'''$ etc. se numesc deplasări virtuale şi se notează prin $\delta\mathbf{r}$, componentele deplasării virtuale fiind : δx, δy şi δz. Deplasarea $\delta\mathbf{r}$ este tangentă la suprafaţa (Σ) ; prin urmare, produsul scalar dintre deplasarea virtuală $\delta\mathbf{r}$ şi grad f este nul, deoarece, cum dealtfel se ştie, grad f este normal la suprafaţa (Σ). Deci

$$\operatorname{grad} f \cdot \delta\mathbf{r} = 0 \tag{7.4}$$

sau analitic

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0 \tag{7.5}$$

Comparînd relaţiile (3) şi (5), se observă deosebirea, din punct de vedere analitic, dintre o deplasare reală şi una virtuală. În cazul particular al legăturilor cînd funcţia f nu depinde explicit de timpul t (legături sclerotome), $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ şi relaţiile (6.3) şi (6.5) coincid ca formă.

Comparînd relaţiile (3) şi (5), se observă că deosebirea dintre operatorii diferenţiali d şi δ ca rezultat al aplicării acestora asupra funcţiei $f(x, y, z, t)$, este că d operează asupra tuturor variabilelor, inclusiv timpul t, în timp ce δ nu operează asupra timpului t.

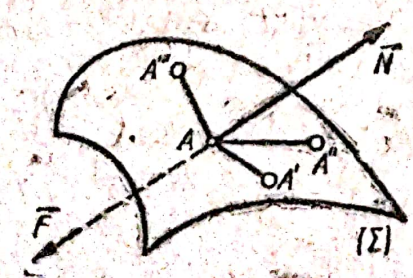
Noţiunea de deplasare virtuală se poate generaliza şi în cazul în care parametrii nu mai sînt coordonate, ci unghiuri sau parametri mai generali. Aşa de pildă, în cazul unui sistem de puncte materiale, dacă vectorul de poziţie $\mathbf{r}$ al unui punct oarecare A depinde de parametrii $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (coordonatele generalizate ale lui Lagrange) şi explicit de timpul t, avem :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t),$$

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_n}dq_n + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}dt \tag{7.6}$$

$$\delta\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_n}dq_n,$$

unde $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$ şi $\delta\mathbf{r}$ sînt, respectiv, vectorul de poziţie, deplasarea reală şi deplasarea virtuală ale punctului A.



g. 7 c

Principiul lucrului mecanic virtual. Considerăm cazul unui punct material, asupra căruia acţionează un sistem de forţe date, a căror rezultantă este $\mathbf{F}$ şi care este obligat să rămînă pe o suprafaţă lucie (Σ) ; reacţiunea $\mathbf{N}$ este normală la suprafaţa (Σ) (fig. 7.c). Considerînd

Scanned with OKEN Scanner

deplasările virtuale AA', AA'', AA''', ..., ale punctului A, se observă că reacţiunea $\mathbf{N}$ este normală pe aceste deplasări virtuale. Notînd prin $\delta\mathbf{r}$ una dintre aceste deplasări, produsul scalar se va scrie:

$$\mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{r} = 0. \tag{7.7}$$

Relaţia (7.7) exprimă faptul că lucrul mecanic virtual al reacţiunii normale $\mathbf{N}$ este nul. La aceeaşi concluzie se ajunge şi în cazul unui punct material constrîns să rămînă pe o curbă lucie sau în cazul unui rigid supus la legături fără frecare. Astfel, în cazul unui reazem simplu, reacţiunea este normală la suprafaţa de reazem, iar deplasarea virtuală, fiind tangentă la această suprafaţă, va fi normală pe reacţiune. În cazul unei articulaţii, lucrul mecanic virtual al reacţiunii $\mathbf{R}$ este nul, pentru că deplasările virtuale, $\delta\mathbf{r}$ sînt nule. În cazul încastrării, lucrul mecanic virtual al reacţiunii $\mathbf{R}$ şi al momentului $\mathbf{M}$ sînt nule, deoarece atît deplasările cît şi rotirile virtuale sînt nule. Din aproape în aproape, se poate demonstra că lucrul mecanic virtual al forţelor de legătură este nul şi în cazul general al unui sistem de puncte materiale sau de corpuri materiale, în cazul legăturilor ideale (fără frecare).

Se ajunge, astfel, la următorul enunţ: în cazul unui sistem de puncte materiale, supus la legături fără frecare, lucrul mecanic virtual al forţelor de legătură este nul.

Acesta este, într-o primă formă, enunţul principiului lucrului mecanic virtual, ale cărui consecinţe sînt de mare importanţă.

Să presupunem că punctul material A, constrîns să rămînă pe suprafaţa (Σ) se găseşte în repaus. În aceste condiţiuni, forţele $\mathbf{F}$ şi $\mathbf{N}$ trebuie să se echilibreze, cu alte cuvinte, rezultanta lor trebuie să fie nulă; prin urmare

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} = 0. \tag{7.8}$$

Prin înmulţirea relaţiei (7.8), scalar cu $\delta\mathbf{r}$, se obţine

$$\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{r} = 0. \tag{7.9}$$

Ţinînd seama de (7.7), rezultă

$$\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = 0 \tag{7.10}$$

Rezultă, deci, că în cazul repausului, lucrul mecanic al forţei efectiv aplicate $\mathbf{F}$ este nul, oricare ar fi deplasarea virtuală $\delta\mathbf{r}$. Relaţia (7.10) are o importanţă deosebită, deoarece elimină reacţiunea $\mathbf{N}$, una din necunoscutele care crează dificultăţi în mecanica newtoniană.

Se poate, deci constata, că sub această nouă formă, principiul lucrului mecanic virtual lasă să se întrezărească posibilitatea eliminării reacţiunilor, în cazul unui sistem de puncte sau de corpuri materiale aflat în repaus şi supus la legături fără frecare. În adevăr, în cazul unui sistem în repaus, se pot scrie, pentru fiecare punct material considerat separat, următoarele relaţii

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1 = 0\,;\ \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_2 = 0,\ \ldots\,;\ \mathbf{F}_n + \mathbf{R}_n = 0, \tag{7.11}$$

unde $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ sînt forţele date, cunoscute (exterioare sau interioare) ce acţionează respectiv asupra punctelor $A_1, A_2, \ldots, A_n$, iar $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_n$ reacţiunile din legăturile exterioare, sau interioare, la care sînt supuse aceste puncte.

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind scalar relațiile (6,11), respectiv cu: $\delta \mathbf{r}_1$, $\delta \mathbf{r}_2$, ..., $\delta \mathbf{r}_n$ și însumînd apoi membru cu membru, rezultă

$$\Sigma(\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) + \Sigma(\mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) = 0 \qquad (7.12)$$

În baza principiului lucrului mecanic virtual, legăturile sistemului fiind fără frecare, rezultă că cea de-a doua sumă este nulă, deoarece reprezintă lucrul mecanic virtual al forțelor de legătură, exterioare sau interioare; prin urmare

$$\Sigma(\mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) = 0 \qquad (7.13)$$

Rezultă deci că

$$\delta L = \Sigma(\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) = 0. \qquad (7.14)$$

Această relație indică faptul că într-un sistem de puncte materiale aflat în repaus și supus la legături ideale, exterioare sau interioare lucrul mecanic virtual al forțelor date, exterioare sau interioare, este nul.

Relația (7.14) prezintă avantajul că elimină reacțiunile $\mathbf{R}_i$ și ușurează astfel în mod sensibil studiul echilibrului unui sistem de puncte materiale. Această relație, fiind o consecință a ecuațiilor de echilibru, reprezintă o condiție necesară de echilibru. Se poate demonstra că, în condiții destul de largi, această relație este și suficientă.

Ca o consecință a necesității și suficienței condiției (7.14) pentru echilibrul marii majorități a sistemelor de puncte materiale ce intervin curent în aplicații, se ajunge la a doua formulare a principiului lucrului mecanic virtual.

Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem de puncte materiale să se afle în repaus sub acțiunea unui sistem de forțe date, exterioare sau interioare, este ca lucrul mecanic virtual al acestor forțe să fie nul.

În funcție de proiecțiile pe axe ale forțelor $\mathbf{F}_i$ și ale deplasărilor $\delta \mathbf{r}_i$, principiul lucrului mecanic virtual se scrie

$$\delta L = \Sigma(\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) = \Sigma(X_i \cdot \delta x_i + Y_i \cdot \delta y_i + Z_i \cdot \delta z_i) = 0. \qquad (7.15)$$

Ecuația permite rezolvarea problemelor de statica sistemelor de puncte sau de corpuri materiale, eliminînd de la început forțele de legătură și conducînd la un sistem de n ecuații scalare cu n necunoscute, parametrii $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_n$ care determină configurația de repaus (6.15) datorită independenței deplasărilor virtuale $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k, \ldots, \delta q_n$.

B. PROBLEME REZOLVATE

7.1. Asupra unui mecanism bielă-manivelă, acționează forța P, rezultanta presiunii gazelor asupra pistonului și cuplul M — asupra manivelei (fig. 7.1). Se cere să se determine relația dintre forța P și cuplul M, utilizînd principiul deplasărilor virtuale.

Rezolvare. Aplicînd principiul deplasărilor virtuale, se obține

$$P \cdot \delta x + M \cdot \delta \theta = 0.$$

Se observă că, din triunghiul OAB, aplicînd teorema cosinusului se deduce:

$$l^2 = x^2 + r^2 - 2rx \cos \theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

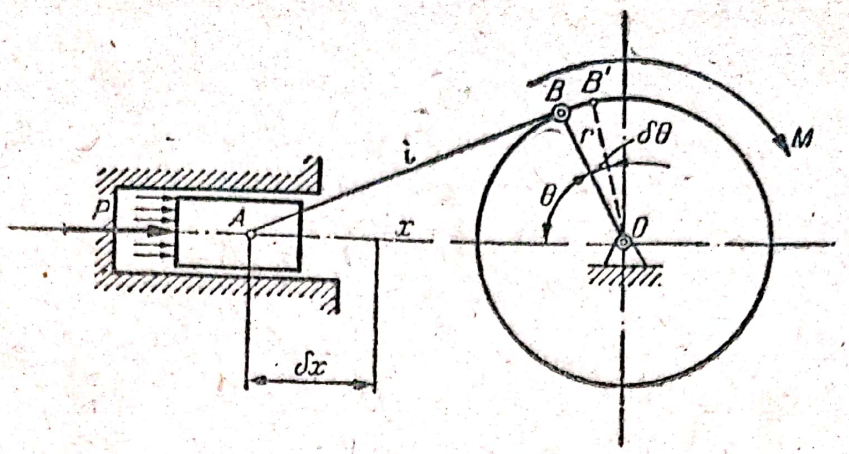


Fig. 7.1

Diferențiind egalitatea, rezultă

$$2x\,\delta x - 2rx\cos\theta\cdot\delta\theta + 2rx\sin\theta\cdot\delta\theta = 0$$

de unde

$$\delta\theta = \frac{r\cos\theta - x\sin\theta}{rx\sin\theta}\,\delta x.$$

Din ecuația principiului lucrului mecanic virtual se obține

$$M = -\frac{\delta x}{\delta\theta}P$$

și, în urma înlocuirii lui $\delta\theta$ cu expresia de mai sus,

$$M = \frac{rx\sin\theta\,\theta}{x - r\cos\theta}P.$$

Neglijînd $r\cos\theta$ în raport cu x, rezultă relația cerută

$$M = rP\sin\theta.$$

7.2. Un mecanism plan cu articulații are construcția arătată în fig. 7.2. Barele OA, OB, AD, BC, ... au greutate neglijabilă și formează o serie de romburi; OK este un dinamometru. Se cere să se stabilească cît va arăta dinamometrul, dacă se atîrnă de articulația M o greutate Q.

Rezolvare. Acțiunea dinamometrului asupra mecanismului se concretizează prin forța $\mathbf{F}$, aplicată în punctul K.

Principiul deplasărilor virtuale ne conduce la ecuația

$$Q\cdot\delta y_M - F\cdot\delta y_K = 0.$$

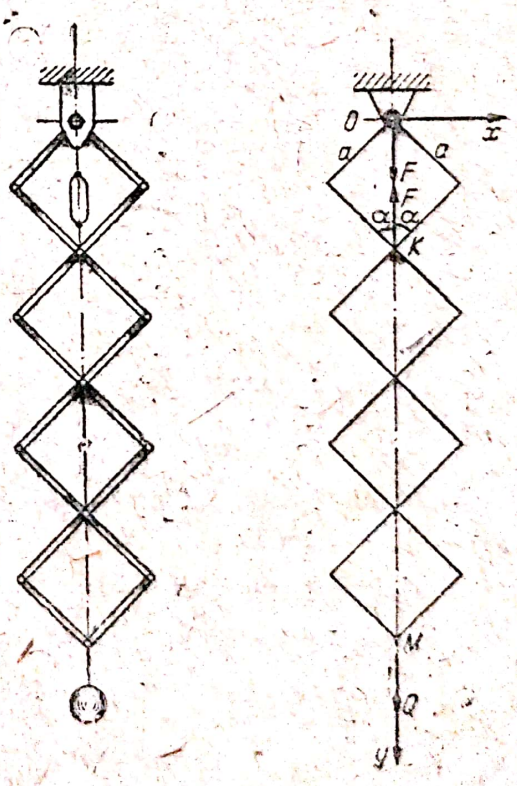


Fig. 7.2

Se observă că, prin diferențiere, se obține, ținînd seama că $y_M = 3 \cdot 2a \cos \varphi$ și $y_h = 2a \cos \varphi$,

$$\delta y_M = -6a \sin \varphi \cdot \delta\varphi \,;\; \delta y_h = -2a \sin \varphi \cdot \delta\varphi.$$

Făcînd înlocuirile în ecuația lucrului mecanic virtual, se obține

$$-6aQ \sin \varphi \cdot \delta\varphi + 2aF \sin \varphi \cdot \delta\varphi = 0,$$

de unde, în urma simplificării cu $2a \sin \varphi \cdot \delta\varphi \neq 0$,

$$F = 3Q.$$

În cazul a n romburi, se obține pentru forța F expresia

$$F = nQ.$$

7.3. O presă cu șurub este formată din două triunghiuri isoscele AOB și ABC, cum se poate vedea în fig. 7.3. Șurubul $A-B$, cu două începuturi, este rotit de către momentul M, care face să apară în piulițele A și B, forțele $\mathbf{P}$ și $-\mathbf{P}$. Se cere să se determine relația dintre forțele $\mathbf{P}$ și forța de presare $\mathbf{Q}$, pentru poziția din figură, presupunînd unghiul α cunoscut.

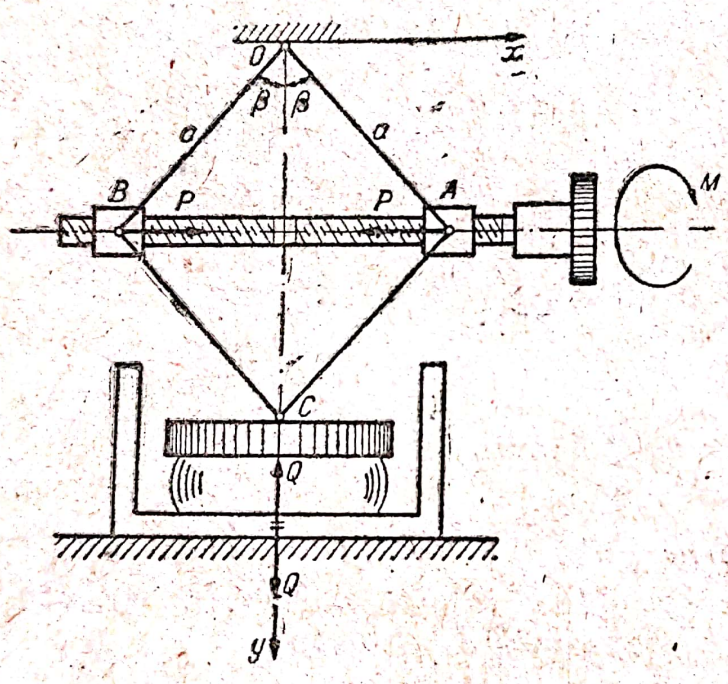


Fig. 7.3

Rezolvare. Principiul deplasărilor virtuale se scrie

$$\delta L = P \cdot \delta x_B - P \cdot \delta x_A - Q \cdot \delta y_C = 0.$$

Observînd că $x_B = -a \cos \alpha$; $x_A = a \cdot \cos \alpha$ și $y_C = 2a \sin \alpha$, rezultă prin diferențiere

$$\delta x_B = a \sin \alpha \cdot \delta\alpha,\; \delta x_A = -a \sin \alpha \cdot \delta\alpha \text{ și } \delta y_C = 2a \cos \alpha \cdot \delta\alpha.$$

Ecuația principiului lucrului mecanic virtual devine

$$aP \sin \alpha \cdot \delta\alpha + aP \sin \alpha \cdot \delta\alpha - 2aQ \cos \alpha \cdot \delta\alpha = 0.$$

În urma simplificărilor, se deduce

$$Q = P \operatorname{tg} \alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.4. Pentru ridicarea sarcinilor, se utilizează cricuri cu cremalieră de construcția celui din fig. 7.4. Se cere să se determine forța P necesară ridicării sarcinii Q, cu acest tip de cric.

Rezolvare. Ecuația lucrului mecanic virtual se scrie

$$\delta L = PR \cdot \delta\theta_1 - Q \cdot \delta y = 0.$$

Se observă, însă că

$$\delta\theta_2 = \frac{R_1}{R_2}\delta\theta_1 = \delta\theta_3$$

și că

$$\delta\theta_4 = \frac{R_1R_3}{R_2R_4}\delta\theta_1 = \delta\theta_5, \quad \delta y = R_5 \cdot \delta\theta_5 = \frac{R_1R_3R_5}{R_2R_4}\delta\theta_1.$$

Înlocuind în ecuația lucrului mecanic virtual, rezultă

$$PR \cdot \delta\theta_1 - Q\frac{R_1R_3R_5}{R_2R_4}\delta\theta_1 = 0$$

de unde se deduce forța P

$$P = \frac{R_1R_3R_5}{RR_2R_4}Q.$$

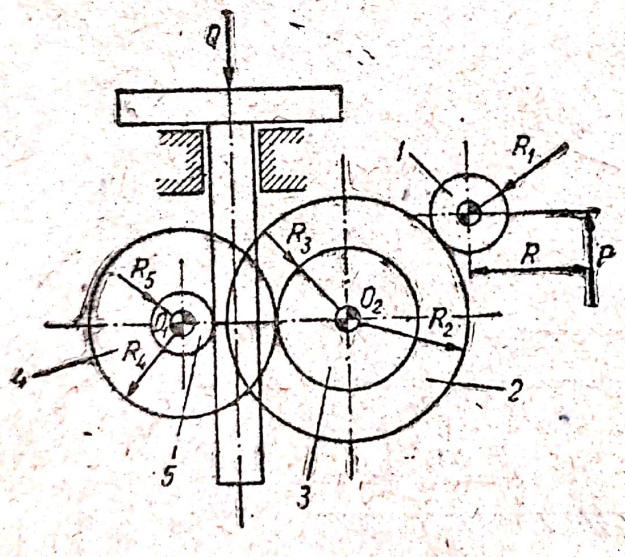


Fig. 7.4

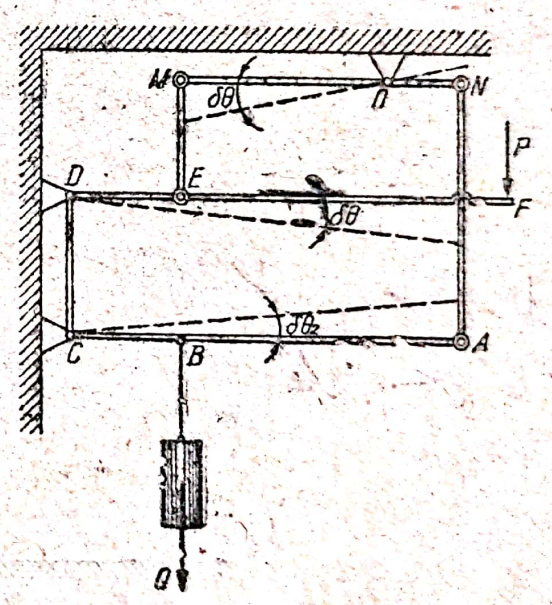


Fig. 7.5

7.5. Un mecanism utilizat la ridicarea sarcinilor este format dintr-un sistem de bare articulate, cum se poate vedea în fig. 7.5.

Se cere să se determine forța P, dacă se cunosc rapoartele:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{10}, \quad \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = \frac{1}{3}; \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{1}{10}.$$

Rezolvare. Scriem, mai întîi, ecuația principiului lucrului mecanic virtual

$$\delta L = P \cdot \delta y_F - Q \cdot \delta y_B = 0.$$

Se observă, însă, că

$$\delta y_E = \overline{DE} \cdot \delta\theta = \delta y_M = \overline{OM} \cdot \delta\theta_1.$$

Rezultă

$$\delta\theta_1 = \frac{\overline{DE}}{\overline{OM}}\delta\theta\,;\ \delta y_N = \overline{ON} \cdot \delta\theta_1 = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}}\overline{DE} \cdot \delta\theta = \delta y_A.$$

Avem, de asemenea

$$\delta y_A = \overline{AC} \cdot \delta\theta_2,\ \delta y_B = \overline{CB} \cdot \delta\theta_2 = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \delta y_A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\frac{\overline{ON}}{\overline{OM}}\overline{DE} \cdot \delta\theta.$$

Ecuaţia principiului lucrului mecanic virtual devine

$$P\overline{DF} \cdot \delta\theta - Q\frac{\overline{OB} \cdot \overline{ON} \cdot \overline{DE}}{\overline{AC} \cdot \overline{OM}}\delta\theta = 0.$$

Rezultă următoarea expresie pentru forţa P

$$P = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\frac{\overline{ON}}{\overline{OM}}\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}Q = \frac{1}{300}Q.$$

Prin urmare, pentru ridicarea sarcinii Q este necesară o forţă P de 300 ori mai mică decît sarcina Q.

7.6. Să se determine relaţia dintre cele două greutăţi P şi Q, ale balanţei zecimale din fig. 7,6.

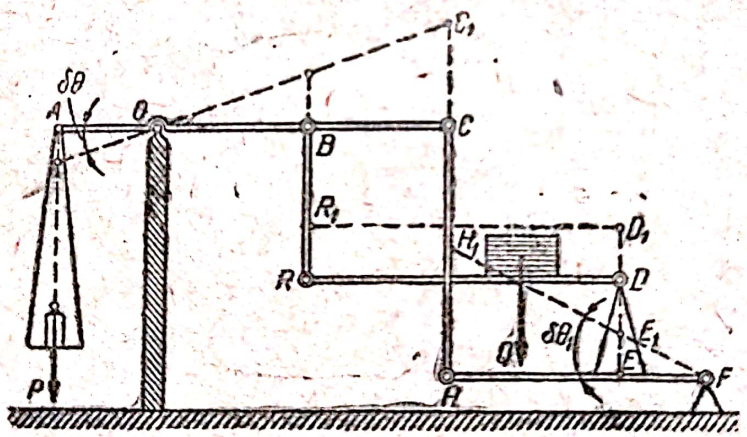


Fig. 7.6

Rezolvare. Dînd sistemului o rotaţie în jurul articulaţiei din O, principiul deplasărilor virtuale se va scrie sub forma

$$P \cdot \delta y_P - Q \cdot \delta y_Q = 0$$

Însă $\delta y_P = \overline{OA} \cdot \delta\theta$ şi $\overline{DD_1} = \delta\theta \cdot \overline{OB}$. Articulaţia R se ridică cu

$$\overline{RR_1} = \overline{BB_1} = \overline{OB} \cdot \delta\theta$$

iar articulaţia H cu

$$\overline{HH_1} = \overline{CC_1} = \overline{OC} \cdot \delta\theta = \overline{HF} \cdot \delta\theta_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$\delta\theta_1 = \frac{\overline{OC}}{\overline{HF}} \cdot \delta\theta;$$

prin urmare

$$\overline{DD}_1 = \frac{\overline{EF}}{\overline{HF}} \cdot \overline{OC} \cdot \delta\theta.$$

Condiţia de orizontabilitate a platoului RD este ca $RR_1 = DD_1$ deci

$$\overline{OB} \cdot \delta\theta = \overline{OC}\,\frac{\overline{EF}}{\overline{HF}}\,\delta\theta \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{HF}}.$$

Relaţia este satisfăcută prin modul de construcţie al balanţei.

Efectuînd înlocuirea în ecuaţia principiului lucrului mecanic virtual, se obţine

$$P \cdot \overline{OA} \cdot \delta\theta - \frac{\overline{EF}}{\overline{HF}}\,\overline{OC} \cdot Q \cdot \delta\theta = 0$$

de unde

$$\frac{Q}{P} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}.$$

Alegînd raportul $\overline{OA}/\overline{OB} = 10$, rezultă $P = Q/10$

7.7. Se consideră un regulator centrifugal, format din patru bare de lungime l şi greutate neglijabilă. Cunoscînd că greutăţile sferelor sînt egale cu P, iar viteza unghiulară a regulatorului este ω, se cere să se studieze echilibrul dinamic al regulatorului (fig. 7.7).

Rezolvare. Aplicăm principiul deplasărilor virtuale, care în acest caz se scrie sub forma

$$\delta L = P \cdot \delta y_P + \frac{P}{g}\,l\omega^2 \sin\theta \cdot \delta x_P = 0.$$

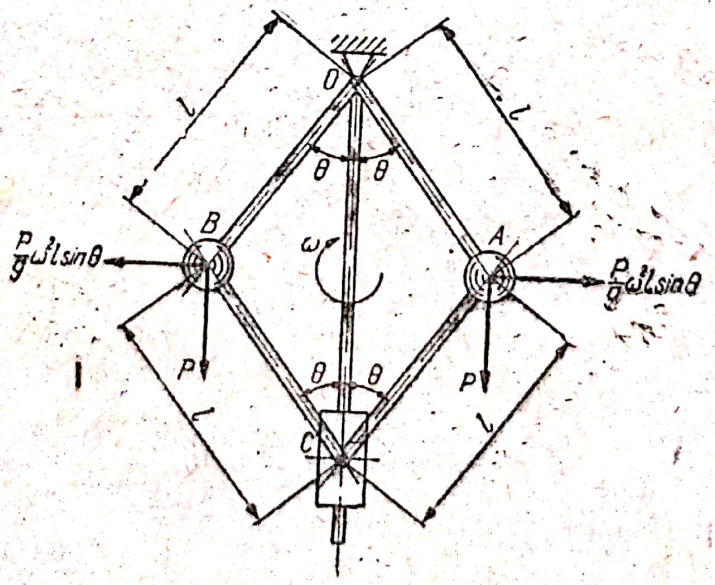


Fig. 7.7

Însă

$$x_P = l \sin \theta\,; \quad \delta x_P = l \cos \theta \cdot \delta\theta$$

$$y_P = l \cos \theta\,; \quad \delta y_P = -\, l \sin \theta \cdot \delta\theta.$$

Ecuația principiului lucrului mecanic virtual devine, în urma simplificării cu $\delta\theta \neq 0$,

$$-\sin \theta + \frac{\omega^2}{g} l \sin \theta \cos \theta = 0$$

de unde

$$\sin \theta = 0\,; \quad \cos \theta = \frac{g}{l\omega^2}.$$

Rezultă că avem două poziții de echilibru.

7.8. O presă cu genunchi are construcția arătată în fig. 7.8. Aplicînd principiul deplasărilor virtuale, se cere să se determine relația dintre forțele P și Q.

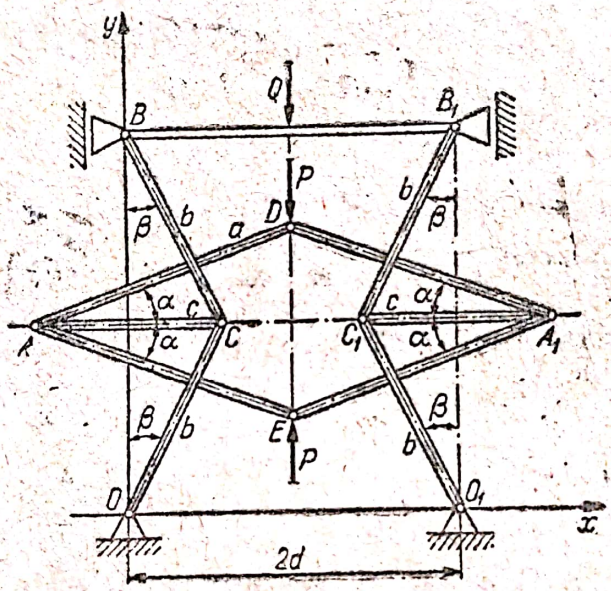


Fig. 7.8

Rezolvare. Ecuația principiului lucrului mecanic virtual se scrie

$$\delta L = -Q \cdot \delta y_B - P \cdot \delta y_D + P \cdot \delta y_E = 0.$$

Însă

$$y_B = 2b \cos \beta\,; \quad \delta y_B = -2b \sin \beta \cdot \delta\beta$$

$$y_D = b \cos \beta + a \sin \alpha\,; \quad \delta y_D = -b \sin \beta \cdot \delta\beta + a \cos \alpha \cdot \delta\alpha$$

$$y_E = b \cos \beta - a \sin \alpha\,; \quad \delta y_E = -b \sin \beta \cdot \delta\beta - a \cos \alpha \cdot \delta\alpha.$$

Se observă, însă, că:

$$d = a \cos \alpha - c + b \sin \beta,$$

de unde prin diferențiere

$$\delta\alpha = \frac{b \cos \beta}{a \sin \alpha} \delta\beta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în relaţia lucrului mecanic virtual, se obţine

$$2Q \sin \beta + P \sin \beta - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha} P - P \sin \beta - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha} P = 0.$$

În final se obţine relaţia cerută

$$Q = P \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$$

7.9. O structură formată din bare articulate are forma din fig. 7.9. Utilizînd principiul deplasărilor virtuale, se cere să se determine efortul din bara ED.

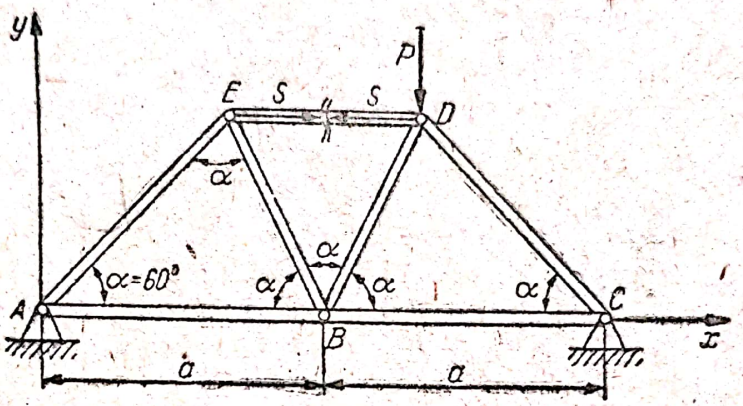


Fig. 7.9

Rezolvare. Secţionăm bara ED şi o substituim cu tensiunea S. Efortul S va crea un lucru mecanic virtual

$$S \cdot \delta \overline{ED} = S\delta(2a \cos \alpha) = -2aS \sin \alpha \cdot \delta\alpha.$$

Lucrul mecanic virtual al forţei P este

$$P \cdot \delta y_D = P \cdot \delta(a \sin \alpha) = Pa \cos \alpha \cdot \delta\alpha.$$

Lucrul mecanic virtual este

$$\delta L = -S \cdot \delta \overline{ED} - P \cdot \delta y_D = 0$$

sau

$$2Sa \sin \alpha \cdot \delta\alpha - Pa \cos \alpha \cdot \delta\alpha = 0$$

de unde

$$S = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6} P.$$

7.10. Se cere să se determine eforturile din barele *1*, *2* şi *3* ale grinzii cu zăbrele din fig. 7.10.

Rezolvare. Secţionăm bara *1* (fig. 7.10, a) şi o înlocuim cu efortul S_1. Partea superioară a grinzii se poate roti în jurul punctului O. Considerăm o rotaţie $\delta\theta$; principiul deplasărilor virtuale se scrie sub forma

$$\delta L = 2aP \cdot \delta\theta + 2aP \cdot \delta\theta + aS_1 \cdot \delta\theta = 0.$$

Din această ecuaţie se obţine

$$S_1 = -4P.$$

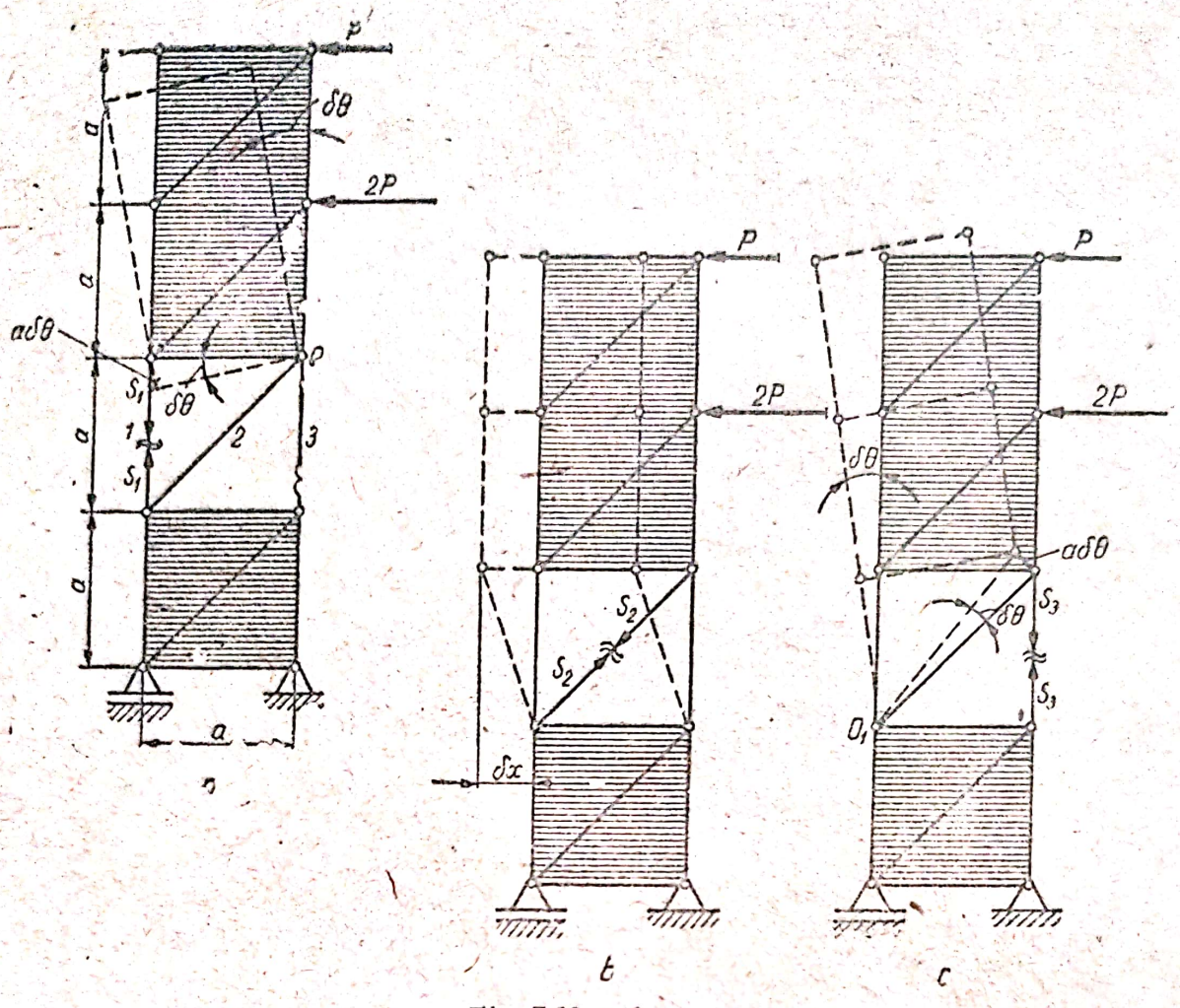


Fig. 7.10 a, b, c

Semnul minus care a apărut indică faptul că efortul în bara ED are sensul contrar celui indicat în figură.

Secționăm acum bara 2 (fig. 7.10, b) și introducem eforturile S_2; se realizează astfel o deplasare δx. Scriind din nou ecuația lucrului mecanic virtual, rezultă

$$\delta L = P \cdot \delta x + 2P \cdot \delta x + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \delta x = 0,$$

de unde

$$S_2 = -3\sqrt{2}\,P.$$

Secționînd bara 3 (fig. 7.10, c) și punînd pe direcția acesteia eforturile S_3 și $-S_3$, pentru o rotație în jurul articulației O_1, principiul deplasărilor virtuale se scrie

$$\delta L = 3aP \cdot \delta\theta + 2a \cdot 2P \cdot \delta\theta - a\sqrt{2}S_3 \cdot \delta\theta = 0.$$

Deducem, prin urmare, în urma simplificării cu $a \cdot \delta\theta \neq 0$,

$$S_3 = 7\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,P.$$

7.11. Un dispozitiv format din două bare de lungime l și de greutate P este suspendat în O și acționat de o forță orizontală H în B (fig. 7.11). Se cere să se afle unghiurile α_1 și α_2 pentru poziția de echilibru.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Observînd că

$$x = l(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$$

$$y_1 = \frac{l}{2} \cos \alpha_1$$

$$y_2 = l\left(\cos \alpha_1 + \frac{1}{2} \cos \alpha_2\right)$$

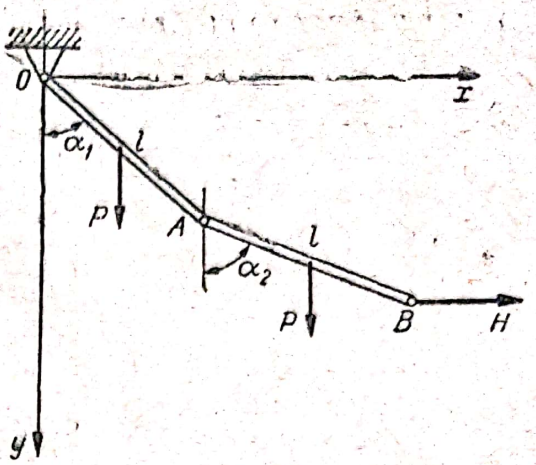


Fig. 7.11

și diferențiind, obținem

$$\delta x = l(\cos \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 + \cos \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2),$$

$$\delta y_1 = \frac{l}{2}(-\sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1) = -\frac{l}{2} \sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1,$$

$$\delta y_2 = -l\left(\sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2\right).$$

Aplicînd principiul lucrului mecanic virtual, avem

$$\delta L = H \cdot \delta x + P \cdot \delta y_1 + P \cdot \delta y_2 = 0.$$

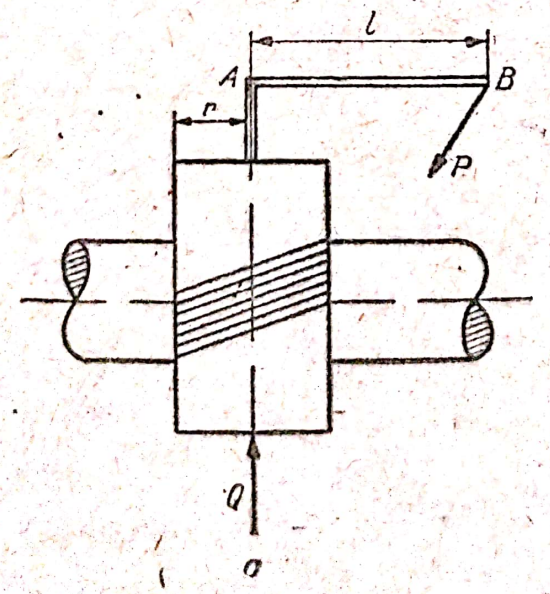
Făcînd înlocuirile necesare, obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2H}{3P}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2H}{P}.$$

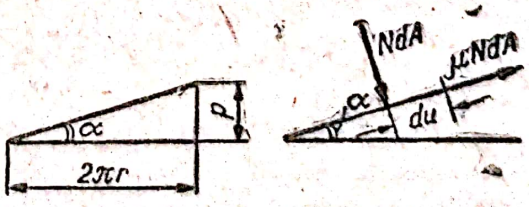
7.12. Să se deducă condiția de echilibru a șurubului (fig. 7.12, a) fără și cu frecare.

Rezolvare. Notînd cu r raza medie a șurubului și cu p — pasul, iar cu l lungimea pîrghiei la capătul căreia se aplică forța motoare **P** și prin **Q** forța rezistentă, principiul deplasărilor virtuale, în cazul echilibrului fără frecare, se scrie

$$\delta L = lP \cdot \delta \theta - Q \cdot \delta h = 0.$$



a



b

Fig. 7.12

Însă $\delta h = \frac{p}{2\pi}\delta\theta = r \cdot \delta\theta \operatorname{tg}\alpha$. Rezultă

$$lP \cdot \delta\theta - rQ \operatorname{tg}\alpha \cdot \delta\theta = 0$$

de unde

$$P = \frac{r}{l} Q \operatorname{tg}\alpha.$$

În cazul considerării frecării (fig. 7.12, b), deplasările virtuale sînt respectiv

$$\delta h = r \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \delta\theta, \quad \delta u = \frac{r}{\cos\alpha}\delta\theta.$$

Principiul deplasărilor virtuale capătă forma

$$\delta L = lP \cdot \delta\theta - Q \cdot \delta h - \mu \Sigma N_i \Delta A_i \cdot \delta u = 0.$$

Dintr-o deplasare virtuală pe direcția lui Q obținem

$$\Sigma N_i \Delta A_i = \frac{Q}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha}.$$

Rezultă:

$$P \cdot l \cdot \delta\theta - Qr \operatorname{tg}\alpha \cdot \delta\theta - \mu \frac{Q}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha} \frac{r \cdot \delta\theta}{\cos\alpha} = 0$$

de unde

$$\frac{lP}{rQ} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\mu}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Condiția de echilibru limită al șurubului este deci

$$P = \frac{r}{l} Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Presupunînd că echilibru se menține tot la limită, dar mișcarea are tendința să se producă în sens invers, relația forței P devine

$$P' = \frac{r}{l} Q \operatorname{tg}(\alpha - \varphi).$$

În cazul $\alpha > \varphi$, șurubul se deșurubează, dacă forța ce se aplică brațului AB scade sub P'.

Pentru $\alpha < \varphi$, P' devine negativ și deci șurubul rămîne strîns, chiar dacă lăsăm brațul AB liber ($P = 0$) — autofrînare.

7.13. Să se determine reacțiunile din reazemele A, B și D ale grinzii din fig. 7.13.

Rezolvare. Se suprimă articulația din A și se înlocuiește cu reacțiunea corespunzătoare; se dă apoi o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile rămase (fig. 7.13, b). Ecuația principiului deplasărilor virtuale are următoarea formă

$$\delta L = V_A l \cdot \delta\theta - 2P \frac{3l}{4}\delta\theta + 2P \frac{l}{2}\frac{\delta\theta}{2} - P \frac{l}{4}\frac{\delta\theta}{2} = 0.$$

Rezultă

$$V_A = \frac{9P}{8}.$$

Scanned with OKEN Scanner

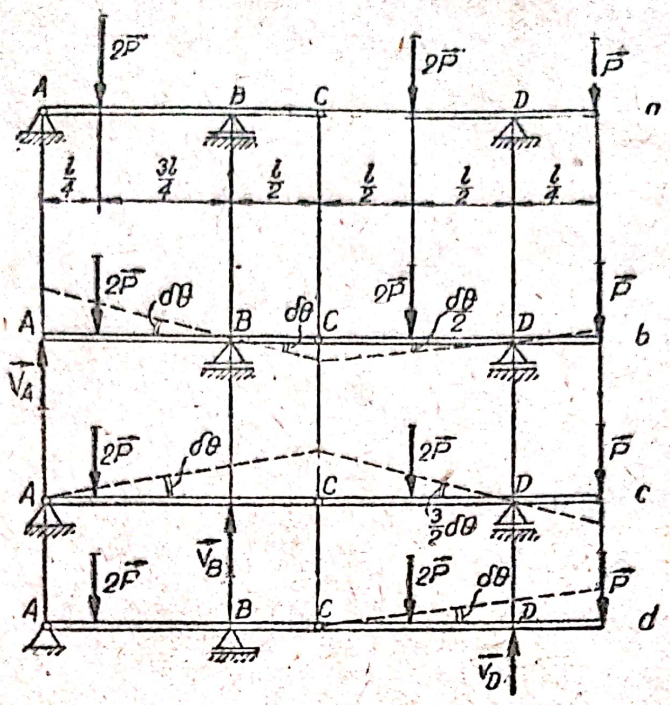


Fig. 7.13

Pentru reacţiunile din reazemele B şi D, se procedează analog. Astfel, pentru reacţiunea din reazemul B (fig. 7.13, c) ecuaţia principiului lucrului mecanic virtual va fi

$$\delta L = -2P\frac{l}{4}\delta\theta + V_B l \cdot \delta\theta - 2P\frac{l}{2}\frac{3}{2}\delta\theta + P\frac{l}{4}\frac{3}{2}\delta\theta = 0.$$

Rezultă valoarea reacţiunii V_B:

$$V_B = \frac{13P}{8}.$$

Pentru reacţiunea din reazemul D (fig. 7.13, d) ecuaţia principiului lucrului mecanic virtual se scrie

$$\delta L = -2P\frac{l}{2}\delta\theta + V_D l \cdot \delta\theta - P\frac{5l}{4}\delta\theta = 0$$

de unde

$$V_D = \frac{9P}{4}.$$

7.14. Să se determine reacţiunile şi eforturile din barele sistemului articulat din fig. 7.14, aflat sub acţiunea forţei verticale P:

Rezolvare. Pentru determinarea reacţiunilor din reazemul 5 şi a eforturilor din bare, se suprimă legăturile respective şi se înlocuiesc cu forţele de legătură corespunzătoare. Se dă sistemului o deplasare virtuală, compatibilă cu legăturile rămase şi se scrie condiţia ca lucrul mecanic virtual $\delta L = 0$. Pentru reacţiunea din reazemul 5 (fig. 7.14, a), avem:

$$\delta L = 2aV_5 \cdot \delta\theta - \frac{3a}{2}P \cdot \delta\theta = 0;$$

rezultă

$$V_5 = \frac{P}{4}.$$

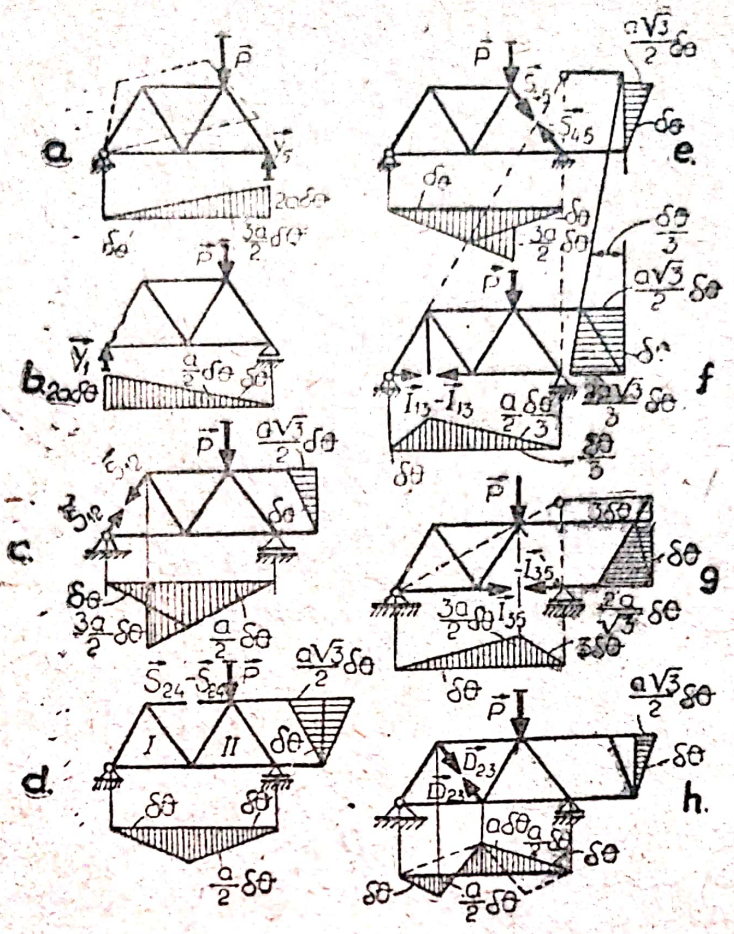


Fig. 7.14

Pentru efortul din bara *1—2* (fig. 7.14, c) se poate scrie

$$\delta L = S_{12}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3a}{2}\delta\theta + \frac{a}{2}P\cdot\delta\theta + S_{12}\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}\delta\theta = 0;$$

rezultă $$S_{12} = -\frac{P\sqrt{3}}{6}$$ (compresiune).

Pentru efortul din bara *2—4* (fig. 7.14, d) se scrie ecuația

$$\delta L = S_{24}\frac{a\sqrt{3}}{2}\delta\theta + S_{24}\frac{a\sqrt{3}}{2}\delta\theta + \frac{a}{2}P\cdot\delta\theta = 0$$

de unde $$S_{24} = -\frac{P\sqrt{3}}{6}$$ (compresiune).

Pentru efortul din bara *4—5* (fig. 7.14, e) avem

$$\delta L = S_{45}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3a}{2}\delta\theta + P\frac{3a}{2}\delta\theta + S_{45}\frac{a\sqrt{3}}{2}\delta\theta = 0;$$

se obține $$S_{45} = -\frac{P\sqrt{3}}{2}$$ (compresiune).

Pentru efortul din bara *1—3* (fig. 7.14, f), ecuaţia principiului lucrului mecanic virtual este

$$\delta L = P\frac{a}{2}\frac{\delta\theta}{3} - I_{13}2a\sqrt{3}\,\frac{\delta\theta}{3} = 0.$$

Rezultă $$I_{13} = \frac{\sqrt{3}P}{12}.$$

Pentru efortul din bara *3—5* (fig. 7.14, g) se poate scrie ecuaţia

$$\delta L = -P\frac{a}{3}\cdot 3\cdot\delta\theta + I_{35}\frac{2a}{\sqrt{3}}3\cdot\delta\theta = 0,$$

de unde $$I_{35} = \frac{\sqrt{3}}{4}P.$$

Pentru efortul din bara *2—3* (fig. 7.14, h) vom avea

$$\delta L = -P\frac{a\delta\theta}{2} + D_{23}\frac{\sqrt{3}}{5}a\cdot\delta\theta + D_{23}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{2}\delta\theta + D_{23}\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}\delta\theta = 0.$$

Rezultă efortul căutat: $D_{23} = \frac{\sqrt{3}P}{6}$.

7.15. Un mecanism este alcătuit din şase bare, egale două cîte două. Articulaţia O este fixă; articulaţiile D, E şi F pot culisa pe dreapta Ox. Barele sînt articulate între ele în A, B, C, D şi E. În A, B şi C sînt aplicate respectiv forţele $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ şi $\mathbf{P}_3$ verticale, iar în F, forţa orizontală $\mathbf{H}$. Se cere să se determine unghiurile α, β şi γ, corespunzătoare configuraţiei din figură (fig. 7.15).

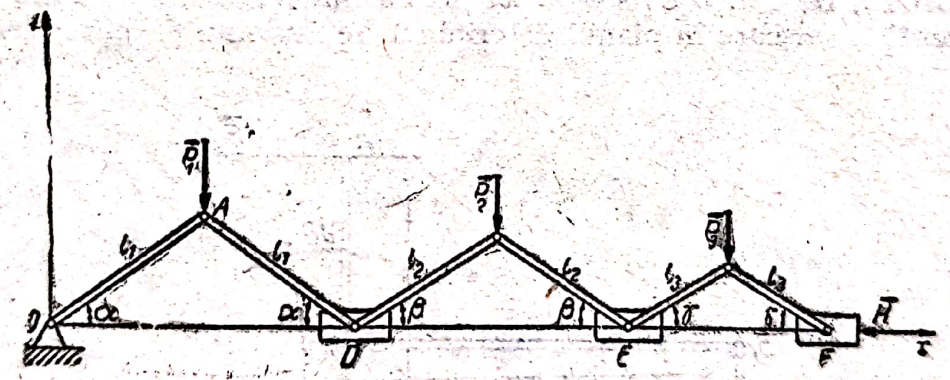


Fig. 7.15

Rezolvare. Ecuaţia lucrului mecanic virtual se scrie

$$\delta L = -P_1\cdot\delta y_A - P_2\cdot\delta y_B - P_3\cdot\delta y_C - H\cdot\delta x_F = 0.$$

Ţinînd seama că

$$y_A = l_1\sin\alpha;\ y_B = l_2\sin\beta;\ y_C = l_3\sin\gamma$$
$$x_F = 2l_1\cos\alpha + 2l_2\cos\beta + 2l_3\cos\gamma,$$

rezultă.

$$\delta y_A = l_1\cos\alpha\cdot\delta\alpha;\ \delta y_B = l_2\cos\beta\cdot\delta\beta,\ \delta x_F = -2l_1\sin\alpha\cdot\delta\alpha - $$
$$-2l_2\sin\beta\cdot\delta\beta - 2l_3\sin\gamma\cdot\delta\gamma;\ \delta y_C = l_3\cos\gamma\cdot\delta\gamma.$$

Înlocuind în ecuația lucrului mecanic virtual, se obține

$$-P_1 l_1 \cos\alpha \cdot \delta\alpha - P_2 l_2 \cos\beta \cdot \delta\beta - P_3 l_3 \cos\gamma \cdot \delta\gamma -$$
$$- H(-2l_1 \sin\alpha \cdot \delta\alpha - 2l_2 \sin\beta \cdot \delta\beta - 2l_3 \sin\gamma \cdot \delta\gamma) = 0$$

sau, în urma grupării termenilor,

$$(-P_1 l_1 \cos\alpha + 2Hl_1 \sin\alpha) \cdot \delta\alpha + (-P_2 l_2 \cos\beta + 2Hl_2 \sin\beta) \cdot \delta\beta +$$
$$+ (-P_3 l_3 \cos\gamma + 2Hl_3 \sin\gamma) \cdot \delta\gamma = 0.$$

Anulînd parantezele, deducem

$$-P_1 l_1 \cos\alpha + 2Hl_1 \sin\alpha = 0,$$
$$-P_2 l_2 \cos\beta + 2Hl_2 \sin\beta = 0,$$
$$-P_3 l_3 \cos\gamma + 2Hl_3 \sin\gamma = 0.$$

Se obține

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_1}{2H}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{P_2}{2H}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{P_3}{2H}.$$

7.15. Bara de presare a unei mașini de șlefuit cu bandă este acționată prin sistemul redat în fig. 7.16. Cunoscînd forța de presare P (se determină în funcție de presiunea p de lucru și de suprafața S dintre banda abrazivă și piesă și anume $P = p \cdot S$) și coeficientul de frecare μ între bara CC_1 și banda abrazivă, se cere forța F necesară pentru a realiza presiunea de regim p.

Rezolvare. Pentru o deplasare virtuală (rotire cu unghiul $\delta\theta$ a barei AOC), bara $B_1O_1C_1$ se rotește tot cu unghiul $\delta\theta$, iar barele BB_1 și CC_1 execută o mișcare în planul determinat de sistemul de bare, denumită

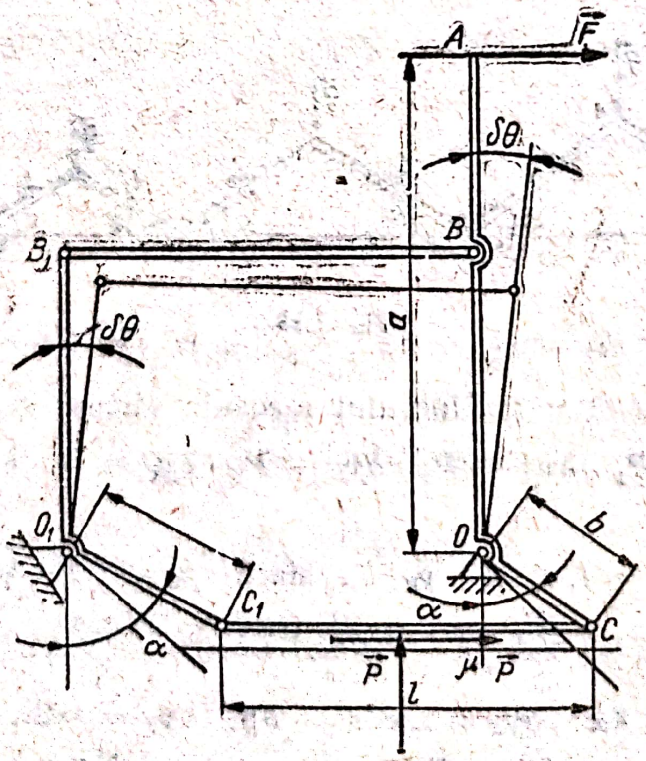


Fig. 7.16

mișcare plan-paralelă. Ecuația principiului lucrului mecanic virtual se scrie

$$\delta L = aF \cdot \delta\theta - bP \sin\alpha \cdot \delta\theta + \mu bP \cos\alpha \cdot \delta\theta = 0.$$

Deplasarea virtuală $\delta\theta$ fiind diferită de zero, se simplifică ecuația cu $\delta\theta$, rezultînd

$$aF - bP \sin\alpha - \mu bP \cos\alpha = 0$$

de unde rezultă

$$F = \frac{b(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{a} P.$$

7.17. Două bare de lungime l și greutate G sînt articulate în O_1 și O_2 ($O_1O_2 = l$). De extremitățile A_1 și A_2 este legat un arc spiral, care în stare neîntinsă are lungime l. Constanta elastică a arcului este k (fig. 7.17). Să se determine unghiul θ pentru poziția de echilibru.

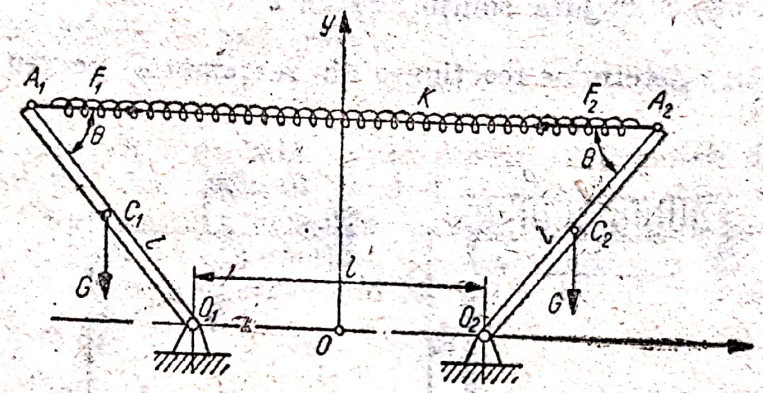


Fig. 7.17

Rezolvare. Lungimea arcului este

$$A_1A_2 = l + 2l\cos\theta.$$

Arcul, sub acțiunea forțelor, capătă o săgeată egală cu

$$A_1A_2 - l = 2l\cos\theta.$$

Forțele elastice care apar în arc au valoarea

$$F_1 = F_2 = 2kl\cos\theta.$$

Ecuația principiului lucrului mecanic virtual are următoarea formă

$$\delta L = -G \cdot \delta y_{C_1} - G\delta y_{C_2} + F \cdot \delta x_{A_1} - F_2 \cdot \delta y_{A_2} = 0.$$

Observînd că: $y_{C_1} = y_{C_2} = \frac{l}{2}\sin\theta$; $x_{A_1} = -\frac{l}{2} - l\cos\theta$; $x_{A_2} = \frac{l}{2} + l\cos\theta$, și diferențiind, se obține

$$\delta y_{C_1} = \delta y_{C_2} = \frac{l}{2}\cos\theta \cdot \delta\theta; \quad \delta x_{A_1} = l\sin\theta \cdot \delta\theta; \quad \delta x_{A_2} = -l\sin\theta \cdot \delta\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în ecuaţia principiului lucrului mecanic virtual, avem

$$\delta L = -G\frac{l}{2}\cos\theta\cdot\delta\theta - G\frac{l}{2}\cos\theta\cdot\delta\theta + 2kl\cos\theta\cdot l\cdot\sin\theta\cdot\delta\theta +$$

$$+ 2kl\cos\theta\cdot l\cdot\sin\theta\cdot\delta\theta = 0.$$

Simplificînd cu $\delta\theta \neq 0$, rezultă

$$-G\cos\theta + 4kl\sin\theta\cos\theta = 0$$

de unde $\cos\theta = 0$ şi deci $\theta = \frac{\pi}{2}$ şi $\sin\theta = \frac{G}{4kl}$; deci $\theta = \arcsin\frac{G}{4kl}$.

Pentru ca cea de-a doua soluţie să fie posibilă, trebuie ca să fie îndeplinită condiţia

$$G \leqslant 4kl.$$

Dacă

$$G > 4kl$$

nu există decît o singură soluţie: $\theta = \pi/2$

7.18. Să se determine reacţiunea din reazemul C, pentru grinda cotită din fig. 7.18.

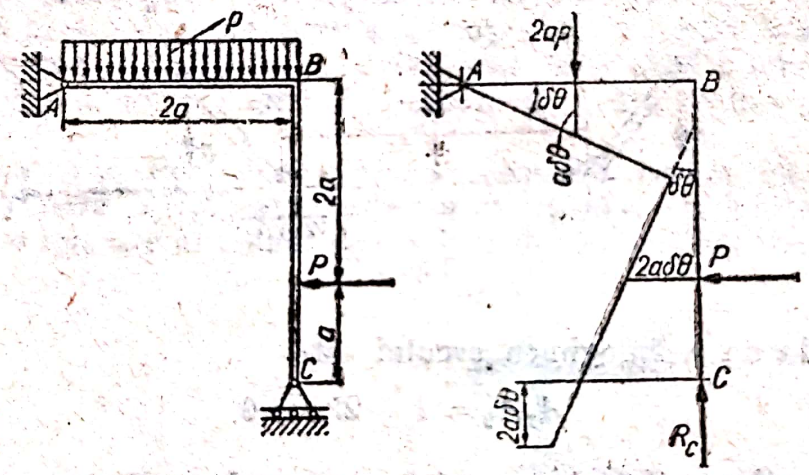


Fig. 7.18

Rezolvare. Considerînd grinda rigidă, aceasta se va deplasa cum se poate vedea în figură; notînd unghiul de rotire virtuală prin $\delta\theta$, ecuaţia principiului lucrului mecanic virtual va fi

$$\delta L = 2apa\cdot\delta\theta + 2aP\cdot\delta\theta - 2aR_C\cdot\delta\theta = 0.$$

Simplificînd cu $\delta\theta \neq 0$, deducem

$$R_C = P + ap.$$

C. PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

7.19. O prismă metalică A, se află pe un plan orizontal BC, între două pene isoscele, cu unghiurile la vîrf 2α şi 2β. Asupra primei pene acţionează forţa verticală P, iar asupra celei de-a doua pene, forţa verticală Q

(fig. 7.19). Utilizînd principiul lucrului mecanic virtual, se cere să se determine relaţia dintre forţele P şi Q, pentru condiţia de echilibru a sistemului

R. $P = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} Q$.

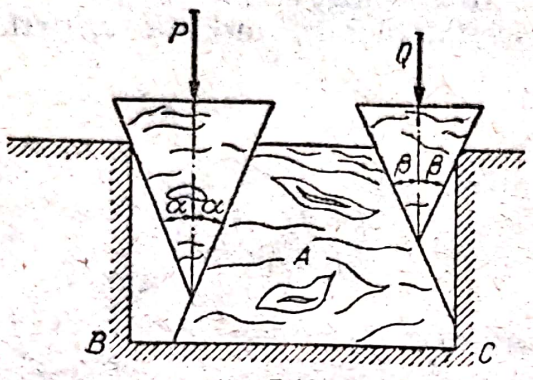


Fig. 7.19

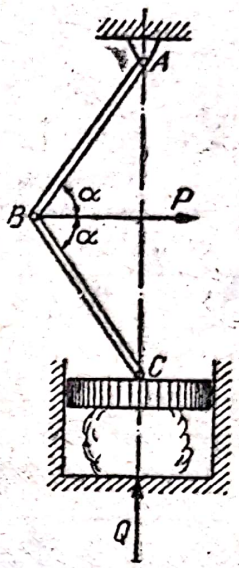


Fig. 7.20

7.20. Un dispozitiv de presare are schema cinematică din fig. 7.20. Asupra articulaţiei din mijlocul B al dispozitivului, acţionează o forţă orizontală **P**. Cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual, să se determine forţa **Q**, aplicată în punctul C şi orientată de-a lungul dreptei CA, care să echilibreze forţa **P**, cunoscînd că $AB = BC$ şi $\sphericalangle ABC = 2\alpha$.

R. $Q = \frac{1}{2} P \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

7.21. O presă manuală cu şurub este acţionată de către două forţe orizontale **P** şi **−P**, perpendiculare pe mînerul presei, lungimea fiecărui mîner fiind l, iar pasul şurubului h. Să se determine, cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual, forţa de presare Q (fig. 7.21).

R. $Q = 4\pi \frac{l}{h} P$.

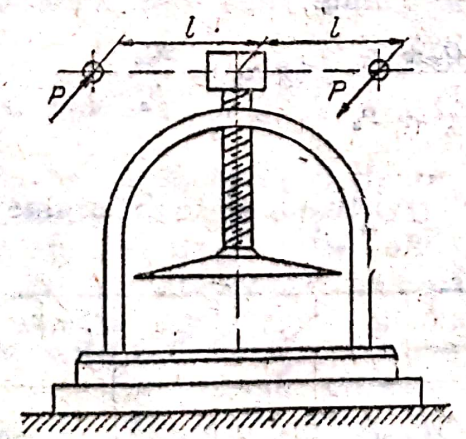


Fig. 7.21

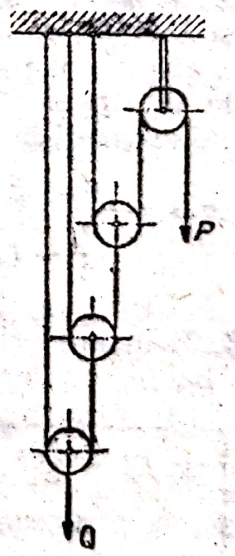


Fig. 7.22

7.22. Cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual, se cere să se determine forța **P**, necesară ridicării sarcinii Q, pentru sistemul de scripeți din fig. 7.21, neglijînd frecările și rigiditatea cablului.

R. $P = \frac{1}{8}Q$.

7.23. Trei bare grele, confecționate din același material, sînt articulate între ele; extremitățile A și B sînt situate pe aceeași orizontală (fig. 7.23). Să se determine relația dintre unghiurile α, β și γ pentru poziția de echilibru, utilizînd principiul lucrului mecanic virtual.

R. $4 \operatorname{tg} \alpha - 3 \operatorname{tg} \beta - 7 \operatorname{tg} \gamma = 0$.

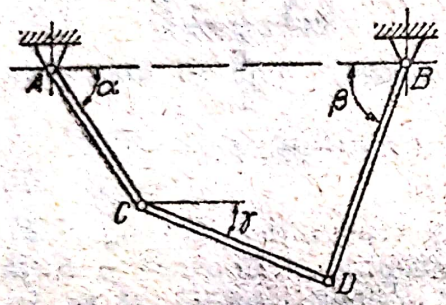


Fig. 7.23

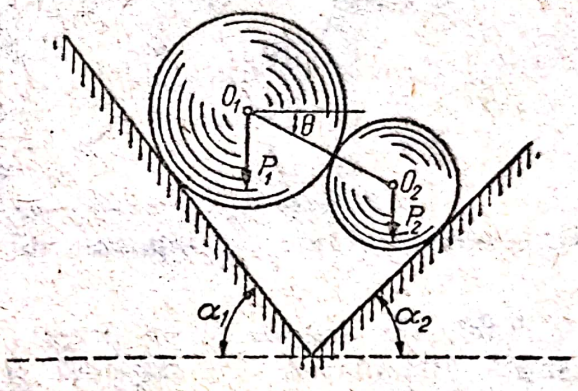


Fig. 7.24

7.24. Două sfere omogene, confecționate din oțel, avînd greutățile P_1 și P_2, se reazemă pe două plane înclinate, care fac cu orizontala unghiurile α_1 și α_2. Aplicînd principiul deplasărilor virtuale, să se determine poziția lor de echilibru, exprimată prin unghiul θ (fig. 7.24).

R. $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{P_1 \operatorname{ctg} \alpha_2 - P_2 \operatorname{ctg} \alpha_1}{P_1 + P_2}$.

7.25. Se dă un sistem de trei bare grele și omogene, de greutăți P_1, P_2, P_3 și lungimi l_1, l_2 și l_3 (fig. 7.25). Barele sînt articulate în punctul fix O și între ele în punctele A și B. Sistemul este acționat și de forțele orizontale $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ și $\mathbf{Q}_3$. Cu ajutorul principiului deplasărilor virtuale, să se determine condiția de echilibru a sistemului.

R. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\frac{P_1}{2} + P_2 + P_3}$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = \dfrac{Q_2 + Q_3}{\frac{P_2}{2} + P_3}$; $\operatorname{tg} \alpha_3 = \dfrac{2Q_3}{P_3}$.

7.26. Utilizînd principiul deplasărilor virtuale, să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 7.26.

R.

Bara	S_{1-2}	S_{2-3}	S_{3-4}	S_{5-6}	S_{6-7}	S_{1-7}	S_{3-7}	S_{2-7}	S_{3-6}	S_{3-6}	S_{4-7}
Efortul	F	F	$3F$	$-6F$	$-3F$	$\sqrt{2F}$	$2\sqrt{2F}$	$3\sqrt{2F}$	$-F$	$-3F$	0

Scanned with OKEN Scanner

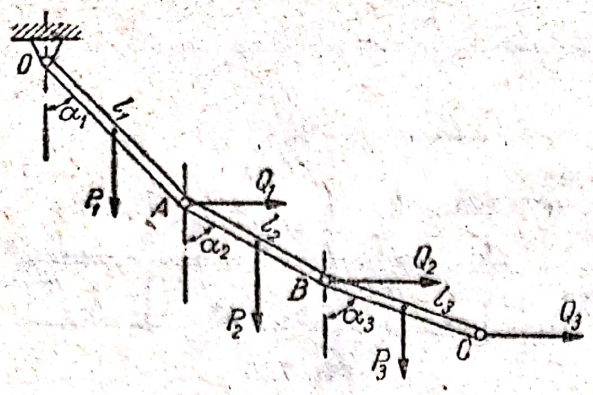


Fig. 7.25

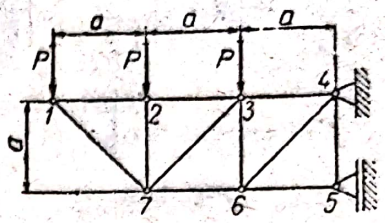


Fig. 7.26

7.27. Să se determine poziţia centrului de greutate pentru greutatea B şi dependenţa dintre greutăţile A şi B, suspendate prin sistemul de scripeţi din fig. 7.27, folosind principiul lucrului mecanic virtual. Sistemul se găseşte în echilibru.

R. $P_B = 5P_A$. Centrul de greutate pentru greutatea B, împarte distanţa între punctele de suspendare în raportul 4 : 1.

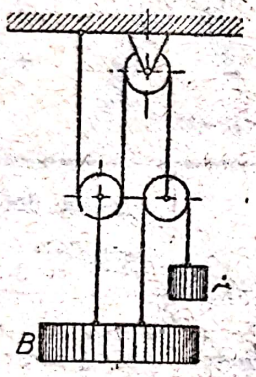


Fig. 7.27

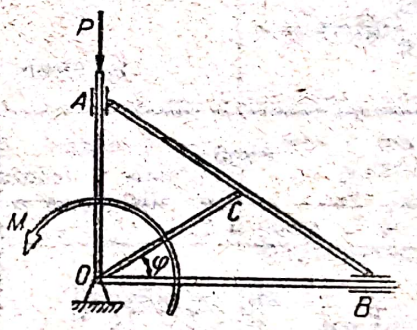


Fig. 7.28

7.28. Pe culisa A a mecanismului elipsograf din fig. 7.28 se aplică forţa $\mathbf{P}$ dirijată de-a lungul glisierei către centrul de rotaţie O al manivelei OC. Ce moment de rotaţie trebuie aplicat manivelei OC, pentru ca mecanismul să fie în echilibru în condiţia în care manivela OC formează cu glisiera culisei B un unghi φ?

Mecanismul este montat în plan orizontal, fiind cunoscute:

$$\overline{CO} = \overline{AC} = \overline{CB} = l$$

R. $M = 2l \cdot P \cos \varphi$.

7.29. Două vagonete sînt ţinute în echilibru de greutate P_1 pe suprafeţele înclinate faţă de orizontală cu unghiurile α şi β. Vagonetele sînt fixate de capetele unui cablu ce trece de la vagonetul P_1 pe după scripetele O_1, care se află montat pe un ax orizontal, apoi la scripetele mobil O, ce poartă greutatea P şi apoi pe după scripetele O_2, situat pe axul scripetelui O_1, la vagonetul P_2. Să se determine greutăţile P_1 şi P_2, utilizînd principiul lucrului mecanic virtual; frecările se neglijează (fig. 7.29).

R. $P_1 = \dfrac{P}{2 \sin \alpha}$; $P_2 = \dfrac{P}{2 \sin \beta}$.

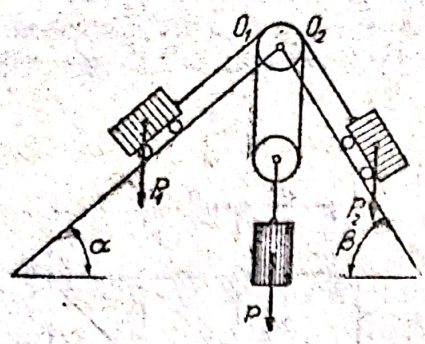


Fig. 7.29

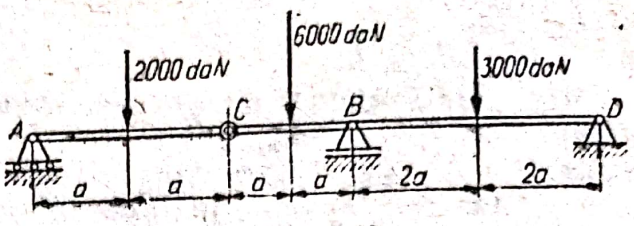


Fig. 7.30

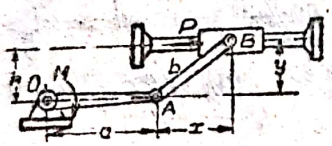
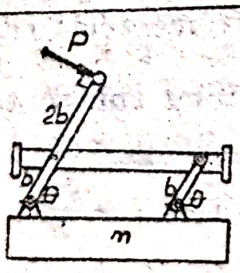
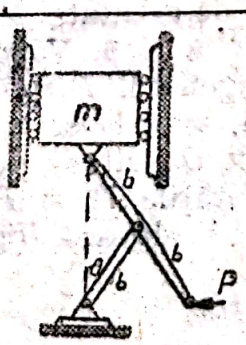
7.30. O grindă AD, sprijinită pe trei reazeme (grindă Gerber) este formată din două grinzi articulate în punctul C. Asupra grinzii acţionează forţe egale cu 2000 daN, 6000 daN şi 3000 daN. Dimensiunile fiind date în fig. 7.30, aplicînd principiul lucrului mecanic virtual, să se determine reacţiunile din punctele A, B şi D.

R. $R_A = 1000$ daN; $R_B = 10.500$ daN; $R_C = -500$ daN.

7.31. Să se rezolve problemele din tabelul 7.31.

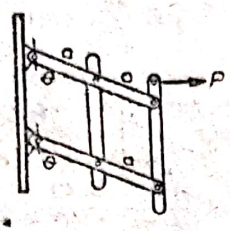
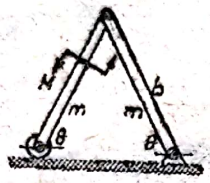
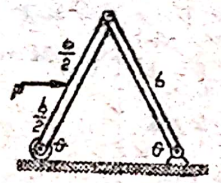
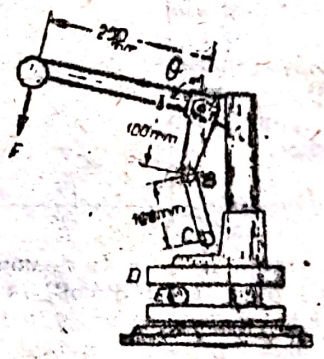
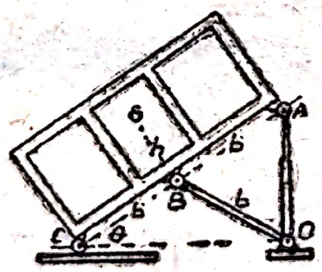
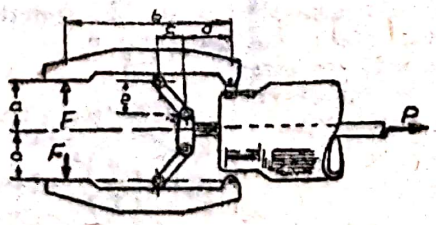
Tabelul 7.31

Probleme recapitulative [26]

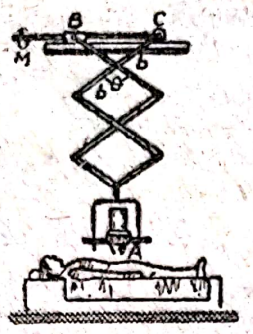
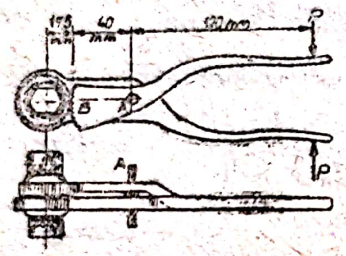
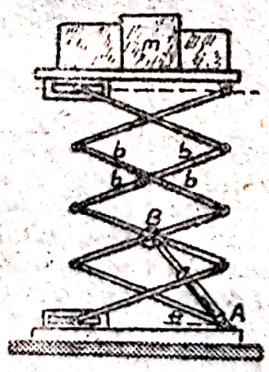
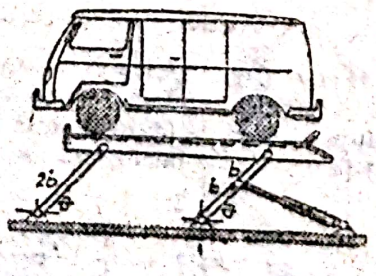
Nr. crt.	Figura	Se cunoaşte	Să se determine
0	1	2	3
1		Boxa OA se găseşte în poziţie orizontală. Se neglijează masele în mişcare.	Forţa P necesară în ghidaj pentru ca bara OA să nu se rotească sub acţiunea cuplului M. R. $P = \frac{xM}{ah}$.
2		Masele elementelor de legătură se neglijează în raport cu masa m.	Valoarea unghiului θ, în poziţia de echilibru, pentru o forţă dată P. R. $\theta = \arccos \frac{2P}{mg}$.
3		Mecanismul este utilizat pentru a poziţiona masa m între ghidajele verticale.	Expresia forţei orizontale P, necesară echilibrării masei m pentru orice valoare a unghiului θ. R. $P = mg\ tg\ \theta$.

Scanned with OKEN Scanner

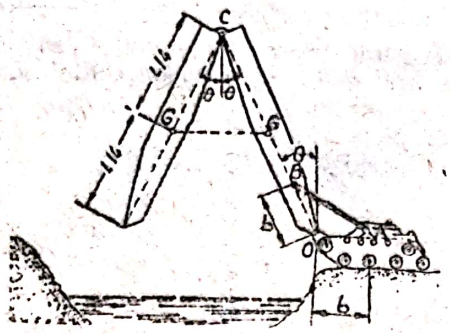
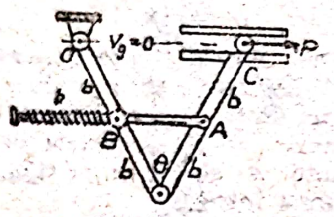
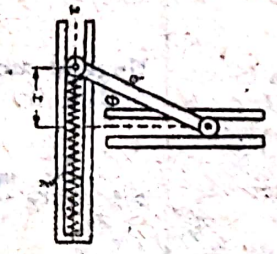
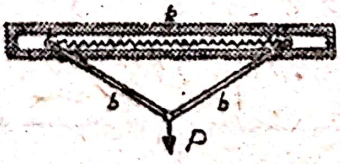
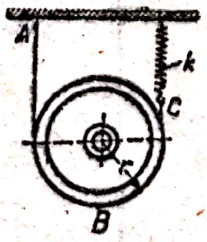
Tabelul 7.31 (continuare)

0	1	2	3
4		Fiecare dintre cele patru bare este omogenă și are masa m.	Forța orizontală P necesară pentru a le susține în poziția din figură. R. $P = \frac{5}{2} mg \operatorname{tg} \theta$.
5		Fiecare dintre barele cadrului din figură este omogenă, are masa m și lungimea b. Pe tija din stînga este aplicat un cuplu de moment M.	Unghiul θ în funcție de cuplul M. R. $\theta = \arccos \frac{M}{mgb}$.
6		Se înlocuiește cuplul M din problema 7.31—5 cu forța orizontală P ca în figură.	Unghiul θ în poziția de echilibru. R. $\theta = \operatorname{arctg} \frac{2mg}{3P}$.
7		Glisorul (berbecul) presei mecanice D alunecă, cu frecare neglijabilă, pe coloana verticală fixă.	Forța F necesară pe mîner pentru a produce o forță de compresiune R pe cilindrul E la orice unghi θ. R. $F = 0{,}8\ R \cos \theta$.
8		Cilindrul hidraulic OA și tija OB realizează panta containerului de masă m cu centrul de greutate în G. Rola C se poate deplasa pe orizontală pe măsură ce tija iese din cilindru.	Forța P necesară în cilindru pentru a menține echilibrul sistemului sub un unghi impus θ. R. $P = \frac{mg}{2}\left(1 - \frac{h}{b} \operatorname{tg} \theta\right)$.
9		Cleștele din figură dezvoltă o forță de strîngere F ca rezultat al efortului P din tijă.	Forța F în funcție de efortul P pentru configurația dată în care fălcile sînt paralele. R. $F = \frac{P}{2} \frac{e(d+c)}{bc}$.

Tabelul 7.31 (continuare)

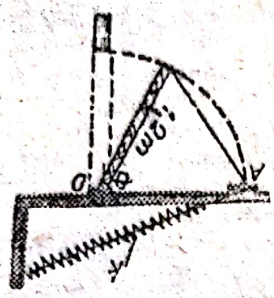
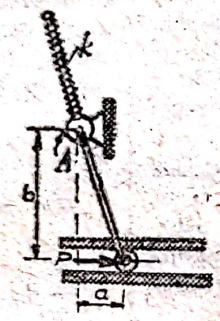
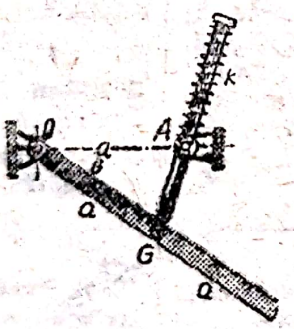
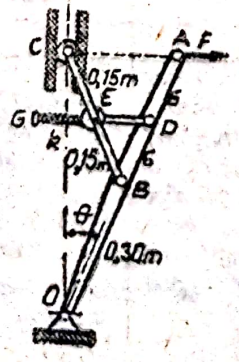
0	1	2	3
10		Contorul A al dispozitivului pentru determinarea iradierii corpului uman are masa m şi este poziţionat prin răsucirea şurubului, cu pasul L, de către momentul de torsiune M, care controlează distanţa BC.	Relaţia dintre momentul de torsiune M şi greutatea mg a contorului A pentru valori date ale mărimilor b şi θ. Se neglijează toate forţele de frecare şi masele tijelor în comparaţie cu masa m. R. $M = \frac{5mgL}{4\pi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$.
11		Cheia fixă anticuplu este proiectată pentru a fi utilizată de un cosmonaut care nu are o platformă stabilă care să-l susţină în timp ce el strînge un bulon. Bolţul A intră într-o gaură alăturată sistemului care conţine bulonul de răsucit. Rotaţii succesive ale angrenajului dinţat şi ale părţii acţionate cu mîna răsucesc articulaţia, într-o singură direcţie, prin intermediul unui mecanism cu clichet.	Cuplul M produs de cheia fixă anticuplu, dacă forţa de acţionare este $P = 150$ N. R. $M = 7{,}88$ N·m
12		Platforma din figură ridică încărcături pînă la cala unui avion. Masa sistemului de bare este neglijabilă în raport cu masa m a încărcăturii.	Forţa de compresiune F din cilindrul de acţionare AB, în funcţie de unghiul θ. R. $F = \frac{mg\sqrt{1 + 8\sin^2\theta}}{\sin\theta}$.
13		La platforma pentru ridicarea autovehiculelor se cunosc dimensiunile constructive. Masa sistemului de ridicare este neglijabilă în raport cu masa m a vehiculului.	Forţa de compresiune F din cilindrul de acţionare, în funcţie de unghiul θ. R. $F = 2\,mg \operatorname{ctg}\theta \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{L}\right)^2 - 2\frac{b}{L}\cos\theta}$.

Scanned with OKEN Scanner

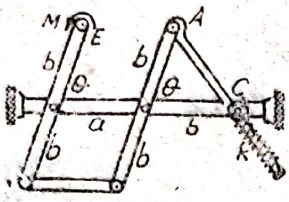
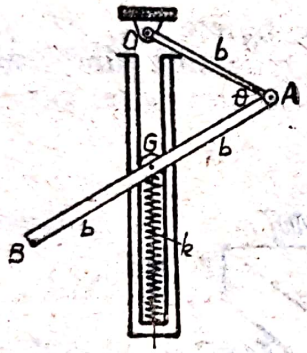
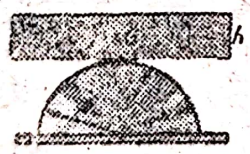
0	1	2	3
14		Podul foarfecă militar, cu deschiderea L, este lansat de pe un tanc prin intermediul unui cilindru hidraulic AB. Fiecare dintre cele două secțiuni identice are masa m, cu centrul de masă în G. Un mecanism intern, plasat în C, menține unghiul 2θ dintre cele două secțiuni.	Relația dintre forța F din cilindrul hidraulic și unghiul θ, pentru poziția de echilibru. R. $F = \frac{mgL\sqrt{2}}{b} \cdot$ $\cdot \operatorname{tg} \theta \sqrt{1 + \sin \theta}.$
15		Cele două bare omogene, fiecare de masă m se află în planul vertical și sînt legate elastic ca în figură. Pe măsură ce unghiul θ dintre bare crește odată cu aplicarea forței orizontale P, tija, care este legată în A și trece printr-o garnitură pivotantă în B, comprimă arcul a cărui constantă elastică este k.	Forța P care va produce echilibrul la un unghi oarecare θ, dacă arcul este necomprimat în poziția în care $\theta = 0$. R. $P = k\, b \sin \frac{\theta}{2} +$ $+ \frac{1}{2} mg \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot$
16		Capetele barei omogene, de masă m, alunecă liber în ghidajele orizontal și vertical, ca în figură. Arcul este nedeformat pentru $x = 0$ și are constanta elastică k.	Condițiile de stabilitate pentru poziția de echilibru. R. Echilibru stabil: $k > mg/2b$; echilibru nestabil: $k < mg/2b$.
17		Două bare de masă neglijabilă, sînt legate elastic ca în figură. Lungimea arcului în stare necomprimată este $2b$ și constanta sa elastică este k.	Forța P necesară pentru echilibru, în funcție de unghiul oarecare θ. R. $P = 4kb(1 - \cos \theta) \operatorname{tg} \theta.$
18		Roata omogenă, de masă m, este susținută în plan vertical de banda ABC și de un arc cu constanta elastică k. Roata este eliberată din poziția în care forța în arc este nulă.	Unghiul θ, în sensul acelor de ceasornic, cu care roata se rotește din poziția inițială pînă la poziția finală de echilibru. R. $\theta = \frac{mg}{4kr} \cdot$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7.31 (continuare)

0	1	2	3
19		Paleta omogenă pentru ventilaţie are masa de 50 kg. Arcul are constanta $k = 180$ N/m şi este nedeformat pentru $\theta = 0$.	Unghiul θ pentru poziţia de echilibru. R. $\theta = 48{,}6°$.
20		Cînd $a = 0$ arcul avînd constanta elastică k este necomprimat. La creşterea lui tija alunecă prin bucşa basculantă A şi arcul se comprimă între capătul tijei şi bucşe.	Forţa P necesară pentru a produce o deplasare dată. Se neglijează forţele de frecare şi masa tijei. R. $P = \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}\right) ka.$
21		Bara omogenă din figură are masa m şi centrul de greutate în G. Ea se roteşte în jurul punctului O şi balansează în plan vertical. Arcul avînd constanta elastică k este nedeformat pentru $\theta = 0$.	Unghiul ascuţit θ în poziţia de echilibru. R. $\theta = \operatorname{arctg} \frac{mg}{ka}$.
22		Tija DG trece prin bucşa pivotantă din E şi comprimă arcul a cărui constantă elastică este $k = 4{,}38 \cdot 10^3$ N/m.	Pentru forţa orizontală $F = 222{,}5$ N determinaţi unghiul θ de echilibru. R. $\theta = 19{,}5°$.

Tabelul 7.31 (continuare)

0	1	2	3
23		La mecanismul din figură tija AC culisează prin bucşa pivotantă din lagărul C şi comprimă arcul atunci cînd un cuplu de moment M este aplicat barei E. Arcul cu constanta elastică k, este necomprimat în poziţia pentru care $\theta = 0$.	Unghiul θ în poziţia de echilibru, dacă se neglijează masele barelor. R. $\theta = \arcsin \frac{M}{kb^2}$.
24		Articulaţia, aflată la centrul de masă G al barei AB de masă m, se mişcă într-un ghidaj vertical. Bara OA are masa neglijabilă, iar arcul, cu constanta elastică k, nu este comprimat la $\theta = 0$.	Poziţiile de echilibru şi stabilitatea lor. R. $\theta = \pi$, stabil dacă $k < \frac{mg}{2b}$ şi nestabil dacă $k > \frac{mg}{2b}$ $\theta = \arcsin \frac{mg}{2kb}$ stabil pentru $k > \frac{mg}{2b}$.
25		Un bloc omogen rectangular, de înălţime h şi masa m, este centrat în poziţie orizontală pe suprafaţa cilindrică fixă de rază r.	Valoarea limită a lui h pentru stabilitate. R. $h < 2r$.

Scanned with OKEN Scanner

8

Probleme recapitulative

A. PROBLEME REZOLVATE

8.1. Asupra nodului C, în care se întîlnesc barele OC, AC și BC este aplicată forța $\mathbf{F} = (200\mathbf{i} + 700\mathbf{j} - 100\mathbf{k})$ daN, lungimile fiind exprimate în metri. Se cere să se determine eforturile din cele trei bare, care sînt dirijate pe direcțiile barelor (fig. 8.1, a, b).

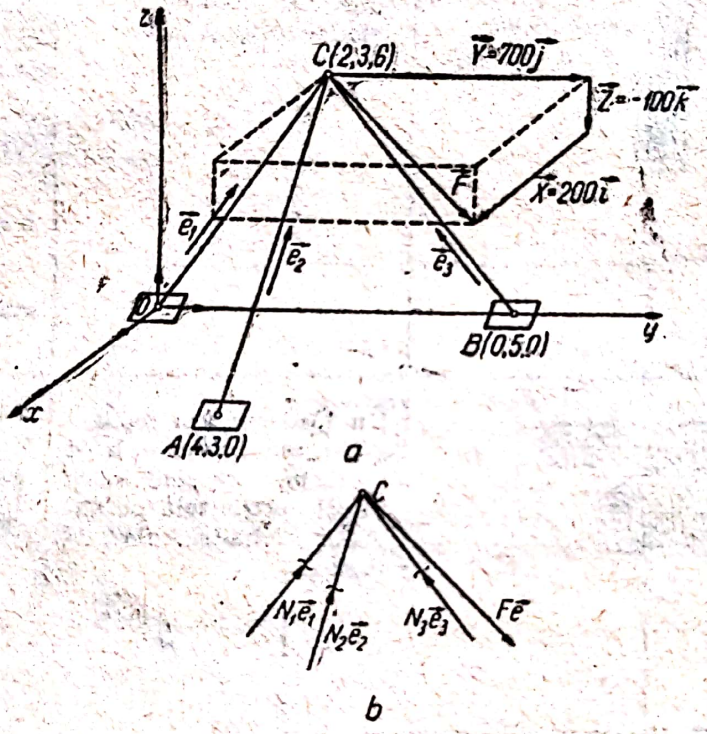


Fig. 8.1

Rezolvare. Notînd prin $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ versorii direcțiilor **OC**, **AC**, **BC** și cu $\mathbf{e}$ versorul forței **F**, valorile eforturilor din cele trei bare, N_1 N_2 și N_3 se deduc din ecuația vectorială

$$N_1\mathbf{e}_1 + N_2\mathbf{e}_2 + N_3\mathbf{e}_3 + F\mathbf{e} = 0, \tag{8.1}$$

în care scalarul F este pozitiv, deoarece $\mathbf{e}$ are sensul forței **F**. Multiplicînd scalar ecuația (8.1) pe rînd, cu produsele vectoriale: $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ și $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, rezultă necunoscutele problemei

$$N_1 = -\frac{\mathbf{e}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} F;\quad N_2 = -\frac{\mathbf{e}(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)}{\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)} F;\quad N_3 = -\frac{\mathbf{e}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}{\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)} F. \tag{8.2}$$

Utilizînd expresia analitică a produsului mixt, prima din relațiile (8.2) se scrie sub forma

$$N_1 = -F \frac{\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{vmatrix}}. \qquad (8.3)$$

Componentele e_{1x}, e_{1y}, e_{1z} sînt egale cu cosinusurile unghiurilor pe care vectorul **OC** le formează cu sensurile pozitive ale axelor de coordonate. Calculînd :

$$|\mathbf{OC}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$$

rezultă

$$e_{1x} = \cos(\mathbf{OC}, \mathbf{i}) = \frac{x_C - x_O}{|\mathbf{OC}|} = \frac{2}{7}; \quad e_{1y} = \cos(\mathbf{OC}, \mathbf{j}) = \frac{y_C - y_O}{|\mathbf{OC}|} = \frac{3}{7},$$

$$e_{1z} = \cos(\mathbf{OC}, \mathbf{k}) = \frac{z_C - z_O}{|\mathbf{OC}|} = \frac{6}{7}.$$

În mod analog, se obține

$$|\mathbf{AC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (3-3)^2 + (6-0)^2} = 2\sqrt{10};$$

$$e_{2x} = \frac{x_C - x_A}{|\mathbf{AC}|} = -\frac{1}{\sqrt{10}}; \quad e_{2y} = \frac{y_C - y_A}{|\mathbf{AC}|} = 0; \quad e_{2z} = \frac{z_C - z_A}{|\mathbf{AC}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Rezultă, de asemenea

$$|\mathbf{BC}| = \sqrt{(2-0)^2 + (3-5)^2 + (6-0)^2} = 2\sqrt{11};$$

$$e_{3x} = \frac{x_C - x_B}{|\mathbf{BC}|} = \frac{1}{\sqrt{11}}; \quad e_{3y} = \frac{y_C - y_B}{|\mathbf{BC}|} = -\frac{1}{\sqrt{11}}; \quad e_{3z} = \frac{z_C - z_B}{|\mathbf{BC}|} = \frac{3}{\sqrt{11}};$$

$$e_x = \cos(\mathbf{F}, \mathbf{i}) = \frac{X}{F} = \frac{200}{F}; \quad e_y = \cos(\mathbf{F}, \mathbf{j}) = \frac{Y}{F} = \frac{700}{F}; \quad e_z = \frac{Z}{F} = \frac{100}{F}.$$

Făcînd înlocuirile în (8.3), se deduce

$$N_1 = -1097 \text{ daN}.$$

Din celelalte două relații (2), se obține:

$$N_2 = 369 \text{ daN} \text{ și } N_3 = 763 \text{ daN}.$$

8.2. Se consideră forța **F**, care face cu axa Ox un unghi α, să se determine forțele $\mathbf{F}_1$ și $\mathbf{F}_2$, componente ale forței **F**, și concurente cu aceasta, cunoscînd unghiurile φ_1 și φ_2, pe care forțele $\mathbf{F}_1$ și $\mathbf{F}_2$ le face cu axa Ox.

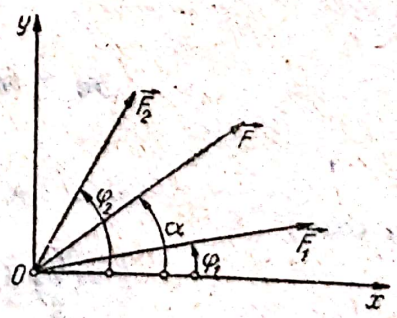


Fig. 8.2

Rezolvare. Din fig. 8.2, se observă că se poate scrie

$$F_x = F\cos\alpha = F_1\cos\varphi_1 + F_2\cos\varphi_2$$
$$F_y = F\sin\alpha = F_1\sin\varphi_1 + F_2\sin\varphi_2.$$

Rezolvînd acest sistem de două ecuații algebrice, se obține

$$F_1 = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\varphi_2 \\ \sin\alpha & \sin\varphi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix}} F \text{ și } F_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\alpha \\ \sin\varphi_1 & \sin\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix}} F.$$

Soluție vectorială: forța $\mathbf{F}$ se poate scrie

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_x\mathbf{e}_y = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 = F_1[\cos(1,x)\mathbf{e}_x + \cos(1,y)\mathbf{e}_y] +$$

$$+ F_2[\cos(2,x)\mathbf{e}_x + \cos(2,y)\mathbf{e}_y] = F_1(c_{1x}\mathbf{e}_x + c_{1y}\mathbf{e}_y) + F_2(c_{2x}\mathbf{e}_x + c_{2y}\mathbf{e}_y)$$

în care $c_{1x} = \cos(1, x), \ldots, c_{2y} = \cos(2, y)$ sînt cosinușii directori ai direcțiilor celor două forțe. Cu acești coeficienți, avem

$$e_x: \quad F_x = F_1c_{1x} + F_2c_{2x} = F\cos\alpha$$

$$e_y: \quad F_y = F_1c_{1y} + F_2c_{2y} = F\sin\alpha,$$

și cu aceasta

$$F_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_x & c_{2x} \\ F_y & c_{2y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1x & c_{2x} \\ c_{1y} & c_{2y} \end{vmatrix}} F \text{ și } F_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_{1x} & F_x \\ c_{1y} & F_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{1x} & c_{2x} \\ c_{1y} & c_{2y} \end{vmatrix}} F.$$

8.3. Să se determine coordonatele centrului de greutate, pentru un sfert de rezervor metalic de formă sferică (fig. 8.3).

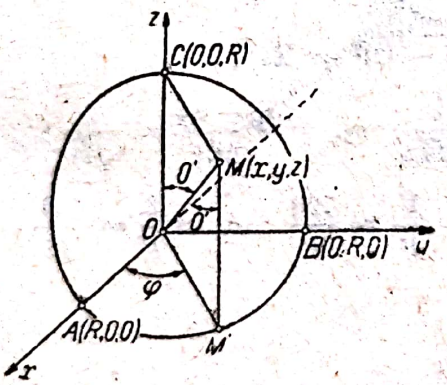


Fig. 8.3

Rezolvare. Ecuația sferei este:

$$(\Sigma)\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

în coordonatele carteziene, iar în coordonate sferice:

$$(\Sigma) = \begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, & \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ y = R\sin\theta\sin\varphi & \varphi \in [0, \pi] \\ z = R\cos\theta. \end{cases}$$

Din motive de simetrie

$$x_G = 0;$$

$$y_G = z_G = \frac{\int\limits_{(\Sigma)} z\,dA}{\int\limits_{(\Sigma)} dA} = \frac{\int\limits_{(\Sigma)} z\,dA}{\frac{1}{4}\cdot 4\pi R^2} = \frac{I}{\pi R^2}$$

în care:

$$I = \int\limits_{(\Sigma)} z\,dA; \quad dA = \iint \sqrt{EG - F^2}\,d\varphi\,d\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

În general, pentru o suprafață dată în coordonate θ și φ, avem

$$x = f_1(\theta, \varphi);\ y = f_2(\theta, \varphi) \text{ și } z = f_3(\theta, \varphi).$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)$$

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Membrul doi al acestei formule, care dă arcul ds^2 pe o suprafață, reprezintă formula lui Gauss sau prima formă fundamentală a suprafeței.
Rezultă

$$E = R^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + R^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + R^2\sin^2\theta = R^2$$

$$G = R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi = R^2\sin^2\theta$$

$$F = -R^2\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi + R^2\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi = 0.$$

Prin urmare

$$I = \iint\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,\pi]} R\cos\theta\cdot R^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = R^3\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \pi R^2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta = -\frac{\pi R^2}{4}\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi R^2}{4}(-1-1) = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Rezultă, deci, că sfertul de rezervor de formă sferică are coordonatele

$$x_G = 0;\quad y_G = z_G = \frac{\pi R^3}{2}\Big/\pi R^2 = \frac{R}{2}.$$

8.4. Să se determine coordonatele centrului de greutate ale unui rezervor metalic în formă de semielipsoid (fig. 8.4).
Rezolvare. Ecuația semielipsoidului este (fig. 8.4, a)

$$z = -\frac{h}{R^2}(x^2 + y^2) + h.$$

Datorită simetriei, avem

$$x_G = y_G = 0$$

$$z_G = \frac{\int\limits_{(V)} z\,dV}{\int\limits_{(V)} dV} = \frac{\iint\limits_{C(O;R)}\left(\int_0^{-\frac{h}{R^2}(x^2+y^2)+h} dz\right)dx\,dy}{\iint\limits_{C(O;R)}\left(\int_0^{-\frac{h}{R^2}(x^2+y^2)+h} dz\right)dx\,dy};$$

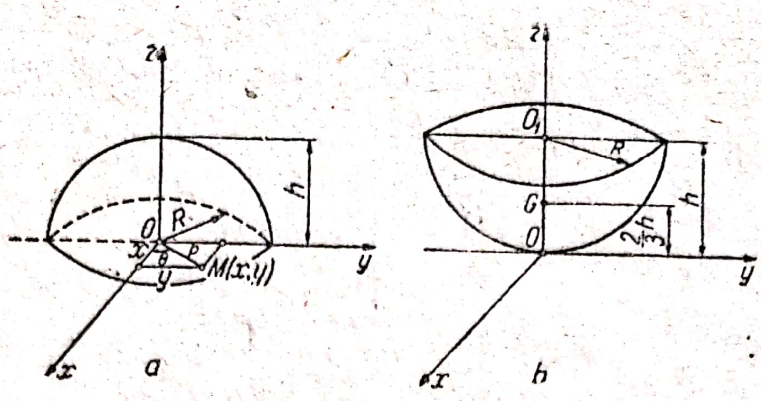


Fig. 8.4

trecem în coordonate polare; avem

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{aligned}\right\} \rho \in [0,\ R],\ \theta \in [0,\ 2\pi].$$

Rezultă

$$-\frac{h}{R^2}(x^2+y^2)+h = -\frac{h}{R^2}(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)+h = -\frac{h}{R^2}\rho^2+h.$$

Calculăm determinantul jacobian (funcțional) al transformării

$$J=\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\rho.$$

Utilizînd formula care permite, în cazul integralelor duble, trecerea de la coordonatele carteziene la coordonatele polare

$$\iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\,dx dy = \iint\limits_{(\Delta)} F(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| d\rho d\theta$$

se obține

$$I_1 = \iint\limits_{[0,\,R]\times[0,\,2\pi]} \frac{-\frac{h}{R^2}(\rho^2+h)^2}{2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(\frac{h^2}{R^4}\rho^5 - 2\frac{h^2}{R^2}\rho^3+h^2\rho\right)d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}2\pi h^2\left(\frac{R^2}{6}-\frac{R^2}{2}+\frac{R^2}{2}\right)=\frac{\pi R^2h^2}{6}$$

$$I_2 = \iint\limits_{[0,\,R]\times[0,\,2\pi]} \left(-\frac{h}{R^2}\rho^2+h\right)\cdot J\cdot d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R\left(-\frac{h}{R^2}\rho^2+h\right)\rho\,d\rho =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{h}{R^2}\frac{\rho^4}{4}+h\frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_0^R = \frac{\pi R^2h}{2}.$$

Cu acestea rezultă

$$z_G = \frac{\frac{\pi h^2 R^2}{6}}{\frac{\pi h R^2}{2}} = \frac{h}{3}.$$

Deoarece elipsoidul este aşezat, în raport cu sistemul de referinţă ca în fig. 8.4, b, rezultă

$$z_G = \frac{2h}{3}.$$

Se observă că volumul elipsoidului este egal cu jumătate din volumul cilindrului de rază R şi înălţime h.

8.5. Să se determine poziţia centrului de greutate, pentru linia compusă din fig. 8.5, cunoscînd lungimile elementelor care compun linia : $l_1 = 50$ mm, $l_2 = 20$ mm, $l_3 = 20$ mm, $l_4 = 30$ mm, $l_5 = 15\pi = 47{,}1$ mm şi $l_6 = 50$ mm.

Tabelul 8.5

Nr. crt.	L_i	x_i	y_i	x_iL_i	y_iL_i
1	50	0	25	0	1250
2	20	10	50	200	1000
3	20	20	40	400	800
4	30	35	30	1050	900
5	47,1	59,55	7,5	2804,8	353,25
6	50	25	0	1250	0
$\sum_{i=1}^{6}$	217,1	×	×	5704,8	4303,25

$$x_G = \frac{5704{,}8}{217{,}1} = 26{,}3 \text{ mm};$$

$$y_G = \frac{4303{,}25}{217{,}1} = 19{,}8 \text{ mm}.$$

R e z o l v a r e. Efectuăm un calcul tabelar, cum se poate vedea în tabelul 6.5. Cu datele din tabel, calculăm coordonatele centrului de greutate al liniei compuse. Rezultă

$$x_G = \frac{\Sigma x_i L_i}{\Sigma L_i} = \frac{5704{,}8}{217{,}1} = 26{,}3 \text{ mm}; \quad y_G = \frac{\Sigma y_i L_i}{\Sigma L_i} = \frac{4303{,}25}{217{,}1} = 19{,}8 \text{ mm}.$$

În figura 8,5, se prezintă determinarea grafică a centrului de greutate al liniei compusă dată, utilizînd construcţia poligonului forţelor şi a poligonului funicular, forţele fiind egale cu lungimile elementelor de linie, ce formează linia compusă dată.

Scanned with OKEN Scanner

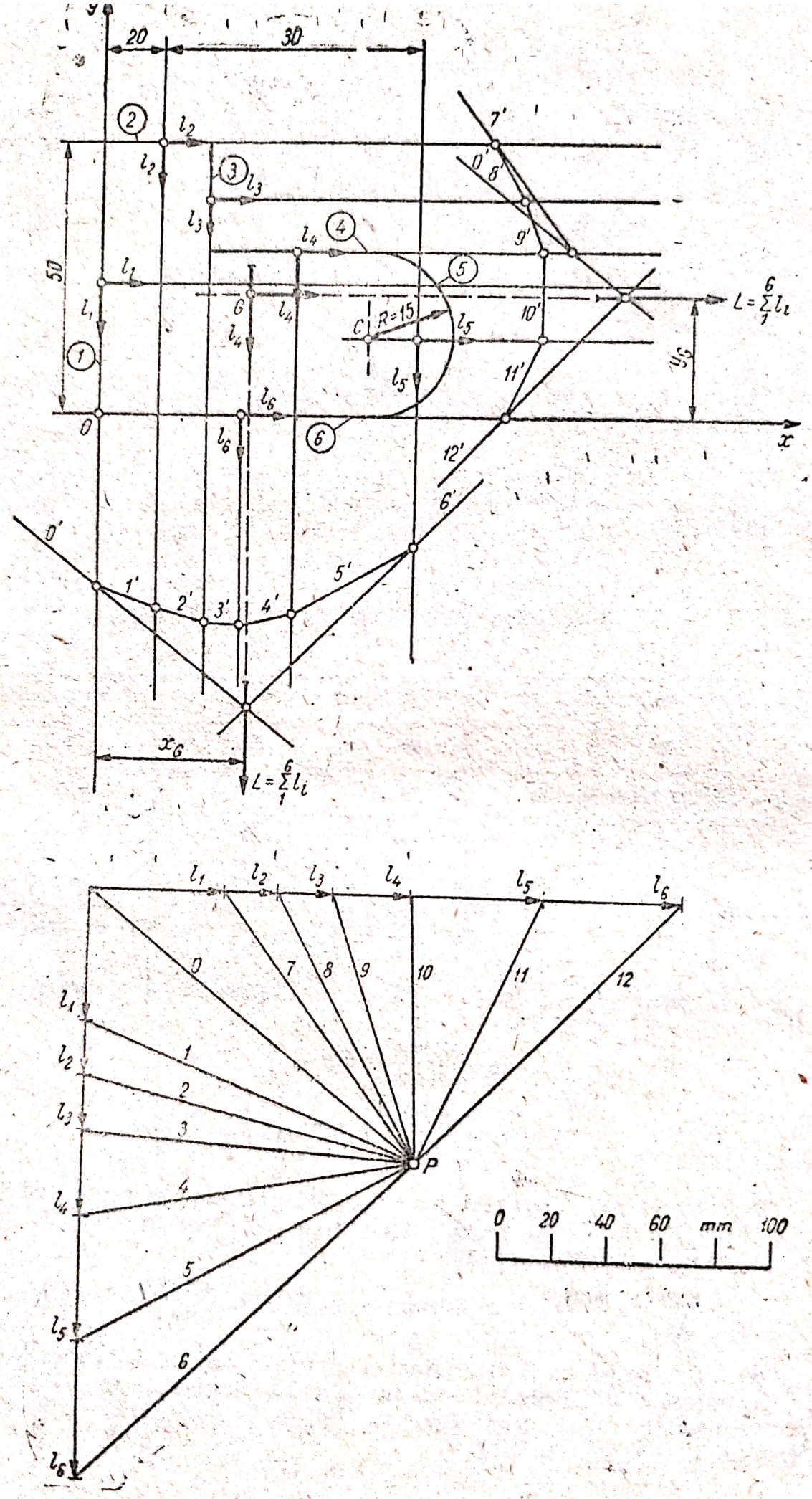


Fig. 4.

8.6. Să se determine centrul de greutate al unei secţiuni de şină de cale ferată, care are forma şi dimensiunile date în figură 8.6, a.

R e z o l v a r e. Se utilizează metoda grafică, bazată pe construcţia poligonului forţelor şi a poligonului funicular. Se împarte secţiunea în opt suprafeţe, care au valorile

$$A_1 = 1 \cdot 12{,}5 = 12{,}5 \text{ cm}^2;\ A_2 = 0{,}25 \cdot 10{,}6 = 2{,}55 \text{ cm}^2;$$

$$A_3 = 1{,}2 \cdot 3{,}6 \text{ cm}^2 = 4{,}32;\ A_4 = 9{,}4 \cdot 1{,}4 \text{ cm}^2 = 13{,}2 \text{ cm}^2;$$

$$A_5 = 0{,}85 \cdot 2{,}55 \text{ cm}^2 = 2{,}17 \text{ cm}^2;\ A_6 = 2{,}15 \cdot 6{,}5 \text{ cm}^2 = 14 \text{ cm}^2;$$

$$A_6 = 2{,}15 \cdot 6{,}5 \text{ cm}^2 = 14{,}0 \text{ cm}^2;\ A_7 = \frac{\pi}{2} \cdot 1{,}25^2 \text{ cm}^2 = 2{,}46 \text{ cm}^2$$

$$\text{şi } A_8 = 1{,}25 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 5{,}0 \text{ cm}^2.$$

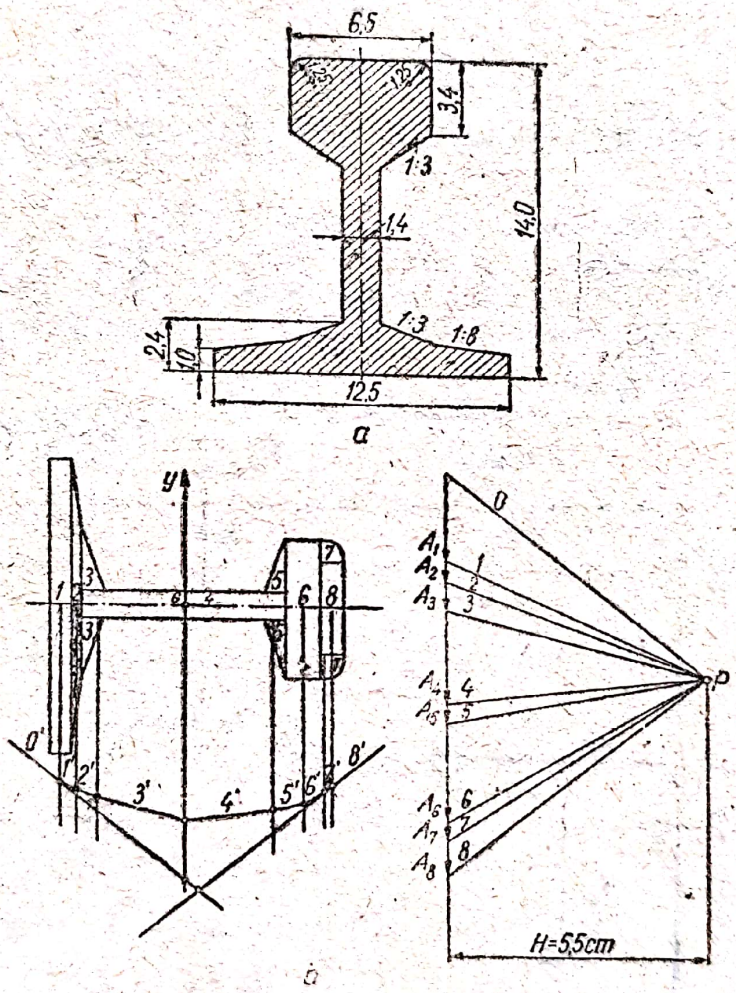


Fig. 8.6

Forţele sînt, în acest caz, egale (sau proporţionale) cu cele opt suprafeţe. Se aleg scări convenabile pentru forţe (arii) şi lugime şi se efectuează construcţia, ca în fig. 8.6, b.

8.7. Un bloc de formă prismatică este susţinut prin cablul care este trecut peste un cîrlig, cum se poate vedea în fig. 8.7, a. Cunoscînd greutatea blocului G, precum şi unghiurile α_1 şi α_2 pe care ramurile 1 şi 2 ale cablului le face cu verticala punctului I, se cere să se determine tensiu-

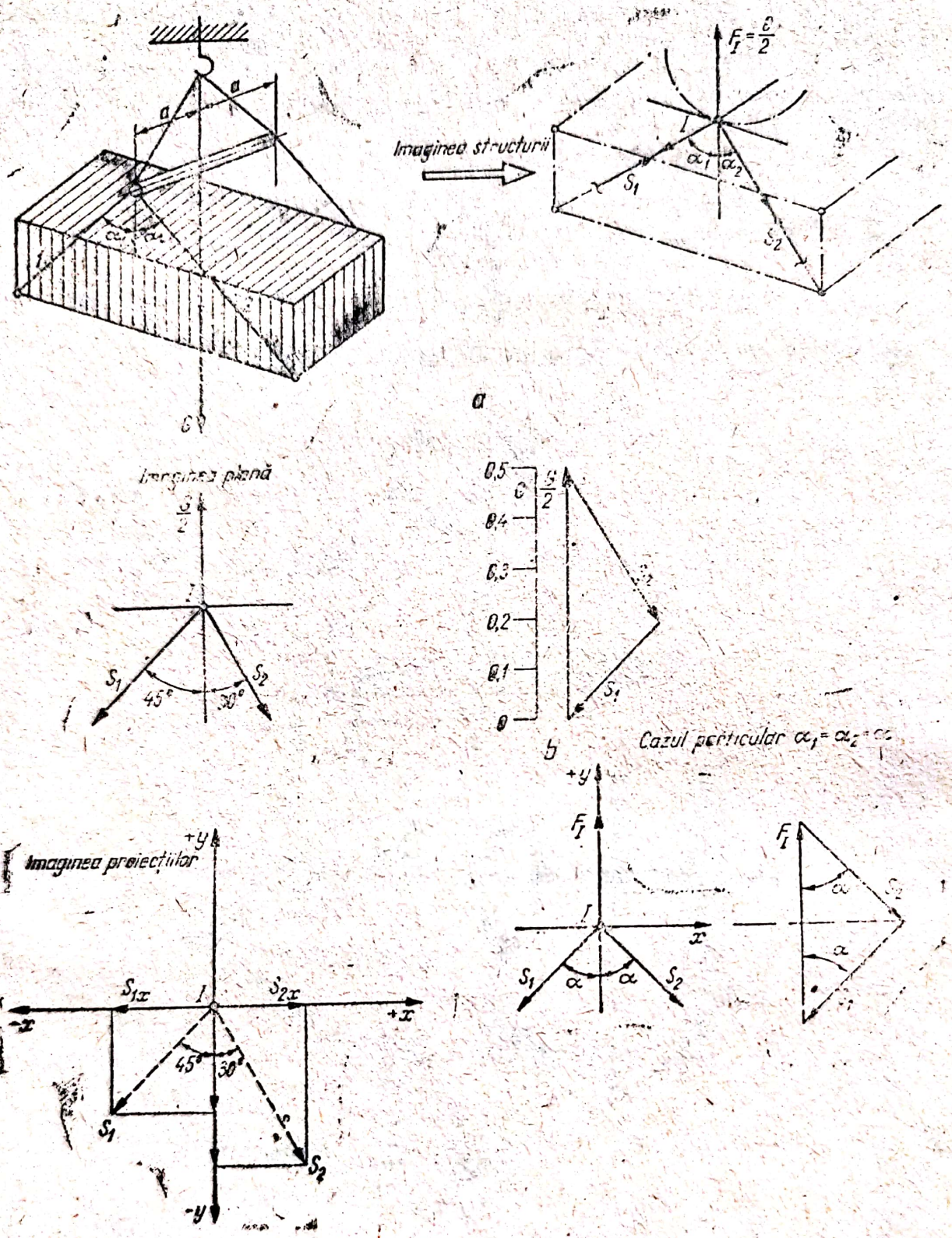


Fig. 8.7

nile S_1 și S_2 din cele două ramuri ale cablului. Aplicație numerică pentru $\alpha_1 = 45°$ și $\alpha_2 = 30°$.

Rezolvare. Fie S_1 și S_2 cele două tensiuni din ramurile cablului; componentele acestor tensiuni, sînt respectiv

$$S_{1x} = -S_1 \sin 45° = -0{,}707S_1; \quad S_{1y} = -S_1 \cos 45° = -0{,}707S_1$$
$$S_{2x} = S_{2x} \sin 30° = +0{,}5S_2; \quad S_{2y} = -S_2 \cos 30° = -0{,}866S_2.$$

Ecuaţiile de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad -0{,}707S_1 + 0{,}5S_2 = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad F_I - 0{,}707S_1 - 0{,}866S_2 = 0.$$

Rezolvînd sistemul de mai sus, se obţine

$$S_1 = \frac{F_I}{0{,}707 + 0{,}866 \cdot 1414} = 0{,}26G$$

$$S_2 = 1{,}414S_1 = 1{,}414 \cdot 0{,}52F_I = 0{,}37G.$$

În cazul cînd cele două unghiuri sînt egale, adică

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

rezultă

$$S_1 = S_2 = \frac{G}{4 \cos \alpha}.$$

În figura 8.7, b se prezintă şi soluţia grafică a problemei, alegîndu-se o scară a forţelor adecvată.

8.8. Asupra barelor AB şi AC, concurente în punctul C, acţionează forţele $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ şi $\mathbf{F}_4$. Valorile forţelor şi a unghiului α sînt date în tabelul 8.8. Se cere să se determine componentele forţei rezultante ce acţionează în nodul C, precum şi tensiunile din cele două bare.

Tabelul 8.8

Nr. crt.	Forţa F_i, în daN	Unghiul α
1	50	$\alpha_1 = 0°$
2	30	$\alpha_2 = 45°$
3	40	$\alpha_3 = 210°$
4	60	$\alpha_4 = 240°$
		$\alpha_A = 45°$
		$\alpha_B = 30°$

Rezolvare. Componentele forţei rezultante sînt

$$R_x = 6{,}6 \text{ daN şi } R_y = -50{,}8 \text{ daN},$$

iar valoarea sa numerică

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{6{,}6^2 + 50{,}8^2} = 51{,}2 \text{ daN}.$$

Calculăm unghiul forţei rezultante cu sensul pozitiv al axei Ox; se observă că

$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} = -\frac{50{,}8}{6{,}6} = -7{,}7;$$

rezultă $\alpha_R = -82{,}6° = 277{,}4°$.

Scanned with OKEN Scanner

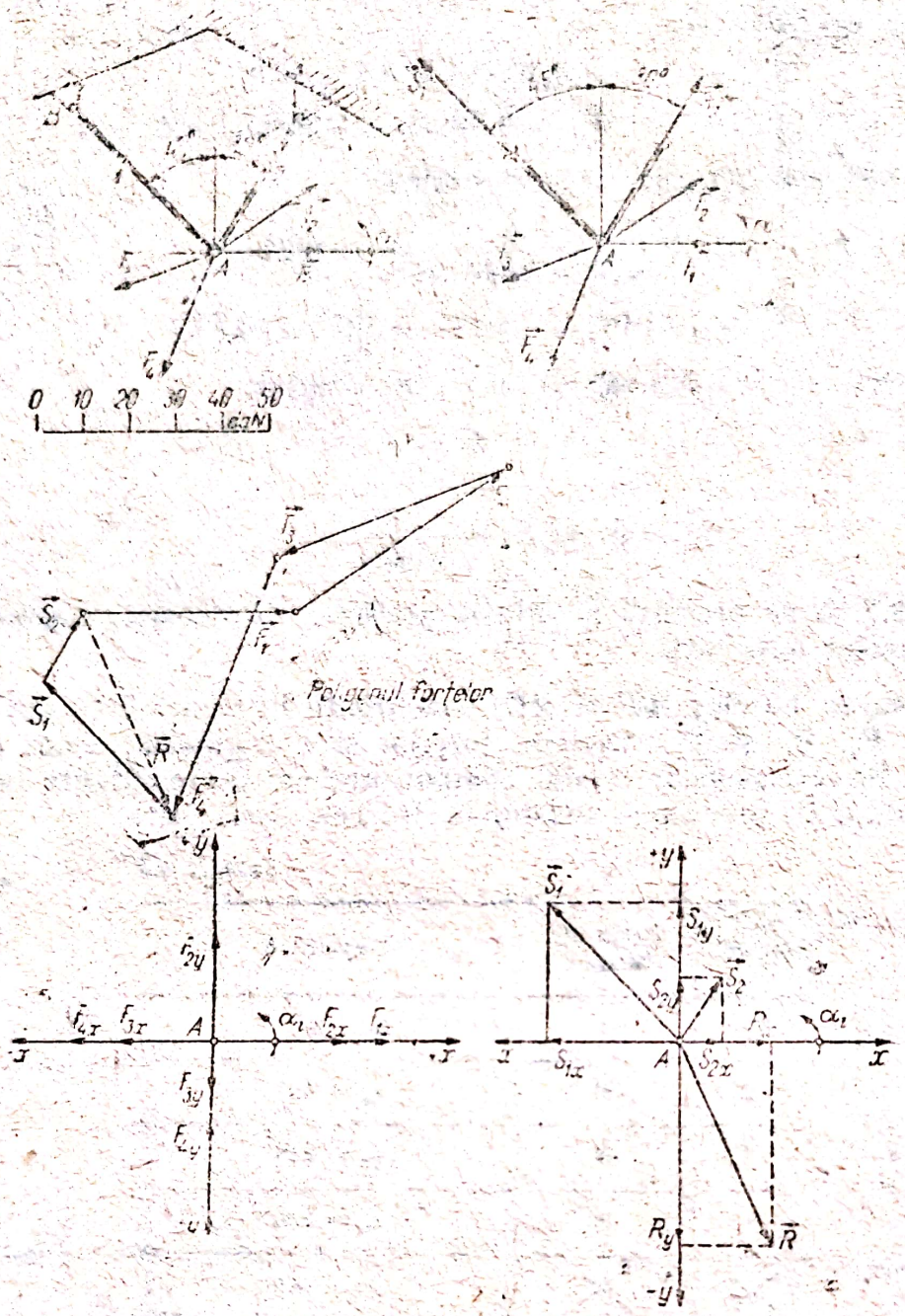


Fig. 8.8

Componentele eforturilor din bare sînt

$$S_{1x} = S_{1y} = 0{,}707S_1$$

$$S_{2x} = 0{,}5S_2\,; \quad S_{2y} = 0{,}866\ S_2.$$

Ecuațiile de echilibru ale rezultantei **R** a forțelor exterioare $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ și $\mathbf{F}_4$ și a eforturilor din bare $\mathbf{S}_1$ și $\mathbf{S}_2$ se scriu sub forma

$$\Sigma X_i = 0: \quad -S_{1x} + S_{2x} + R_x = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_{1y} + S_{2y} + R_y = 0,$$

sau

$$-0{,}707S_1 + 0{,}5S_2 + 6{,}6 = 0$$
$$0{,}707S_1 + 0{,}866S_2 - 50{,}8 = 0$$

Însumînd cele două ecuații, se deduce: $S_2 = 32{,}4$ daN. Rezultă de asemenea $S_1 = 32{,}2$ daN.

În figură se poate vedea și soluția grafică a problemei.

8.9. Asupra unei pîrghii cotite, articulată în A și legată cu un arc în B, acționează o forță P, sub un unghi de 45°. Cunoscînd valoarea forței $P = 20$ daN și a forței elastice din arc, $F_e = 28$ daN, se cere să se determine reacțiunea din articulația A.

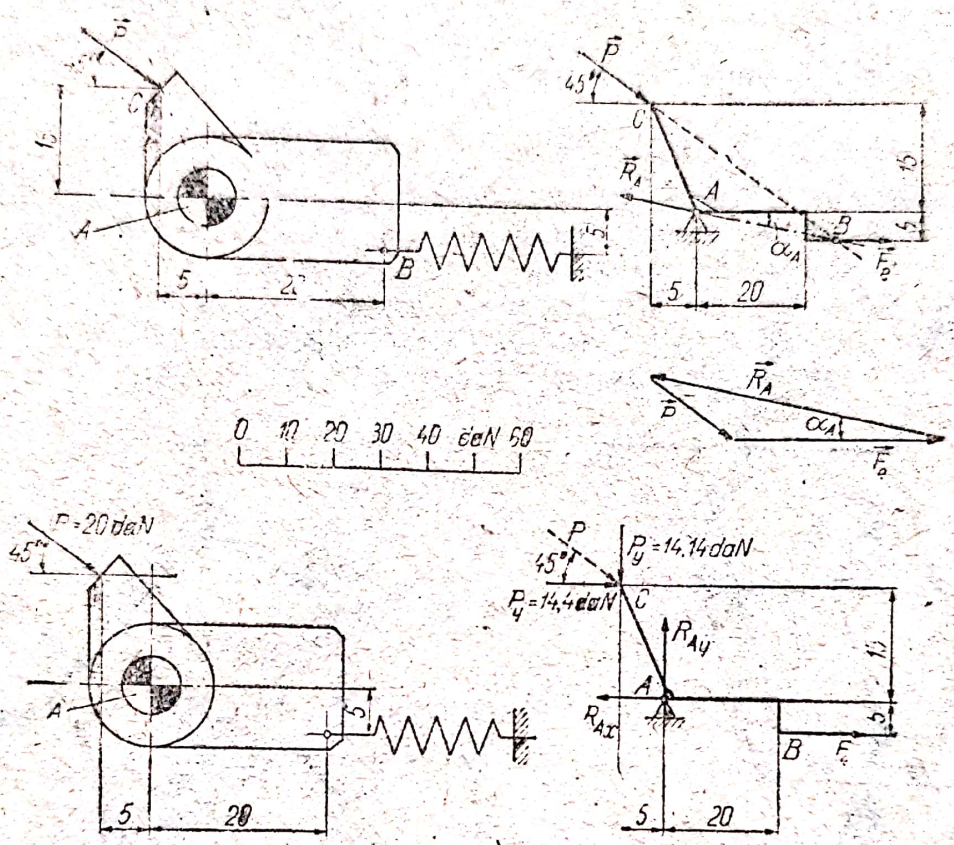


Fig. 8.9

Rezolvare. Reprezentînd bara schematic, ecuațiile de echilibru sînt respectiv

$$M_{(A)} = 0: \; 5 \cdot F_e + 5 \cdot P_y - 15 P_x = 0$$

$$Y_i = 0: \; -P_e + R_{Ay} = 0,$$

Rezolvînd sistemul de ecuații și observînd că

$$P_x = P_y = 14{,}14 \text{ daN}$$

se obține

$$R_{Ax} = P_x + F_e = 42{,}2 \text{ daN}$$

$$R_{ay} = 14{,}14 \text{ daN}$$

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 14{,}14\sqrt{3^2 + 1^2} = 44{,}7 \text{ daN}.$$

Se observă, din figură, că s-a prezentat și soluția grafică a problemei, utilizînd o scară [illegible].

Scanned with OKEN Scanner

8.10. Să se determine valorile forțelor de legătură, care se dezvoltă în bară și în firele de suspensie verticale, care susțin placa orizontală, încărcată cu forțele reprezentate în fig. 8.10.

Rezolvare. Notînd prin: S_1, S_2 și S_3 eforturile din elementele de legătură, se pot scrie următoarele ecuații de echilibru

$$\Sigma Z_i = 0: \quad S_1 + S_2 + S_3 - 4P = 0$$
$$\Sigma M_{xi} = 0: \quad 2aS_3 - 2aP + 4aS_2 - 4a \cdot 2P = 0$$
$$\Sigma M_{yi} = 0: \quad 8a \cdot P + 4aP - 8a \cdot S_3 - 2aS_2 + 2a \cdot 2P = 0$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține

$$S_1 = \frac{5P}{7}\ ;\ S_2 = \frac{12P}{7}\ ;\ S_3 = \frac{11P}{7}\ .$$

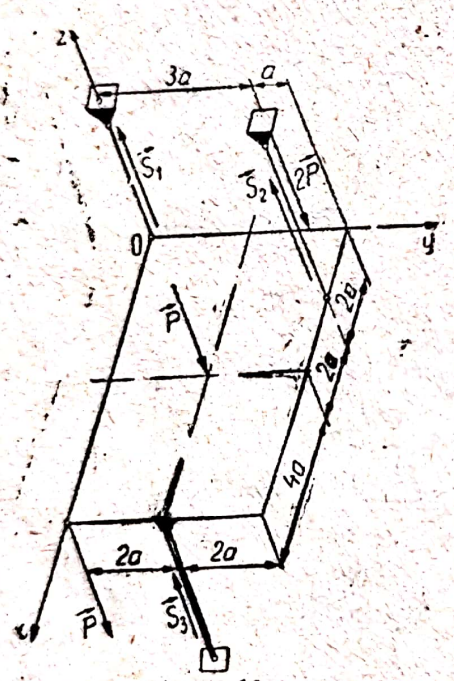


Fig. 8.10

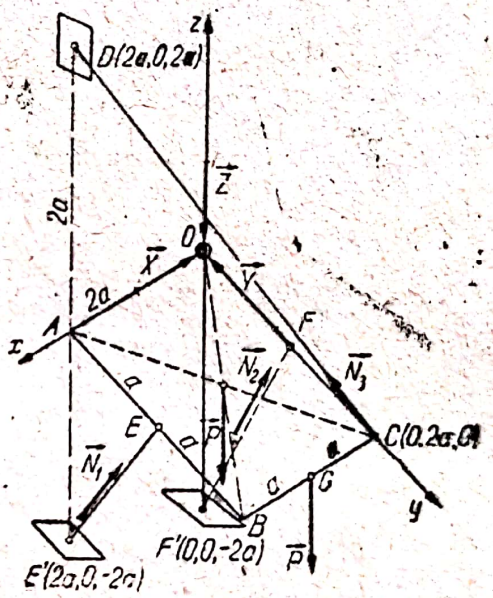


Fig. 8.11

8.11. O placă pătrată, omogenă și de grosime constantă, $OABC$ este menținută în poziție orizontală prin articulația sferică O, cablul CD și barele EE' și FF', ca în fig. 8.11. În punctul G, mijlocul laturii BC, este aplicată o greutate P, egală cu cea a plăcii. Să se determine forțele de legătură.

Rezolvare. Utilizînd notațiile din figură, ecuațiile de echilibru sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad \frac{N_3}{\sqrt{3}} - X = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0 \quad \frac{N_1}{\sqrt{5}} + \frac{N_2}{\sqrt{5}} - \frac{N_3}{\sqrt{3}} - Y = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad \frac{2N_1}{\sqrt{3}} + \frac{2N_2}{\sqrt{5}} + \frac{N_3}{\sqrt{3}} - Z - 2P = 0$$

$$\Sigma M_{x_i} = 0: \quad \frac{2aN_1}{\sqrt{5}} + \frac{2aN_2}{\sqrt{5}} + \frac{2aN_3}{\sqrt{3}} - 3aP = 0$$

$$\Sigma M_{y_i} = 0: \quad -\frac{2a \cdot 2N_1}{\sqrt{5}} + 2aP = 0$$

$$\Sigma M_{z_i} = 0: \quad \frac{2a \cdot N_1}{\sqrt{5}} - \frac{2a \cdot N_2}{\sqrt{3}} = 0.$$

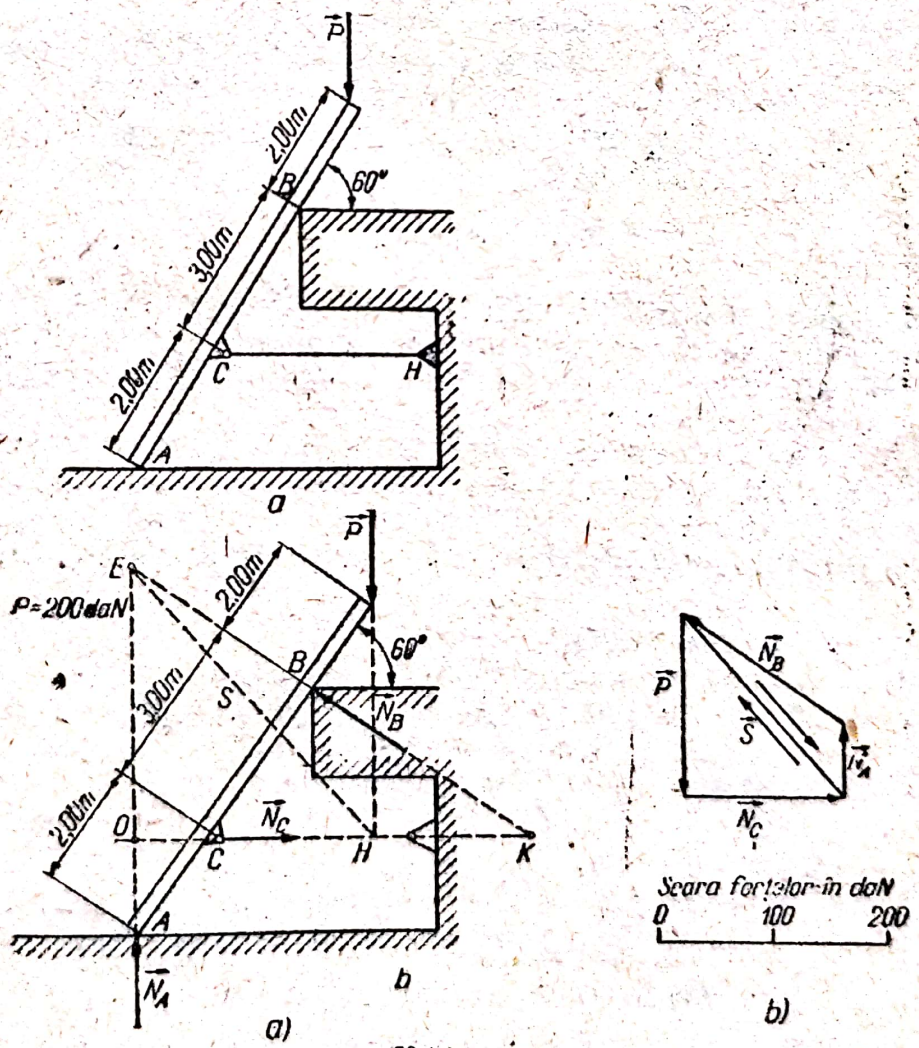
În urma rezolvării sistemului de ecuaţii, se obţine

$$N_1 = N_2 = \frac{\sqrt{5}P}{2}; \quad N_3 = \frac{\sqrt{3}P}{2};$$

$$X = Y = Z = \frac{P}{2}.$$

8.12. Să se determine pe cale grafică, reacţiunile din reazemele A şi B şi tensiunea din firul $C-H$, pentru grinda (bara) din fig. 8.12.

Rezolvare. Fie E, punctul de intersecţie al reacţiunilor din reazemele A şi B, şi H, intersecţia tensiunii din fir, cu forţa exterioară $P = 200$ daN. Construind poligonul forţelor (fig. 8.12, b), la scară, se determină reacţiunile: N_A, N_B, precum şi tensiunea S din fir.



R: $N_A = 100$ daN; $N_B = 200$ daN; $N_C = 170$ daN

Fig. 8.12

8.13. Să se determine reacţiunile A şi B, pentru structura din fig. 8.13, a.

Rezolvare. Prelungirile lui DE şi CH se intersectează în punctul T, iar prelungirea lui AT, intersectează suportul forţei P, în punctul F. Construind poligonul forţelor (fig. 8.13, b), ţinînd seamă că trei forţe coplanare sînt în echilibru dacă sînt concurente, din grafic se deduc: $\mathbf{R}_A$ şi $\mathbf{R}_B$.

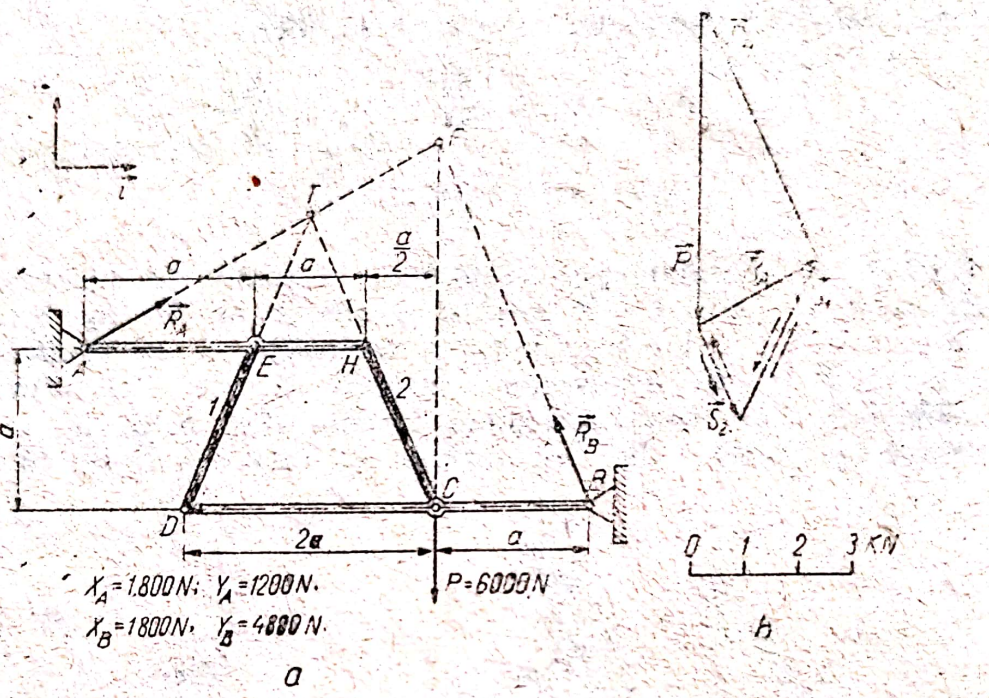


Fig. 8.13

8.14. Asupra grinzii AB (fig. 8.14, a) articulată în A şi rezemată pe planul înclinat la 45° ce trece prin B, acţionează forţele: $P_1 = 400$ kN şi $P_2 = 500$ kN. Se cere să se determine reacţiunile din articulaţie şi din reazem, pe cale grafică.

Rezolvare. Construim poligonul forţelor (fig. 8.14, b) şi poligonul funicular (fig. 8.14, a) în aşa fel, încît 1′ să treacă prin articulaţia B. Notăm cu I punctul de intersecţie al lui 3′ cu direcţia reacţiunii normală în A şi unim apoi punctul I cu A. Paralela dusă în polul forţelor la IA, intersectează

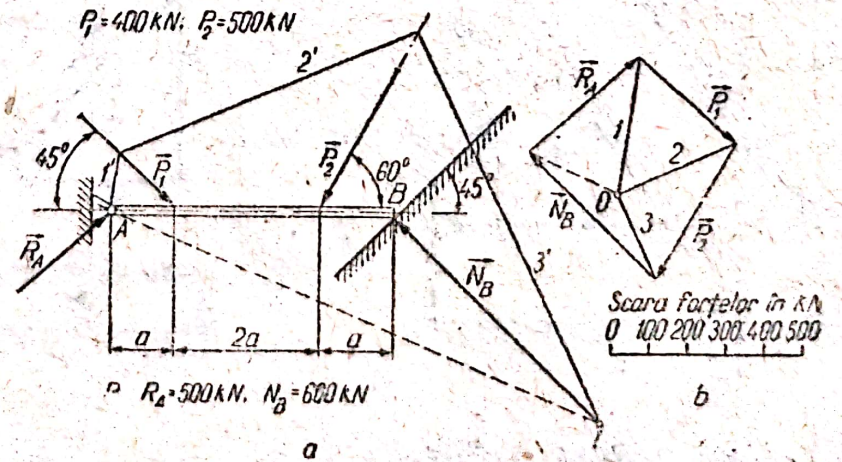


Fig. 8.14

8.13. Să se determine reacţiunile A şi B, pentru structura din fig. 8.13, a.

Rezolvare. Prelungirile lui DE şi CH se intersectează în punctul T, iar prelungirea lui AT, intersectează suportul forţei P, în punctul F. Construind poligonul forţelor (fig. 8.13, b), ţinînd seamă că trei forţe coplanare sînt în echilibru dacă sînt concurente, din grafic se deduc: $\mathbf{R}_A$ şi $\mathbf{R}_B$.

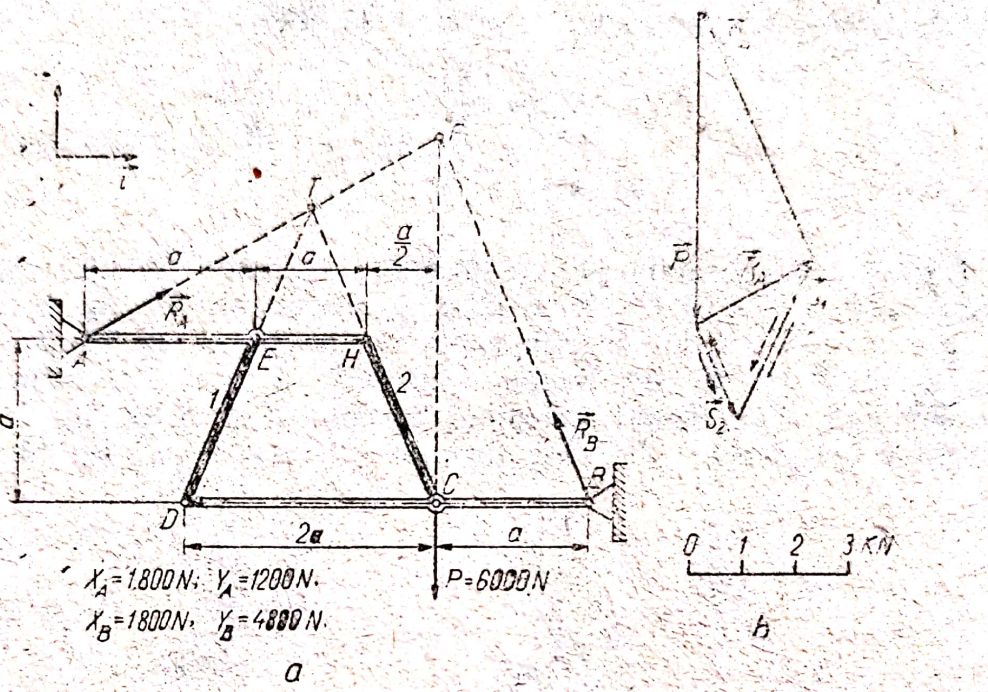


Fig. 8.13

8.14. Asupra grinzii AB (fig. 8.14, a) articulată în A şi rezemată pe planul înclinat la 45° ce trece prin B, acţionează forţele: $P_1 = 400$ kN şi $P_2 = 500$ kN. Se cere să se determine reacţiunile din articulaţie şi din reazem, pe cale grafică.

Rezolvare. Construim poligonul forţelor (fig. 8.14, b) şi poligonul funicular (fig. 8.14, a) în aşa fel, încît 1′ să treacă prin articulaţia B. Notăm cu I punctul de intersecţie al lui 3′ cu direcţia reacţiunii normală în A şi unim apoi punctul I cu A. Paralela dusă în polul forţelor la IA, intersectează

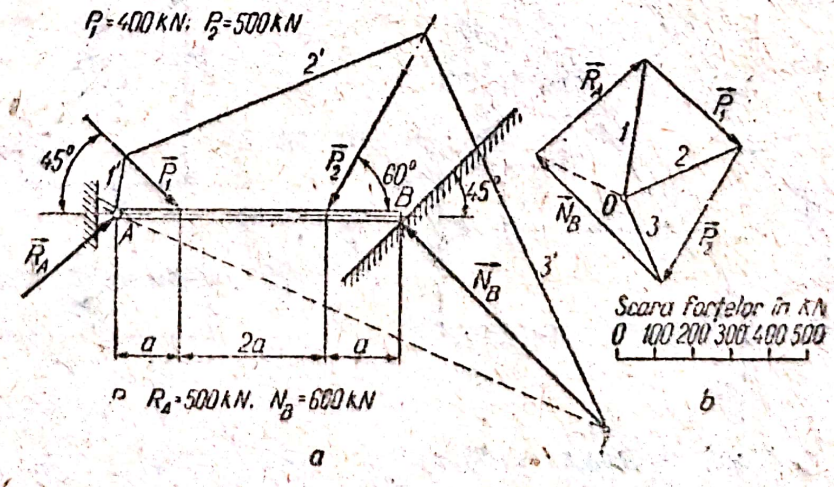


Fig. 8.14

direcția reacțiunii din reazemul B, determinînd $\mathbf{N}_B$. Unind extremitatea lui N_B cu originea forței P_1, se obține și reacțiunea din articulația A, $\mathbf{R}_A$.

8.15. Un fir este trecut peste o rolă de raza R (fig. 8.15, a). La extremitatea firului este suspendată o greutate G. Cealaltă extremitate a firului este susținută, de asemenea, de o greutate G, ramura stîngă a firului fiind trecută peste o roată de raza r și greutate Q, și care este prinsă de roata de raza R, printr-o bară de lungime l și greutate neglijabilă. Cunoscînd: $Q = 100$ daN, $G = 40$ daN, $r = 3$ cm, $R = 4$ cm și $l = 10$ cm, se cere:

a) unghiul α dintre bara O_1O_2 și verticala punctului O_1 (fig. 8.15, a);

b) tensiunea din bară.

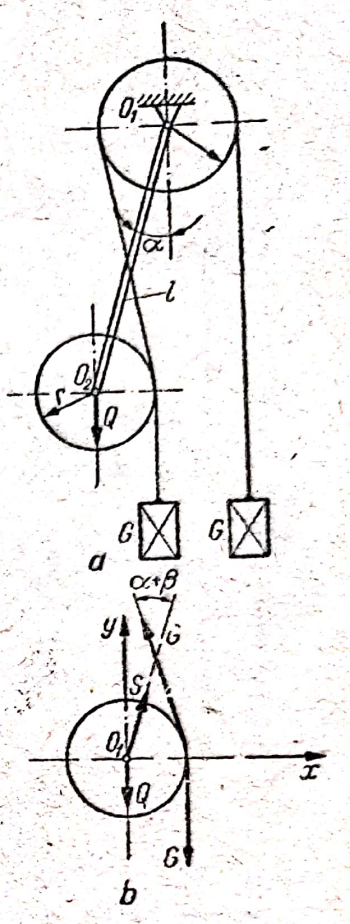


Fig. 8.15

Rezolvare. a) Scriind ecuația de momente în raport cu punctul O_1 pentru întregul sistem, se obține:

$$\Sigma M_{(O_1)} = 0 : Ql \sin \alpha + G(l \sin \alpha - r) - GR = 0$$

de unde

$$\sin \alpha = \frac{(r + R) \cdot G}{(G + Q) \cdot l} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°.$$

b) Secționînd firul și bara, și scriind ecuația de proiecții pe orizontală pentru roata O_2, avem (fig. 8.15, b).

$$\Sigma X_i = 0 : \quad S \sin \alpha - G \sin \beta = 0.$$

Calculînd unghiul β se deduce tensiunea din bara; se obține

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{7}{10}$$

și, prin urmare, $\beta = 15{,}6°$

și, deci, $\sin \beta = 0{,}268.$

Rezultă efortul din bară

$$S = 53 \text{ daN}.$$

8.16. Se consideră sistemul din fig. 8.16, a, format din barele: AB, BC, CD, EF, DH și FH; un fir, ce poartă la extremitatea liberă greutatea G, este trecut peste scripetele din articulația H, și legat de bara verticală AB, în P, ca în figură. Se cere să se determine reacțiunile din legăturile mecanice ale sistemului.

Rezolvare. Secționăm barele și le înlocuim cu eforturi dirijate pe direcțiile barelor. Efectuăm, echilibrul scripetelui H (fig. 8.16, b). Ecuațiile de echilibru ale scripetelui sînt, respectiv

$$\Sigma X_i = 0 : \quad S_1 \cos 45° - G - S_2 \cos 45° = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0 : \quad S_1 \sin 45° - G + S_2 \sin 45° = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

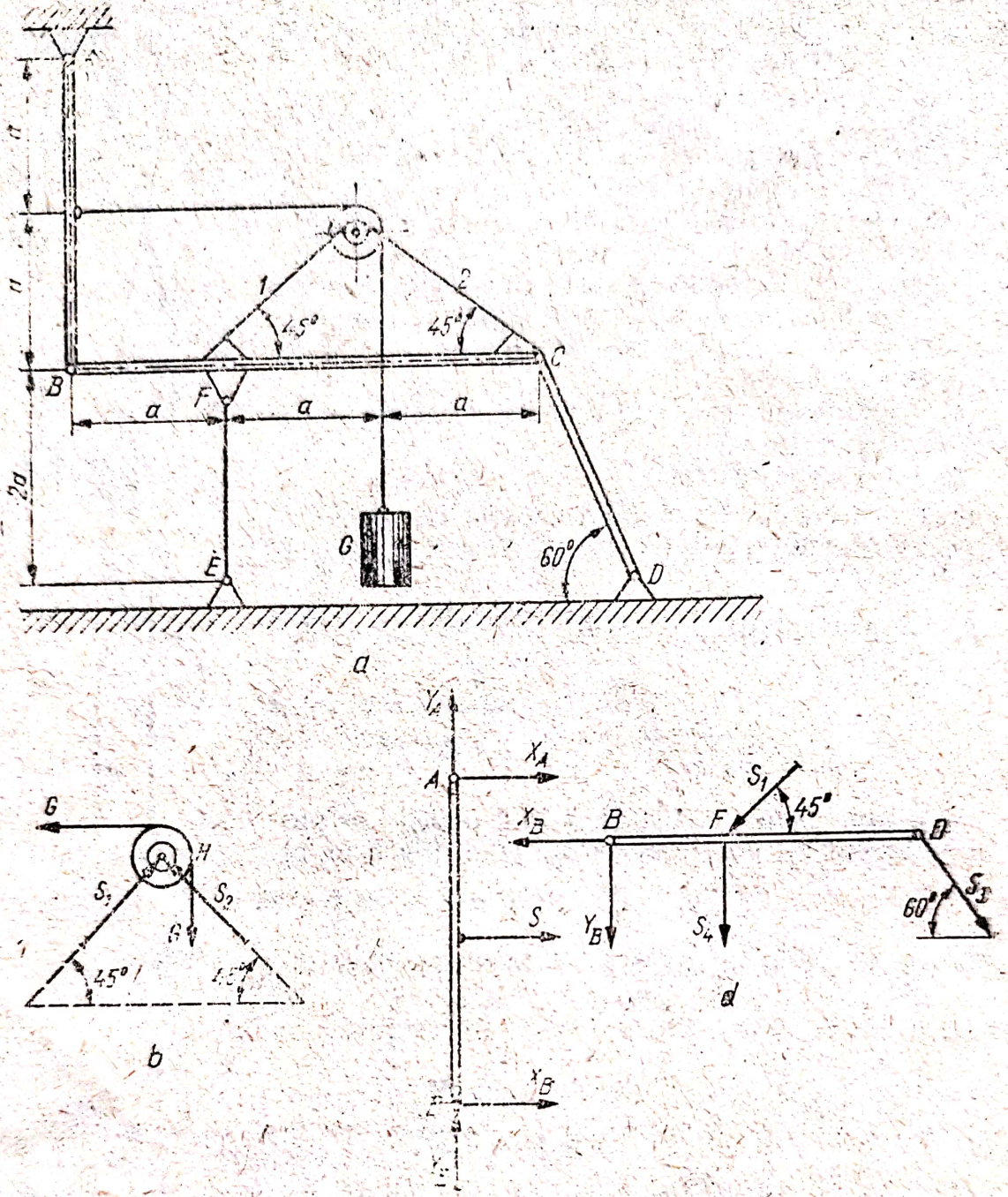


Fig. 8.16

Însumînd cele două ecuații, se obține

$$2(S_1 \sin 45°) - 2G = 0$$

de unde

$$S_1 = \sqrt{2}G = S_2.$$

Ecuațiile de echilibru ale barei AB (fig. 8.16, c) sînt respectiv:

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A + X_B + S = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A + Y_B = 0$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad -a \cdot S - 2a \cdot X_A = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

În fine, ecuațiile de echilibru ale barei BC se scriu

$$\Sigma X_i = 0: \quad -X_B - \sqrt{2}G \cos 45° + S_3 \cos 60° = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad -Y_B - S_4 - \sqrt{2}G \sin 45° - S_3 \sin 60° = 0$$
$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad -a\sqrt{2}G \sin 45° - aS_4 - 3aS_3 \sin 60° = 0.$$

Rezolvînd sistemul ultimelor șase ecuații, se deduc reacțiunile

$$X_A = -\frac{G}{2}; \; Y_A = -3G; \; X_B = -\frac{G}{2}; \; Y_B = \sqrt{3}G$$

$$S_1 = \sqrt{2}G; \; S_2 = \sqrt{2}G; \; S_3 = G; \; S_4 = -\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1\right) \cdot G.$$

8.17. Se consideră grinda cu zăbrele din fig. 8.17, a, pentru care se cunoaște: P, l, și $12ql = P$. Se cere să se determine reacțiunile din articulația A, reazemul mobil B și articulația C, precum și eforturile din barele 1, 2, 3, 4 și 5.

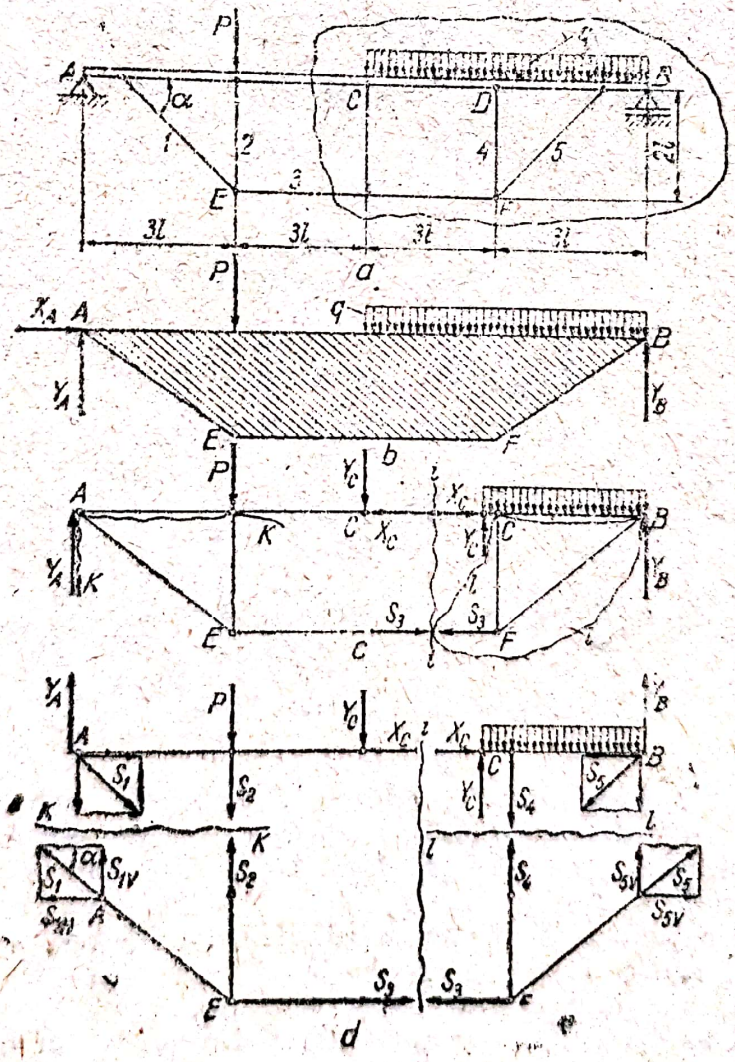


Fig. 8.17

Rezolvare. Determinarea reacțiunilor: se consideră grinda ca un singur rigid; se reprezintă reacțiunile din legăturile mecanice exterioare și se scriu ecuațiile de echilibru pentru întreaga grindă; avem (fig. 8.17, b):

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A - P - 6ql = 0$$
$$\Sigma M_A = 0: \quad -3lP - 9l6ql + 12lY_B = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține

$$X_A = 0; \quad Y_A = \frac{7 \cdot P}{8}; \quad Y_B = \frac{5P}{8}.$$

Pentru determinarea forței din articulația C, se secționează grinda astfel ca secțiunea să treacă prin articulație și printr-o altă bară (deoarece în articulație apar două reacțiuni necunoscute, iar în bară una singură), ținînd seama că avem la dispoziție trei ecuații de echilibru (fig. 8.17, c). Ecuațiile de echilibru pentru jumătatea din stînga a grinzii sînt respectiv

$$\Sigma X_i = 0: \quad S_3 - X_C = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A - P - Y_C = 0$$
$$\Sigma M_E = 0: \quad -6lY_A + 3lP + 2lS_3 = 0$$

În urma rezolvării acestui sistem de ecuații, rezultă

$$X_C = \frac{9}{8}P; \quad Y_C = -\frac{1}{8}P; \quad S_3 = \frac{9}{8}P.$$

Prin a doua secțiune $k - k$ și $l - l$ se desparte grinda cu zăbrele în două părți distincte (fig. 8.17, d). Pentru determinarea forțelor S_{1H}, S_{1V} și S_3, se utilizează partea stîngă, forțele rezultînd din echilibrul nodului E:

$$\Sigma X_i = 0: \quad S_3 - S_{1H} = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad S_{1V} + S_2 = 0.$$

Observînd că $\operatorname{tg} \alpha = \frac{S_{1V}}{S_{1H}} = \frac{2}{3}$, din sistemul de ecuații de mai sus rezultă

$$S_{1H} = \frac{9}{8}P; \quad S_{1V} = \frac{3}{4}P; \quad S_2 = S_4 = -\frac{3}{4}P$$

și

$$S_{5H} = S_{1H} = \frac{9}{8}P; \quad S_{5V} = S_{1V} = \frac{3}{4}P.$$

8.18. Turla de foraj din fig. 8.18, a, fixată prin articulații sferice la bază, are fețele alcătuite din grinzi cu zăbrele cu diagonale în K (în figură s-au desenat numai barele de pe două fețe). Una din fețe reprezintă o amenajare specială pentru intrare (27—17—28), iar celelalte sînt identice.

Turla este acționată de forțele verticale $P = 35$ kN, în nodurile inelului superior și forțele $F = 0{,}4$ kN în planul feței 1—3—28—27 și a celei paralele cu ea, rezultate din acțiunile vîntului.

Se cere să se determine eforturile din barele panoului dintre nodurile 13—16.

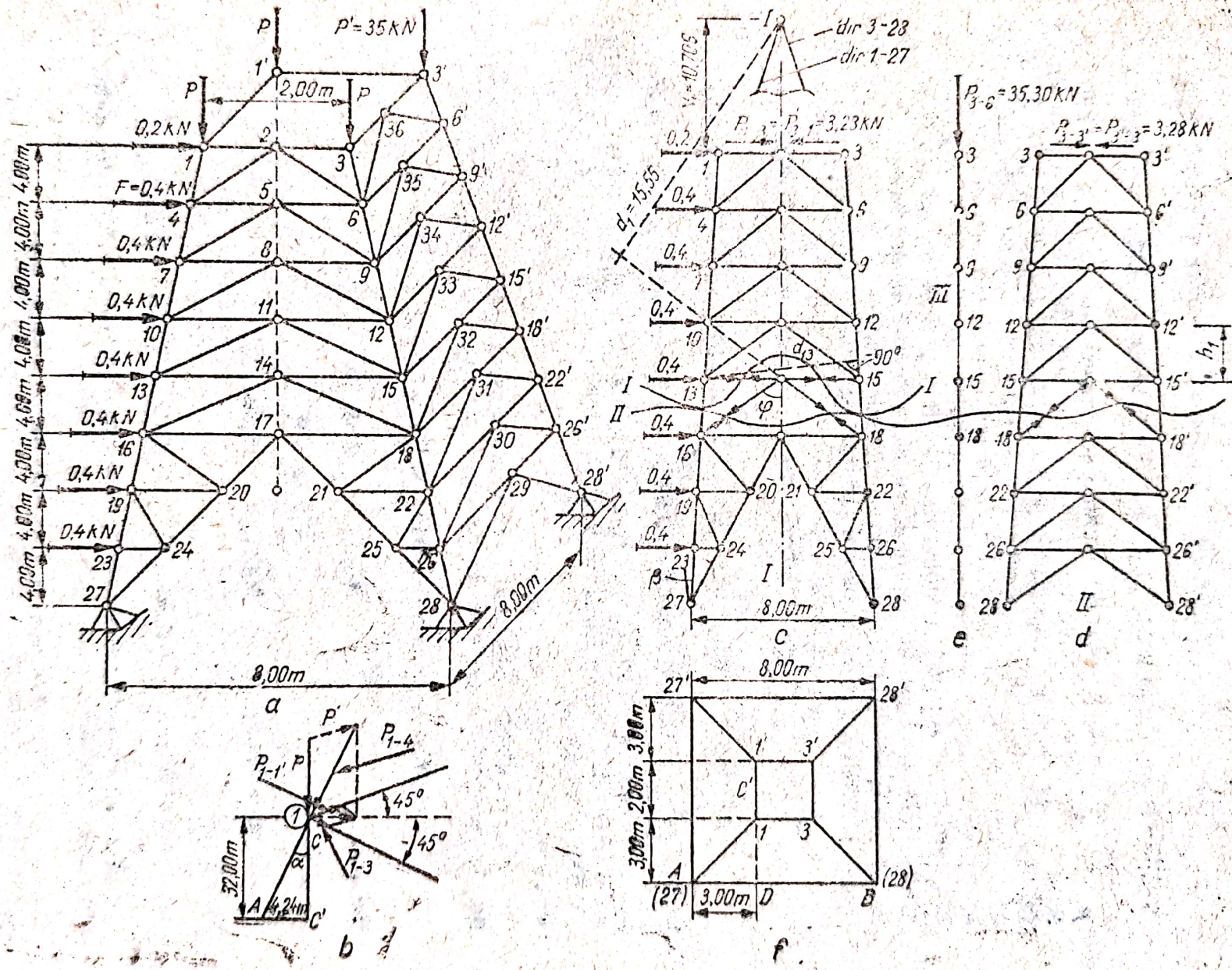

P'=35 kN
2,00m
0,2 kN
F=0,4 kN
0,4 kN
4,00m
8,00m
a
b
c
d
e
f
dir 3-28
dir 1-27
P_{3-6}=35,30 kN
$P_{3-3'}$=$P_{3'-3}$=3,28 kN
d_1=15,55
d_{13}
90°
45°
32,00m
4,24m
3,00m
2,00m
3,00m
3,00m
h_1

Fig. 8.18

Rezolvare. Sarcina P se descompune în componente după direcţiile barelor din nodurile în care se aplică. Astfel, forţa din nodul 1 (fig. 8.18, b) are componentele:

$$P_{1-4} = \frac{P}{\cos \alpha} = 35{,}30 \text{ kN}; \quad P_{1-1'} = P_{1-3} = P \operatorname{tg} \alpha \cos 45^\circ \approx$$

$\approx 3{,}28$ kN ($\operatorname{tg} \alpha = 0{,}1323$; $\cos \alpha = 0{,}9914$; $\sin \alpha = 0{,}132$; v. fig. 8.18, b, f).

În mod analog, forţa din nodul 3 se descompune în $P_{3-6} = 35{,}30$ kN; $P_{3-1} = 3{,}28$ kN $= P_{3-3'}$. Componente similare dau forţele din nodurile 3' şi 1'. Se consideră separat feţele 1—3—28—27 (fig. 8.18, c) şi 3—3'—28—28' (fig. 8.18, d), acţionate de componentele forţelor din planul lor. Eforturile din barele celorlalte forţe (nefigurate din motive de claritate a desenului) sînt identice cu corespondentele lor din feţele reprezentate. S-a considerat separat şi montantul 3—28 (fig. 8.18, e), deoarece componenta după direcţia lui nu produce eforturi în celelalte bare.

Elementele geometrice pentru grinzile plane:

— unghiul γ dintre planul vertical şi planul unei feţe:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{C'D}{CC'} = \frac{3}{32} = 0{,}0937; \quad \cos \gamma = 0{,}995; \quad \sin \gamma = 0{,}0930.$$

— înălţimea panoului: $h_1 = \frac{h}{\cos \gamma} = 4{,}015$ m; $H_1 = 32{,}120$ m; $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{32{,}120} = 0{,}0933$; $\cos \beta = 0{,}996$; $\sin \beta = 0{,}0929$; $l_{16-18} = 5{,}75$ m; $l_{13-15} = 5{,}00$; $v_i = 10{,}706$ m; $\operatorname{tg} \varphi = 2{,}875/4{,}015 = 0{,}715$; $\cos \varphi = 0{,}813$; $\sin \varphi = 0{,}582$; $d_{13} = l_{13-15} \cos \beta = 5 \cdot 0{,}996 = 4{,}985$ m; $d_i = 26{,}766 \cdot 0{,}582 = 15{,}55$ m.

Calculul eforturilor din bare:

N_{15-18}: Pentru sistemul I se utilizează secţiunea $I-I$ şi se scrie ecuaţia de momente a forţelor de deasupra în raport cu nodul 13

$$N^{I}_{15-18} \cdot 4{,}985 + 4{,}015 \cdot 0{,}4\left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) = 0.$$

Rezultă $N^{I}_{15-18} = -2{,}58$ kN.

Pe sistemul II: $N^{II}_{15-18} = 0$.

Pe sistemul III: $N^{III}_{15-18} = -35{,}30$ kN.

Se obţine

$$N_{15-18} = -2{,}58 + 0 - 35{,}30 = -37{,}88 = N_{15'-18'}.$$

N_{18-16}: Pe sistemul I se scrie ecuaţia de momente faţă de nodul 15, din care rezultă

$$N_{18-16} = +2{,}58 - 35{,}30 = -32{,}72 \text{ kN}.$$

N_{14-16} şi N_{14-18}: Eforturile găsite pe sistemul I sînt cele reale, întrucît barele aparţin numai acestui sistem. Din separarea nodului 14, deducem:

$$N_{14-16} = -N_{14-18}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuînd secțiunea $II-II$, din ecuația de momente a forțelor de deasupra secțiunii în raport cu nodul I, se obține

$$(N_{14-16} - N_{14-18})15{,}55 - 0{,}2 \cdot 10{,}706 - 0{,}4(14{,}721 + 18{,}736 + 22{,}751 + 26{,}766) = 0,$$

de unde

$$N_{14-16} = -N_{14-18} = \frac{35{,}331}{2 \cdot 15{,}55} = 1{,}137 \text{ kN},$$

$$N_{32-18} = N_{32-18'} = 0.$$

Pentru N_{16-17} se determină N_{16-18} echilibrînd succesiv nodurile *23*, *24*, *19* și *20* apoi se scrie ecuația de proiecții pe montat a forțelor din nodul *16*.

8.19. Grinda AB este articulată în extremitatea A și ancorată cu bară în cealaltă extremitate B, printr-o bară BC, care face cu verticala un unghi egal cu 30°. Asupra grinzii acționează două forțe concentrate F_1 și F_2, cum se poate vedea în figură. Se cere să se determine grafic, reacțiunea din articulație precum și efortul din bară.

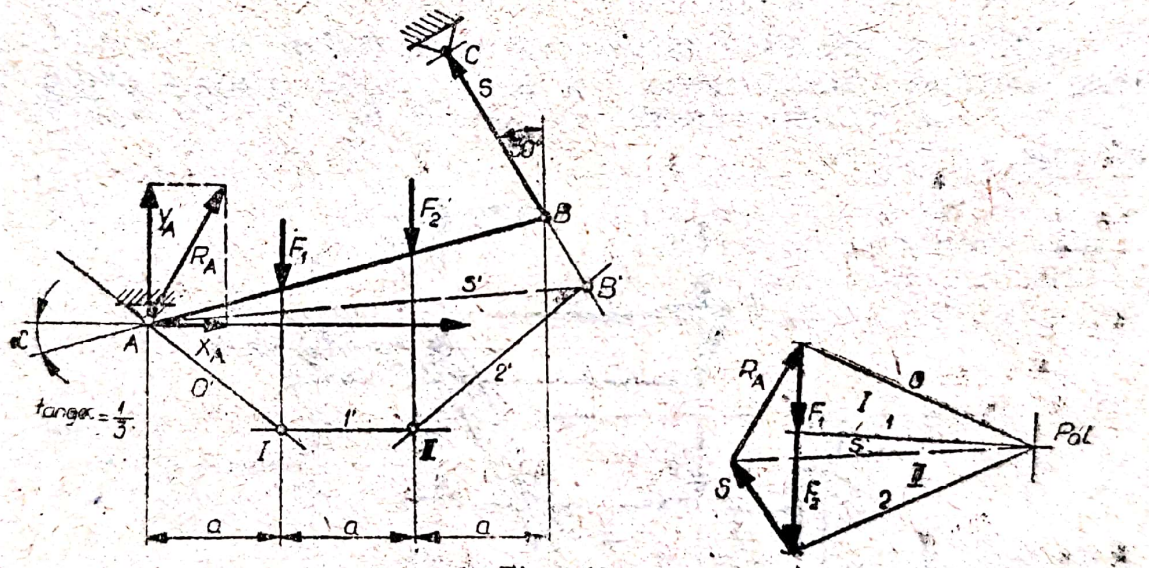


Fig. 8.19

Rezolvare. Se alege un pol și se construiește poligonul forțelor. Se duc razele polare: $O-1-2$ și se trece la construcția poligonului funicular, astfel încît paralela O' la O să treacă prin articulația A. Se notează cu B' intersecția prelungirii lui CB cu latura $2'$ a poligonului funicular. Se notează cu s' latura AB' care închide poligonul funicular; paralela s dusă prin pol intersectează direcția tensiunii din bară, dusă prin extremitatea forței F_2 în poligonul forțelor, determinînd tensiunea S din bară. Prin unirea extremității lui S cu originea forței F_1 în poligonul forțelor, rezultă, la scara aleasă, reacțiunea R_A articulația din A.

8.20. Se consideră grinda cotită din fig. 8.20, rezemată în A și articulată în B. Asupra grinzii acționează trei forțe concentrate F_1, F_2 și F_3, ca în figură. Se cere să se determine grafic, reacțiunile din articulație și din reazem.

Scanned with OKEN Scanner

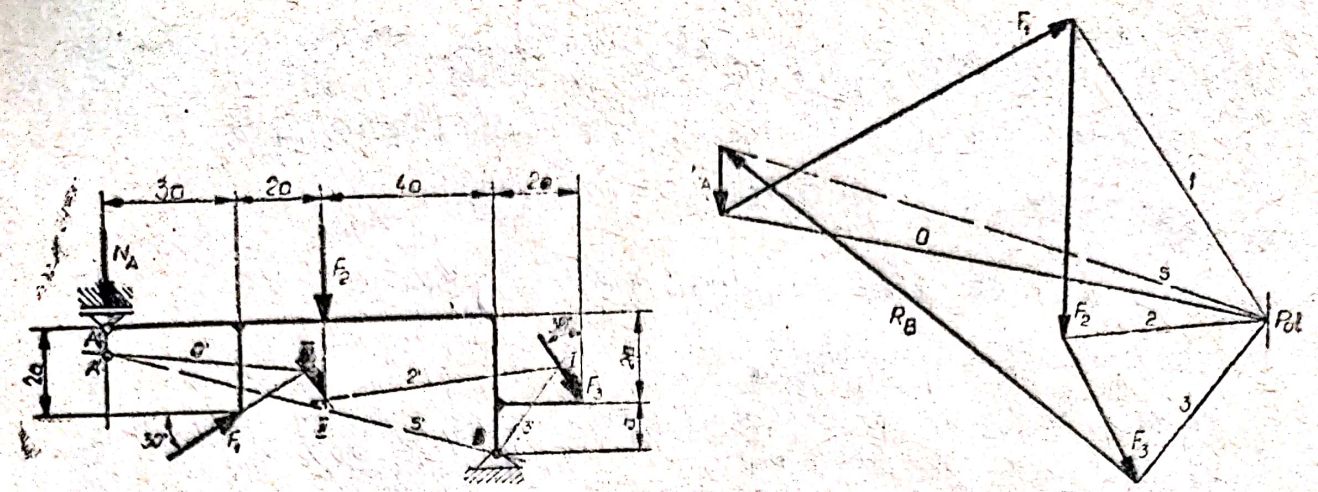


Fig. 8.20

R e z o l v a r e. Se construieşte poligonul forţelor şi se duc razele polare $O-1-2-3$. Se construieşte poligonul funicular $O'-1'-2'-3'$ astfel încît $3'$ să treacă prin articulaţia B. Se duce s', care închide poligonul funicular. Paralela s la s' va determina în poligonul forţelor reacţiunile N_A şi R_B.

8.21. Se consideră structura statică din fig. 8.21 şi se cere să se determine reacţiunile din articulaţia A şi încastrarea B, precum şi efortul din CD, cunoscînd valorile numerice ale forţelor: $F_1 = F_2 = F_3 = 10$ kN şi distanţa $a = 0{,}1$ m.

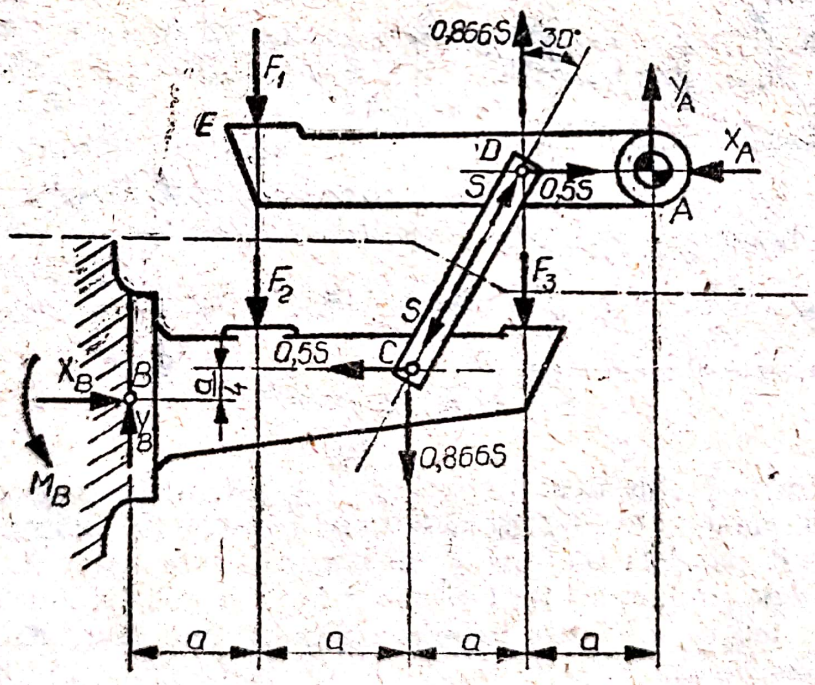


Fig. 8.21

R e z o l v a r e. Înlăturînd legăturile şi înlocuindu-le cu reacţiunile corespunzătoare, se poate efectua echilibrul corpurilor astfel separate.

Echilibrul corpului AE:

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad -0{,}866a \cdot S + 3a \cdot F_1 = 0$$
$$\Sigma X_i = 0: \quad -X_A + 0{,}5S = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_A + 0{,}866S - F_1 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Echilibrul corpului BC:

$$\Sigma M_{B)} = 0: \quad M_B - aF_2 - 0{,}866 \cdot 2aS + 0{,}25a \cdot 0{,}5S - 3aF_3 = 0$$
$$\Sigma X_i = 0: \quad X_B - 0{,}5S = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad Y_B - F_2 - 0{,}866S - F_3 = 0.$$

Rezolvînd sistemul celor șase ecuații de echilibru, se obțin efortul din bara CD și reacțiunile din articulația A și încastrarea B:

$$S = 34{,}6 \text{ kN}; \; X_A = 17{,}3 \text{ kN}; \; Y_A = -20 \text{ kN};$$
$$X_B = 17{,}3 \text{ kN}; \; Y_B = 50 \text{ kN}; \; M_B = 9{,}6 \text{ kNm}.$$

Verificare. Bilanțul forțelor pe verticală:

$$\uparrow \; Y_A + Y_B = F_1 + F_2 + F_3$$

-20 kN	10 kN
$+50$ kN	10 kN
	10 kN
30 kN	30 kN

8.22. Să se determine reacțiunile din articulațiile A și C, efortul din bara verticală BB', precum și tensiunea din bara OD, pentru sistemul din fig. 8.22, a. Se observă că: $R_A = F$, $Q = 2a \cdot q = 2a \cdot \frac{F}{2a} = F$, și $F_{B1} = 2F = S$ (fig. 8.22, c), $F_{B2} = 2F = S$.

Rezolvare. Se construiește poligonul forțelor și poligonul funicular (fig. 8.22, b) pentru întregul sistem, determinîndu-se astfel reacțiunile din legăturile exterioare. Secționînd bara BB' și efectuînd separat poligonul forțelor și poligonul funicular, pentru elementul $A'BE$ (fig. 8.22, c) și $CB'D$ (fig. 8.22, d), se obțin efortul din bara verticală BB' precum și tensiunea din bara DO.

8.23. Să se determine raportul forțelor F_1 și F_2, pentru sistemul celor două pene din fig. 8.23, cunoscînd valorile coeficientului de frecare μ_1, μ_2 și μ_3, precum și unghiul α pe care suprafața comună a celor două pene îl fac cu orizontala.

Rezolvare. Reprezentînd forțele de frecare și reacțiunile ca în figură și considerînd sistemul celor două pene ca un singur rigid, se pot scrie următoarele ecuații de echilibru

$$\Sigma X_i = 0: \; F_1 - N_3 - \mu_1 N_1 = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \; N_1 - F_2 - \mu_3 N_3 = 0.$$

Izolăm corpul 1 și scriem ecuația de proiecții pe axa y

$$\Sigma Y_i = 0: \; N_1 - N_2 \cos\alpha + \mu_2 N_2 \sin\alpha = 0.$$

Separăm acum corpul 2 și scriem ecuația de proiecții pe axa x

$$\Sigma X_i = 0: \; N_2 \sin\alpha + \mu_2 N_2 \cos\alpha - N_3 = 0.$$

Din sistemul celor patru ecuații de mai sus deducem raportul cerut

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{(1 - \mu_1\mu_2)\sin\alpha + (\mu_1 + \mu_2)\cos\alpha}{(1 - \mu_2\mu_3)\cos\alpha - (\mu_2 + \mu_3)\sin\alpha}.$$

Scanned with OKEN Scanner

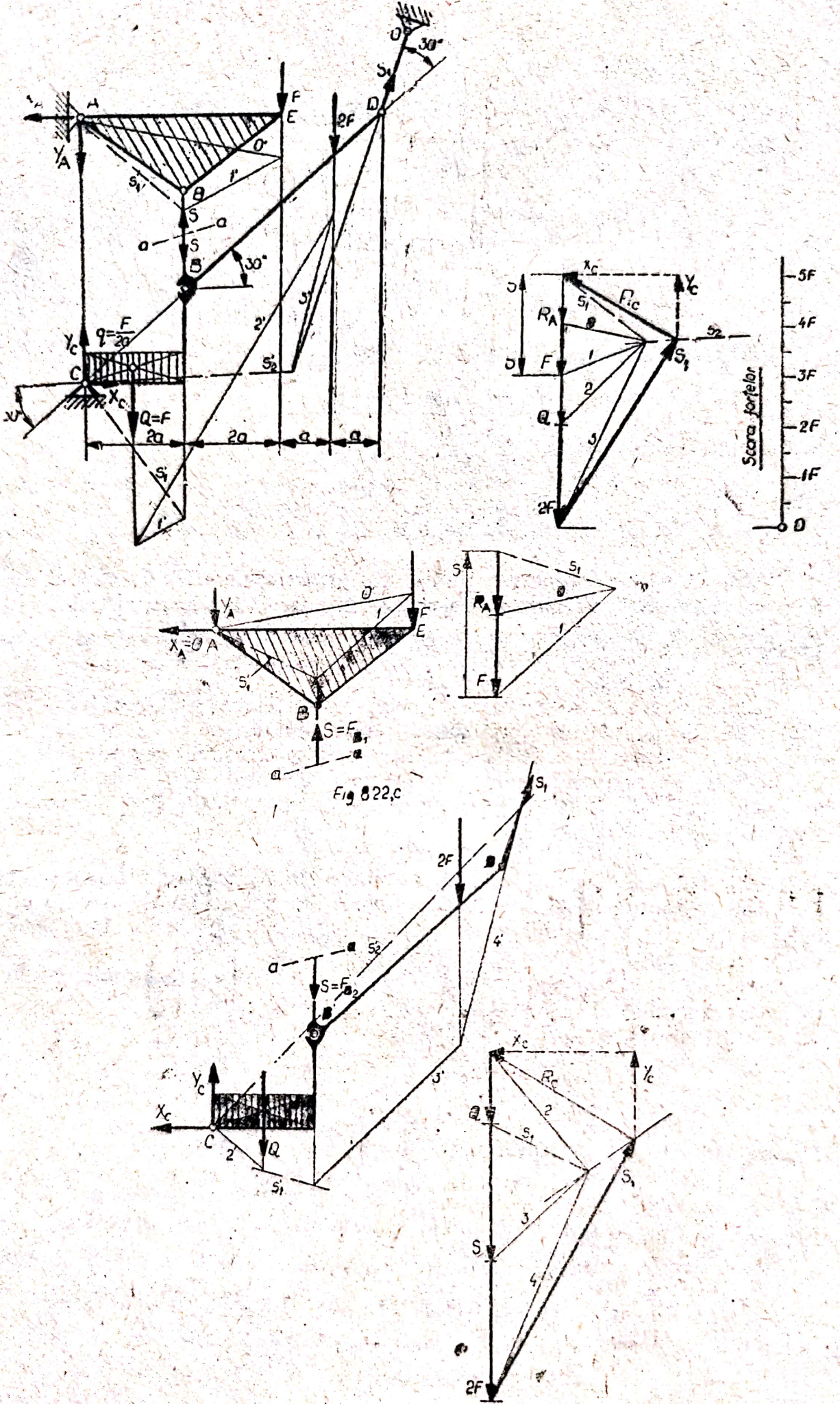


Fig 8.22,c

Fig. 8.22 a, b, c, d

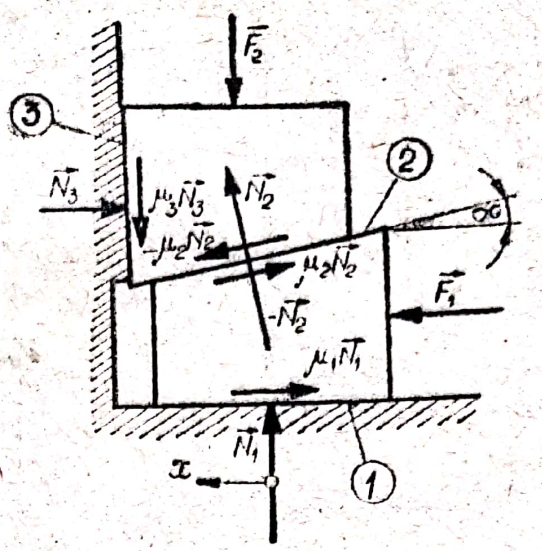


Fig. 8.23

8.24. Să se determine care forţa apare în cîrligul cu consolă din fig. 8.24, a, cunoscînd valoarea coeficientului de frecare de alunecare $\mu = 1/5$.

Soluţie grafică. Punctele de contact ale cîrligului cu pilotul pe care este aşezat, sînt A şi B (fig. 8.24, a). Reacţiunile în punctele A şi B fac cu direcţia normalelor la pilot, unghiurile de frecare $\varphi = \text{arctg}\mu = \text{arctg}\frac{1}{5}$. Toate cele patru direcţii ale forţelor se intersectează între ele în I şi II. Rezultă astfel forţa care apare în cîrlig,

$$F = 1{,}15\,G.$$

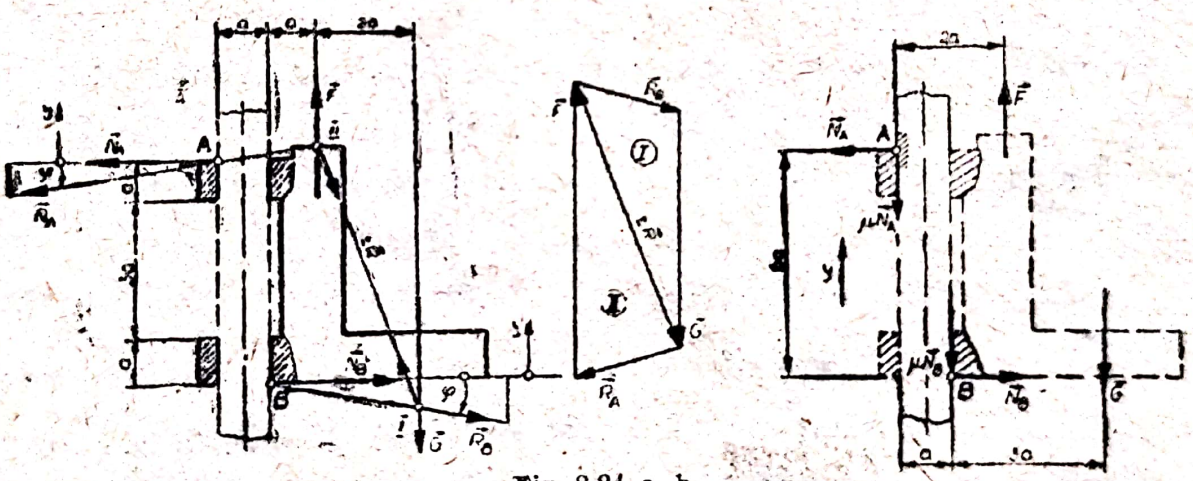


Fig. 8.24 a, b

Soluţie analitică. Se scriu ecuaţiile de echilibru pentru forţele care acţionează asupra acestuia; avem (fig. 8.24, b)

$$\Sigma X_i = 0: \quad -N_A + N_B = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0: \quad F - \mu N_A - \mu N_B - G = 0$$
$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad 2aF + 5aN_B - a\mu N_B - 4aG = 0.$$

Rezolvînd sistemul algebric obţinut, se deduce

$$F = 1{,}14G.$$

Scanned with OKEN Scanner

8.25. Să se reprezinte grafic și să se determine raportul forțelor F_1/F_2 pentru sistemul celor două pene din fig. 8.25, a. Se cere, de asemenea, soluția analitică a problemei.

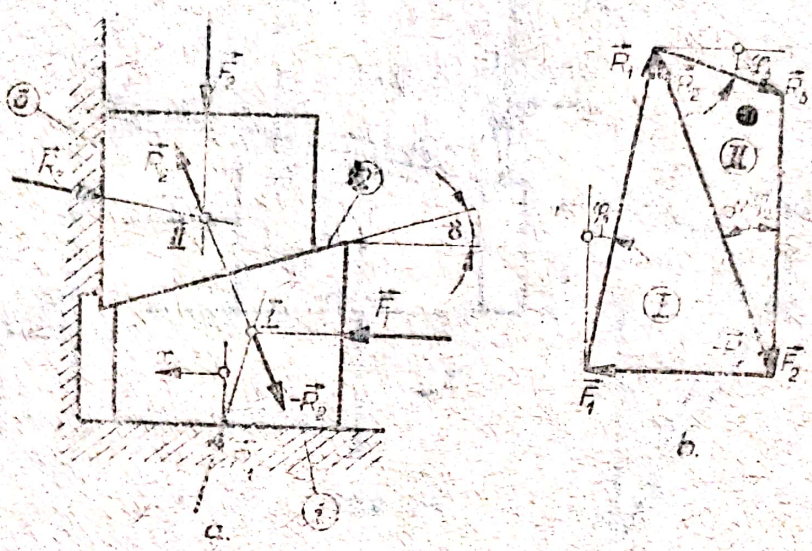


Fig. 8.25 a, b

Rezolvare. Asupra celor două pene acționează cîte trei forțe, care se intersectează în punctele I și II. Reacțiunea $\mathbf{R}_1$ este dirijată către punctul I, iar reacțiunea $\mathbf{R}_2$, către punctul II. Din sistemul de forțe al celor două pene, se deduce raportul căutat F_1/F_2.

Pentru determinarea soluției cu ajutorul ecuațiilor de echilibru, vom face înlocuirea $\mu = \operatorname{tg}\varphi$ și vom face uz de formulele trigonometrice cunoscute. Ecuația de proiecții pentru pana 2, se scrie pe axa y:

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_1 - N_2 \cos\alpha + \mu_2 N_2 \sin\alpha = 0. \tag{1}$$

Pentru pana 2, vom scrie ecuația de proiecții pe axa x

$$\Sigma X_i = 0: \quad N_2 \sin\alpha + \mu_2 N_2 \cos\alpha - N_3 = 0. \tag{2}$$

Ecuația de proiecții pe axa x, pentru întregul sistem, va fi

$$\Sigma X_i = 0: \quad F_1 - \mu_1 N_1 - N_3 = 0. \tag{3}$$

Scriind ecuația de proiecții pe axa y, pentru sistemul celor două pene, rezultă

$$\Sigma Y_i = 0: \quad N_1 - \mu_1 N_1 - N_3 = 0. \tag{4}$$

Rezolvăm sistemul de ecuații; din prima ecuație obținem

$$N_1 = N_2(\cos\alpha - \mu_2 \sin\alpha) = \frac{N_2}{\cos\varphi_2}(\cos\alpha\cos\varphi_2 - \sin\alpha\sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{N_2}{\cos\varphi_2}\cos(\alpha + \varphi_2).$$

Din ecuația a doua deducem:

$$N_3 = N_2(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha) = \frac{N_2}{\cos\varphi_2}(\sin\alpha\cos\varphi_2 + \cos\alpha\sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{N_2}{\cos\varphi_2}\sin(\alpha + \varphi_2).$$

Din ecuația a treia deducem

$$F_1 = N_3 + \mu_1 N_1$$

sau

$$F_1 = N_2 \frac{\sin(\alpha + \varphi_2)}{\cos \varphi_2} + N_2 \frac{\cos(\alpha + \varphi_2)}{\cos \varphi_2} \operatorname{tg} \varphi_1 =$$

$$= N_2 \frac{\sin(\alpha + \varphi_2)\cos \varphi_1 + \cos(\alpha + \varphi_2)\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2} = N_2 \frac{\sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_2)}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}.$$

Din ecuația (4) se obține

$$F_2 = N_1 - \mu_3 N_3 = N_2 \frac{\cos(\alpha + \varphi_2)}{\cos \varphi_2} - N_2 \frac{\sin(\alpha + \varphi_2)}{\cos \varphi_2} \operatorname{tg} \varphi_1 =$$

$$= N_2 \frac{\cos(\alpha + \varphi_2)\cos \varphi_3 - \sin(\alpha + \varphi_2)\sin \alpha_3}{\cos \varphi_2 \cos \varphi_3} = N_2 \frac{\cos(\alpha + \varphi_2 + \varphi_3)}{\cos \varphi_2 \cos \varphi_2}.$$

Rezultă

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_2)\cos \varphi_3}{\cos(\alpha + \varphi_2 + \varphi_3)\cos \varphi_1}.$$

Pentru $\mu_1 = \mu_3$, adică în cazul cînd coeficientul de frecare al penelor cu suprafețele exterioare sînt egale, rezultă

$$\frac{F_1}{F_2} = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi_1 + \varphi_2)$$

iar pentru $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$,

$$\frac{F_1}{F_2} = \operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi).$$

8.26. Se consideră mecanismul cu camă din fig. 8.26, a, avînd articulațiile fixe A, B și C. Forța F, care acționează asupra elementului CG are valoarea: $F = 800$ N. Rola D se sprijină în mod permanent pe camă, datorită arcului, în care apare o forță elastică $F = 200$ N. Coordonatele punctelor mecanismului sînt respectiv: $A(0,0)$, $B(100,0)$, $C(206,126)$, $D(32,48)$, $E(170,16)$, $G(124,88)$, $H(100,-40)$. Se cere să se determine reacțiunea din D și momentul M, care acționează asupra camei.

Rezolvare. Reprezentăm mecanismul schematic și determinăm grafic efortul din bara GE (fig. 8.26, b). Forța $\mathbf{F}$ intersectează bara GE în I. Dreapta IC este suportul (linia de acțiune) a forței $\mathbf{R}_C$. Forța elastică $\mathbf{F}_e$ se intersectează cu direcția forței (efortului) din bara GE în punctul II, rezultînd în urma compunerii lor forța $\mathbf{R}_R$. Liniile de acțiune a forțelor $\mathbf{R}_R$ și a reacțiunii din D, se intersectează în III. Unind punctul III cu punctul B, rezultă direcția reacțiunii din articulația B și punctul de rezemare D, $\mathbf{N}_D$, precum și valorile acestora, din poligonul forțelor. Se obține $N_D = 420$ N. Cunoscînd distanța de la punctul A la direcția reacțiunii N_D, $r_A = 21$ mm, se poate calcula momentul M

$$\Sigma M_{(A)} = 0: \quad r_A \cdot N_D - M = 0$$

de unde

$$M = r_A N_D = 21 \cdot 420 = 8{,}82 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

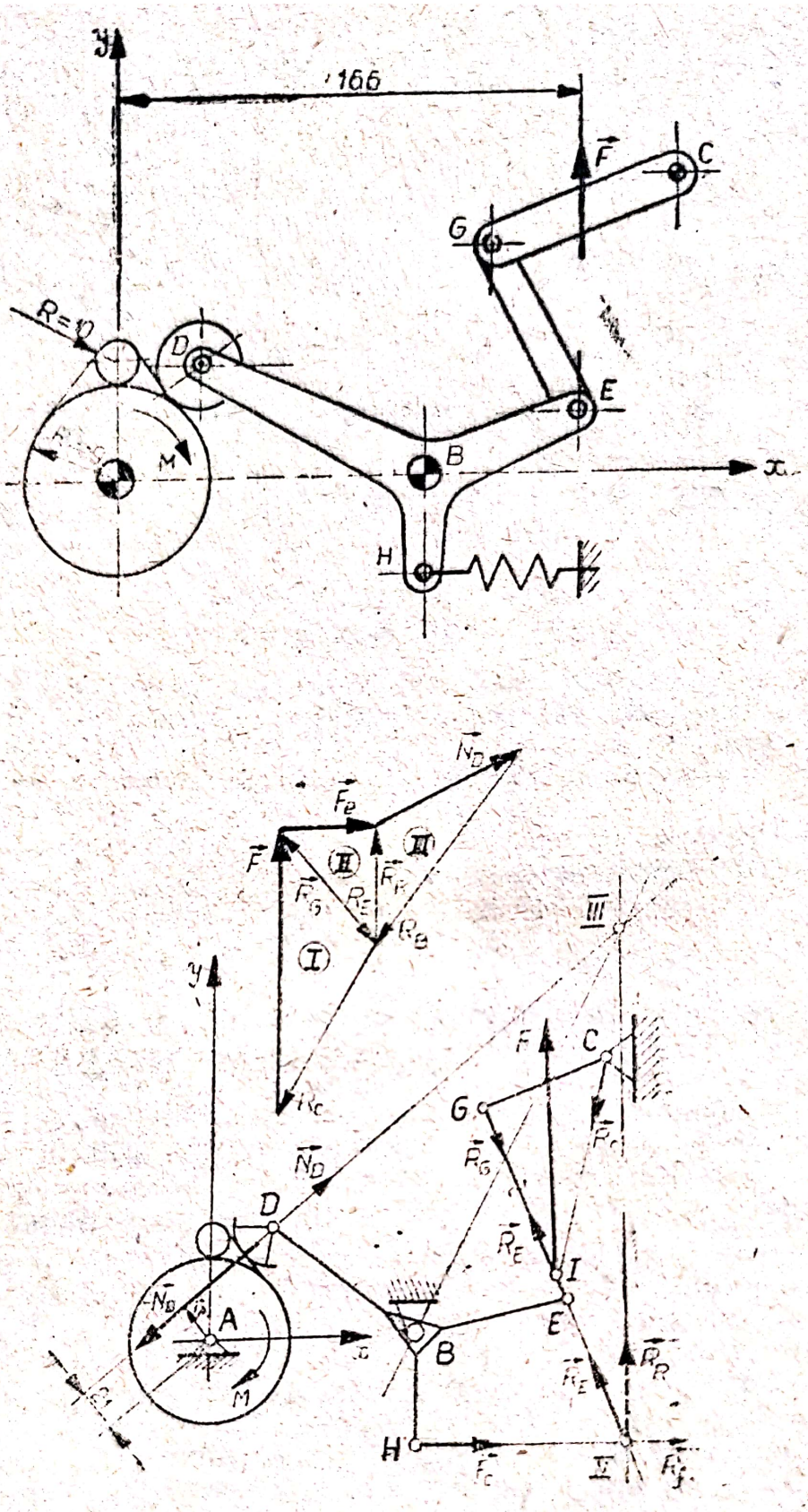


Fig. 8.26 a, b

8.27. Pe un arbore AB se găsesc două roți, solicitate de forțe F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2y} și F_{2z}, ca în fig. 8.27,a. Se cere să se determine reacțiunile din lagărele A și B, cunoscînd valorile forțelor care solicită roțile r_1 și r_2, precum și lungimile a, b și c, care formează arborele AB.

Scanned with OKEN Scanner

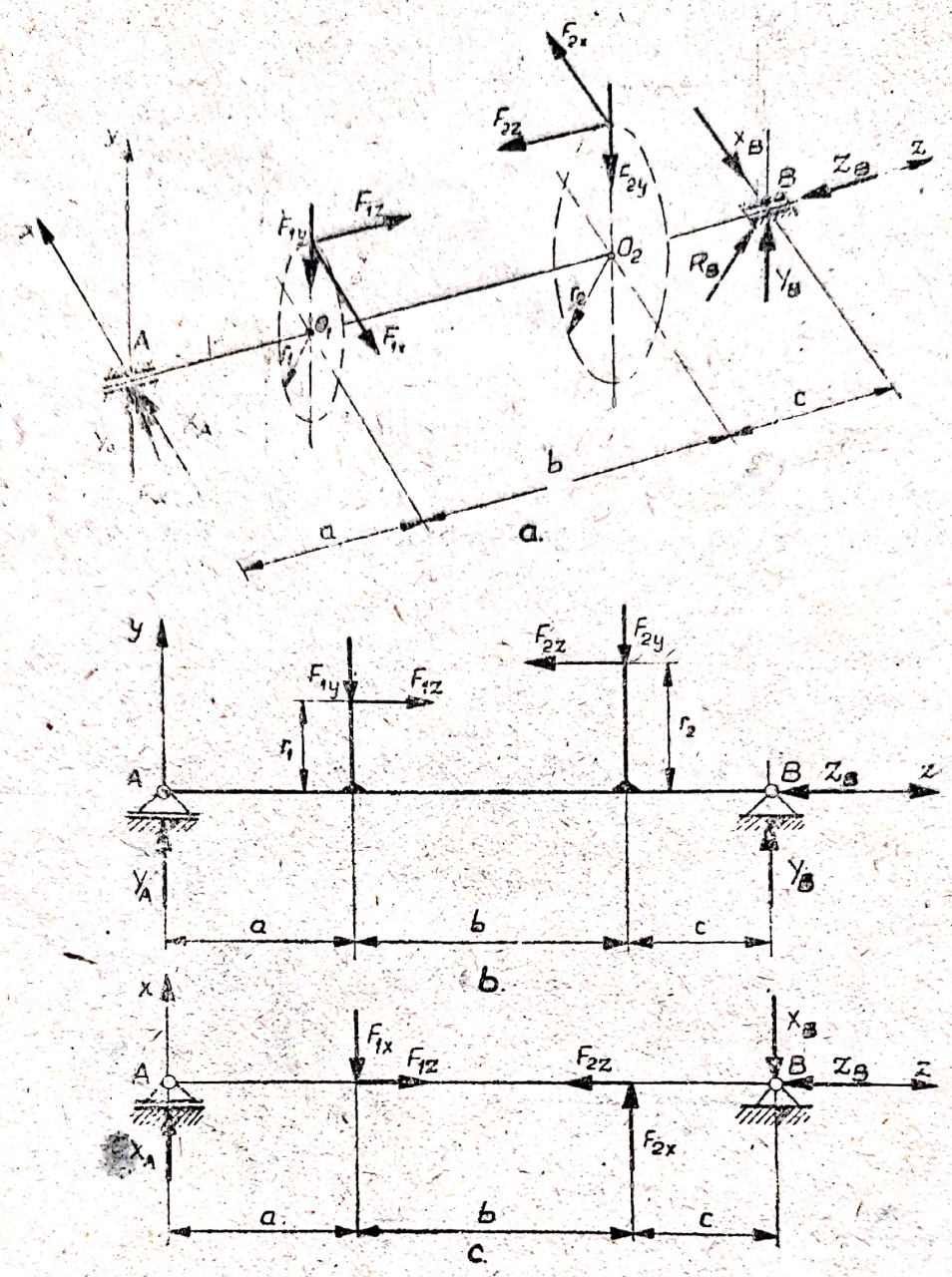


Fig. 8.27 a, b, c

Rezolvare. Reprezentăm arborele cu forţele care-l solicită în planele *yz* şi *xz* (fig. 8.27, b, c).

Ecuaţiile de echilibru al arborelui, cu considerarea forţelor din planul *yz*, sînt

$$\Sigma X_i = 0: \quad Y_A - F_{1y} - F_{2y} + Y_B = 0$$

$$\Sigma Z_i = 0: \quad F_{1z} - F_{2z} - Z_B = 0$$

$$\Sigma M_{xi} = 0: \quad aF_{1y} + r_1F_{1z} + (a+b)F_{2y} - r_2F_{2z} - (a+b+c)Y_B = 0.$$

Considerînd arborele cu forţele aferente, corespunzătoare planului *xz*, avem următoarele ecuaţii

$$\Sigma X_i = 0: \quad X_A - F_{1x} + F_{2x} - X_B = 0$$

$$\Sigma M_{yi} = 0: \quad -aF_{1x} + (a+b)F_{2x} - (a+b+c)X_B = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține

$$X_A = \frac{(b+c)F_{1x} - cF_{2x}}{(a+b+c)}$$

$$Y_A = \frac{(b+c)F_{1y} + cF_{2y} - r_1 \cdot F_{1z} + r_2F_{2z}}{(a+b+c)}$$

$$X_B = \frac{(a+b)F_{2x} - a \cdot F_{1x}}{(a+b+c)}$$

$$Y_B = \frac{a \cdot F_{1y} + (a+b)F_{2y} + r_1F_{1z} - r_2F_{1z}}{(a+b+c)}$$

$$Z_B = F_{1z} - F_{2z}.$$

Momentul de torsiune al arborelui $M_t = M_z$ și rezultă din egalitatea

$$r_1F_{1x} = r_2F_{2x};$$

prin urmare

$$M_t = r_1F_{1x} = r_2F_{2x}.$$

8.28. Să se determine încărcările din barele A, B și C din fig. 8.28, a, care formează o structură static determinată.

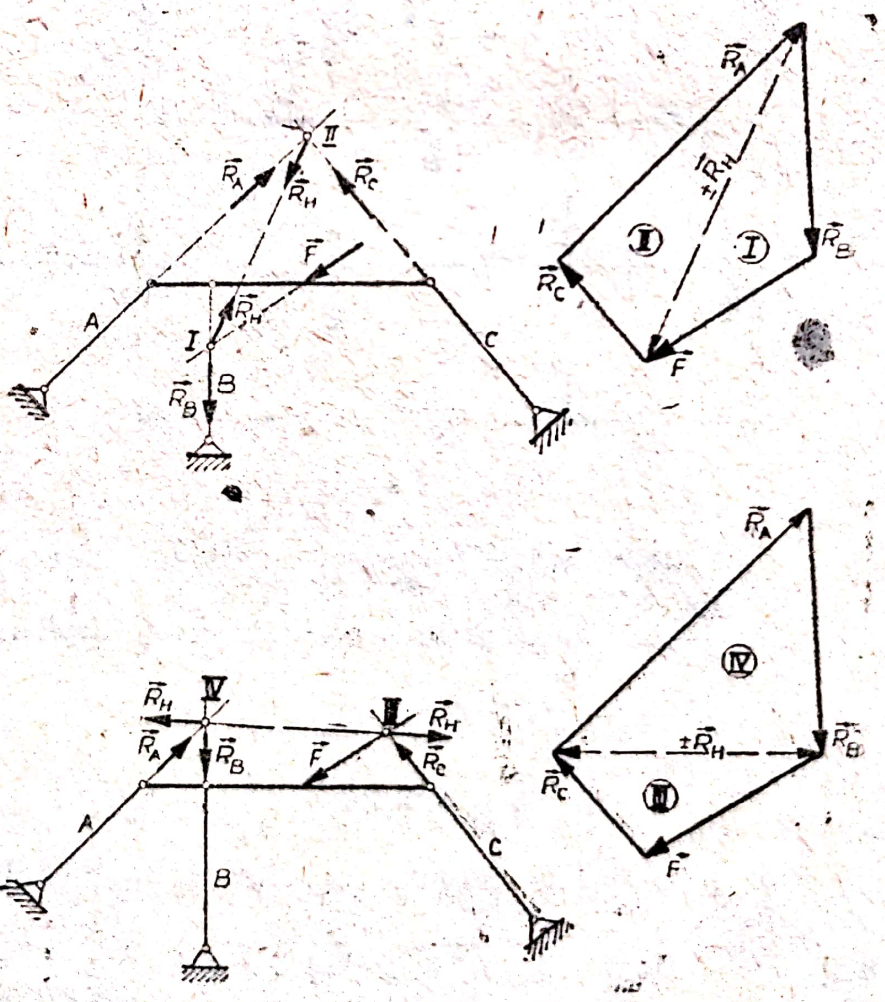


Fig. 8.28 a, b

Rezolvare. Suporţii celor trei forţe se intersectează în punctele I şi II. Translăm forţa F pe suport pînă-n punctul I şi determinăm componentele $\mathbf{R}_B$ şi $\mathbf{R}_H$. Componenta $\mathbf{R}_H$ se descompune în punctul II în componentele $\mathbf{R}_A$ şi $\mathbf{R}_C$. La acelaşi rezultat se putea ajunge printr-o altă reprezentare (fig. 8.28), determinînd punctele de intersecţie III şi IV ale forţelor $\mathbf{R}_C$ şi $\mathbf{F}$ — respectiv $\mathbf{R}_A$ şi $\mathbf{R}_B$ din poligonul forţelor, se observă că: $\mathbf{R}_H = \mathbf{F} + \mathbf{R}_C$, respectiv $(-\mathbf{R}_H) = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B$.

Soluţia analitică a sistemului se determină cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru, pe care ni le pune la dispoziţie Statica.

8.29. Se cere să se determine reacţiunile din suporturile de reazem, pentru un strung (fig. 8.29, a), cunoscînd forţele F_1, F_2 şi F_3, care solicită cuţitul strungului, precum şi greutatea G a sarcinii compusă din suportul longitudinal al strungului împreună cu celelalte elemente componente şi accesorii ale strungului (suportul transversal, suportul port-cuţit, cuţitul de strung etc).

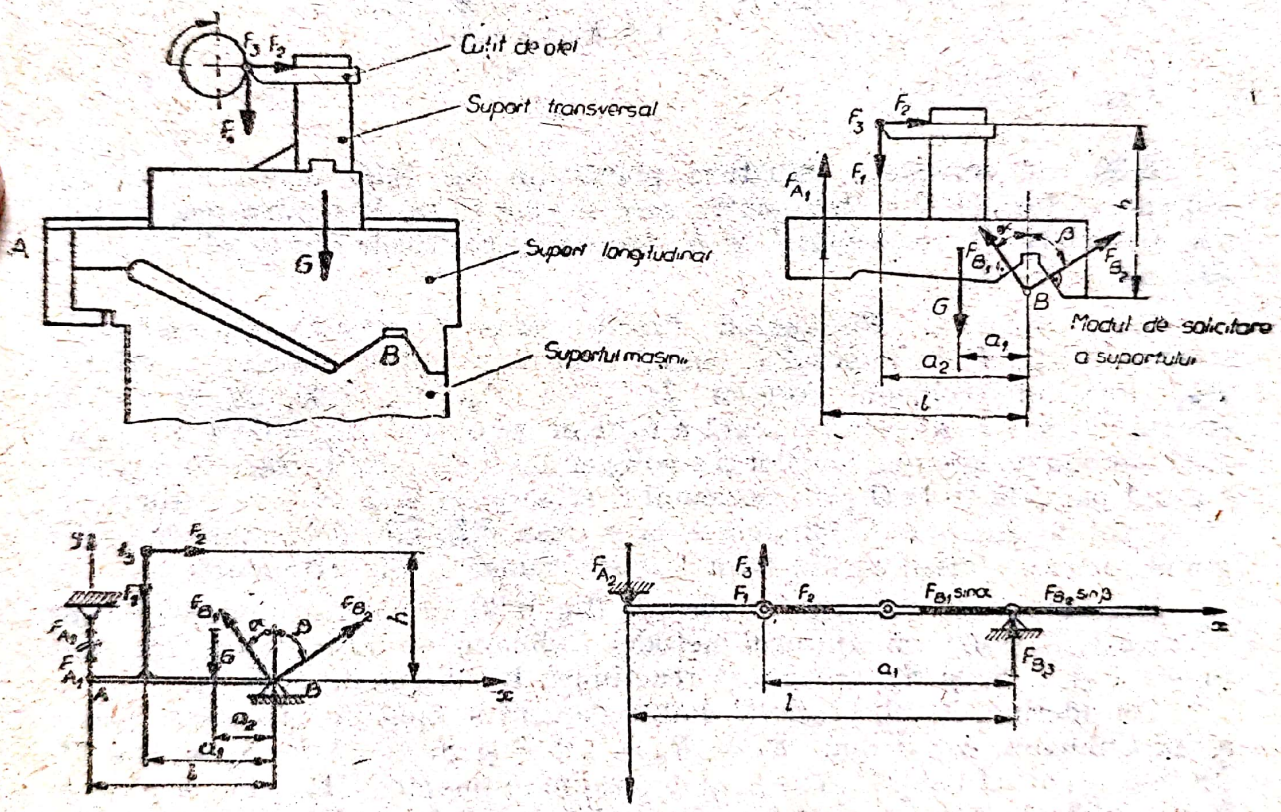


Fig. 8.29 a, b, c, d

Rezolvare. Separăm suportul longitudinal, împreună cu părţile sale componente de suportul maşinii şi reprezentăm forţele care acţionează asupra lui (fig. 8.29, b), precum şi reacţiunile din legăturile sale mecanice, rezultînd grinzile din figurile b şi c. Ecuaţiile de echilibru ale suportului, reprezentat schematic ca în figurile c şi d, sînt respectiv

$$\Sigma X_i = 0: \quad F_2 - F_{B1} \sin \alpha + F_{B2} \sin \beta = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0: \quad F_{A1} - F_1 - G + F_{B1} \cos \alpha + F_{B2} \cos \beta = 0$$

$$\Sigma M_B = 0: \quad -l \cdot F_{A1} + a_1 F_1 + a_2 \cdot G - h \cdot F_2 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru grinda AB și

$$\Sigma Z_i = 0: \quad F_{A2} - F_3 - F_{B3} = 0$$

$$\Sigma M_B = 0: \; lF_{A2} - a_1 F_3 = 0.$$

Rezolvînd sistemul celor cinci ecuații de mai sus, deducem reacțiunile din suprafețele de reazem ale suportului longitudinal al strungului. Se obține:

$$F_{A1} = \frac{a_1 F_1 + a_2 G - h F_2}{l}$$

$$F_{A2} = \frac{a_1}{l} F_3,$$

$$F_{B1} = \frac{(l - a_2) G \sin \beta + (l - a_1) F_1 \sin\beta + (h \sin \beta + l \cos \beta) F_2}{l \sin(\alpha + \beta)}$$

$$F_{B2} = \frac{(l - a_1) F_1 \sin \beta + [(l \cos \beta + h \sin \beta) F_2 + (l - a_2) G \sin \beta] \cdot \sin \alpha - l \sin (\alpha + \beta) F_3}{l \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}$$

$$F_{B3} = \frac{(a_1 - l)}{l} F_3.$$

8.30. Se consideră structura plană din fig. 8.30, a, asupra căreia acționează forțele P și $2P$, pentru care se cere să se determine reacțiunile din articulația A, reazemele C și E, precum și eforturile din barele 1, 2 și din bara $D-K$.

Rezolvare. Prelungind direcția barei 2, aceasta intersectează suportul forței P, în punctul I. Unind I cu A, se obține direcția reacțiunii R_{B1}; formînd poligonul forțelor P, S_2 și R_{H1} (fig. 8.30, b), se obține efortul în bara 2. Alergînd o scară a forțelor, se obține: $S_2 = 0{,}94\ P$. Aplicînd metoda poligonului forțelor și a poligonului funicular (metod a Culmann), trasînd paralela O' la O prin reazemul C și paralela la 2, $2'$ prin articulația B, se obține dreapta s'. Paralela s, la s' dusă prin pol, determină în poligonul forțelor efortul S_1 din bara 1 și reacțiunea R din articulația A.

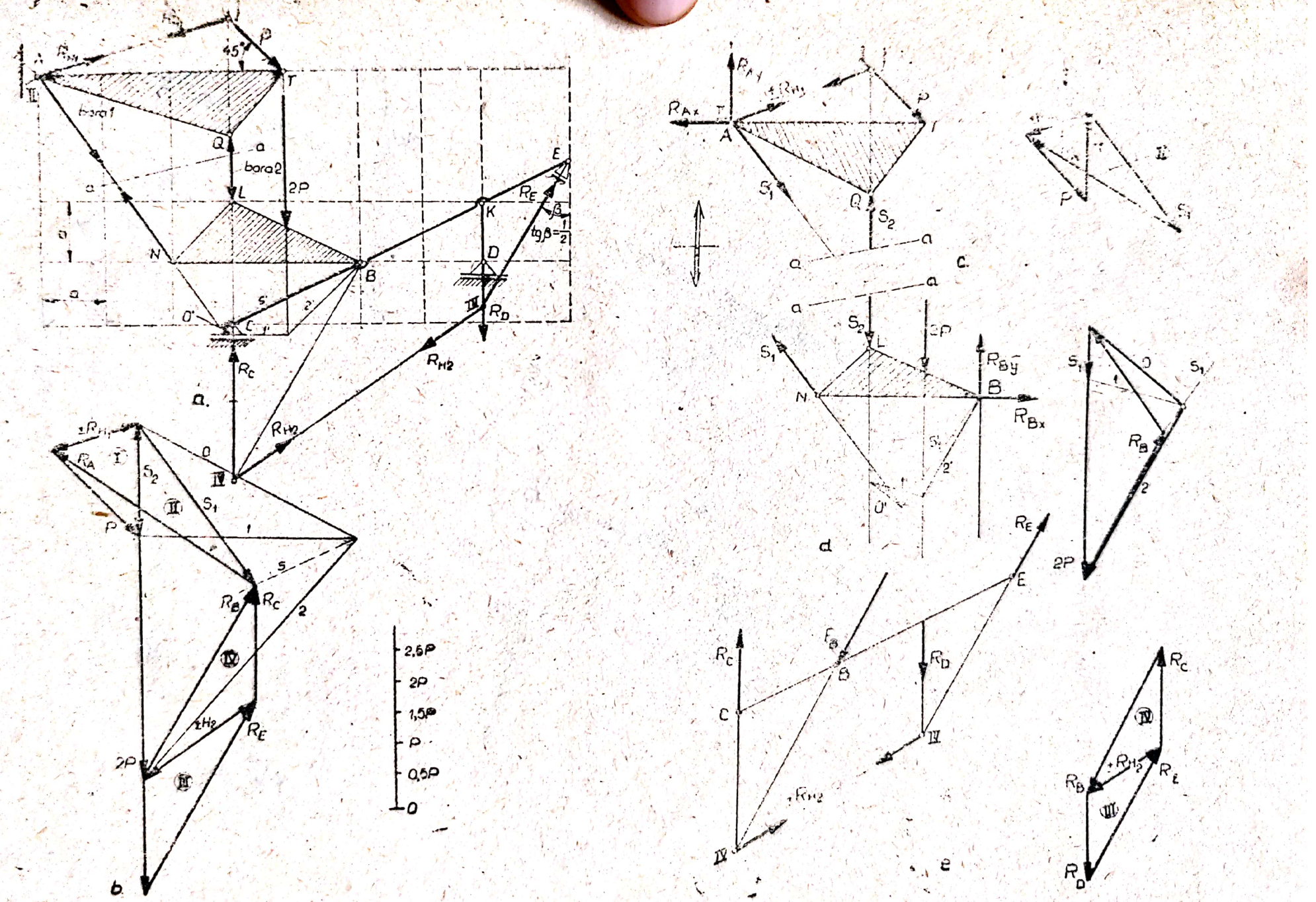
Descompunînd sistemul, se observă (fig. 8.30, c) că efectuînd echilibrul elementului izolat cu ajutorul metodei Culmann se obține eforturile din barele 1 și 2, S_1 și S_2, precum și reacțiunea $\mathbf{R}_A$ din articulația A.

Considerînd, la fel, cel de-al doilea element și aplicînd procedeul grafic al lui Culmann, dse deduc: $R_C = R_B = 1{,}9\ P$ și $S_1 = 1{,}5\ P$, $S_2 = 0{,}94\ P$. În fine, separînd bara $C-D-E$, și determinînd punctele III și IV, și efectuînd echilibrul grafic al forțelor care solicită bara, se obțin: $R_C = R_D = 1{,}3\ P$ și $R_E = 1{,}8\ P$.

8.31. Se consideră sistemul celor două bare din fig. 8.31, solicitat de diferite forțe, aplicate în puncte diferite, cum se poate vedea în figură. Se cere să se determine, pentru fiecare caz în parte, reacțiunile din articulațiile A și B.

Rezolvare. Cazul prezentat în fig. 8.31, a se rezolvă grafic, din condiția de echilibru a trei forțe coplanare, care trebuie să fie și concurente; poligonul forțelor, reprezentat alături (fig. 8.31, a'), permite de terminarea reacțiunilor N_{A1} și N_{B1}. Procedînd analog, pentru cazurile 8.31, b și c (fig. b' și c'), se deduc respectiv: N_{A2}, N_{B2} și N_{A3}, N_{B3}.

Scanned with OKEN Scanner



bara1
bara2
45°
2P
R_E
R_D
R_C
R_{H2}
R_A
R_B
R_{Ax}
R_{Ay}
R_{By}
R_{Bx}
S_1
S_2
$tg\beta = \frac{1}{2}$
2,5P
2P
1,5P
P
0,5P
0
a.
b.
c.
d.
e.

Fig. 8.30

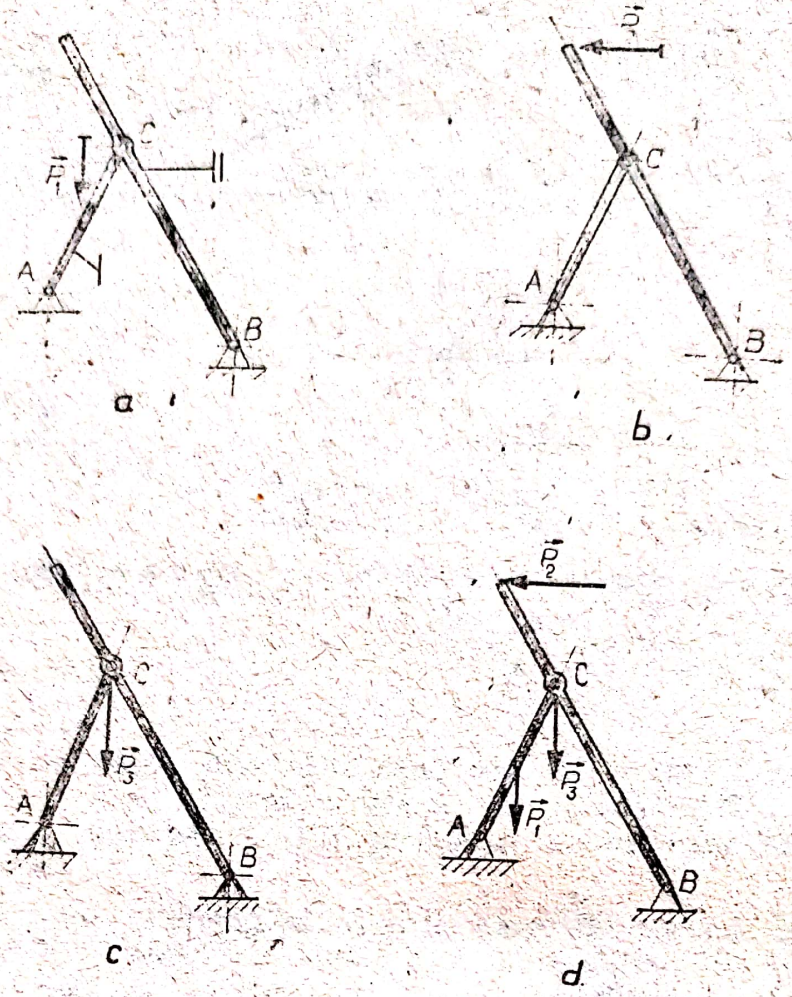


Fig. 8.31 a, b, c

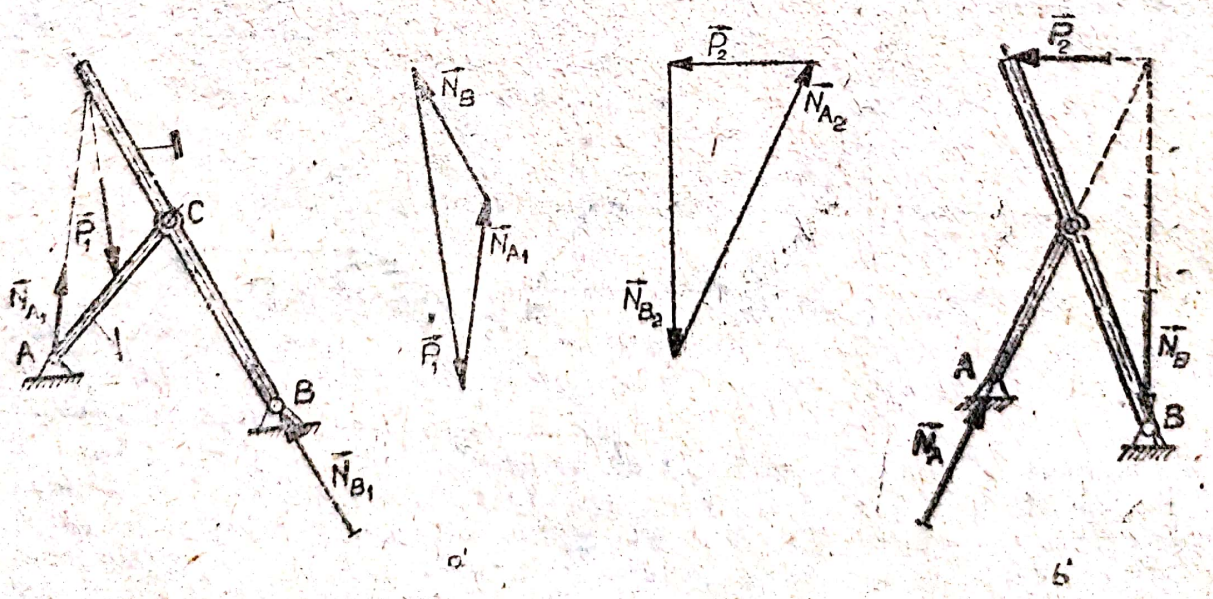


Fig. 8.31 a', b',

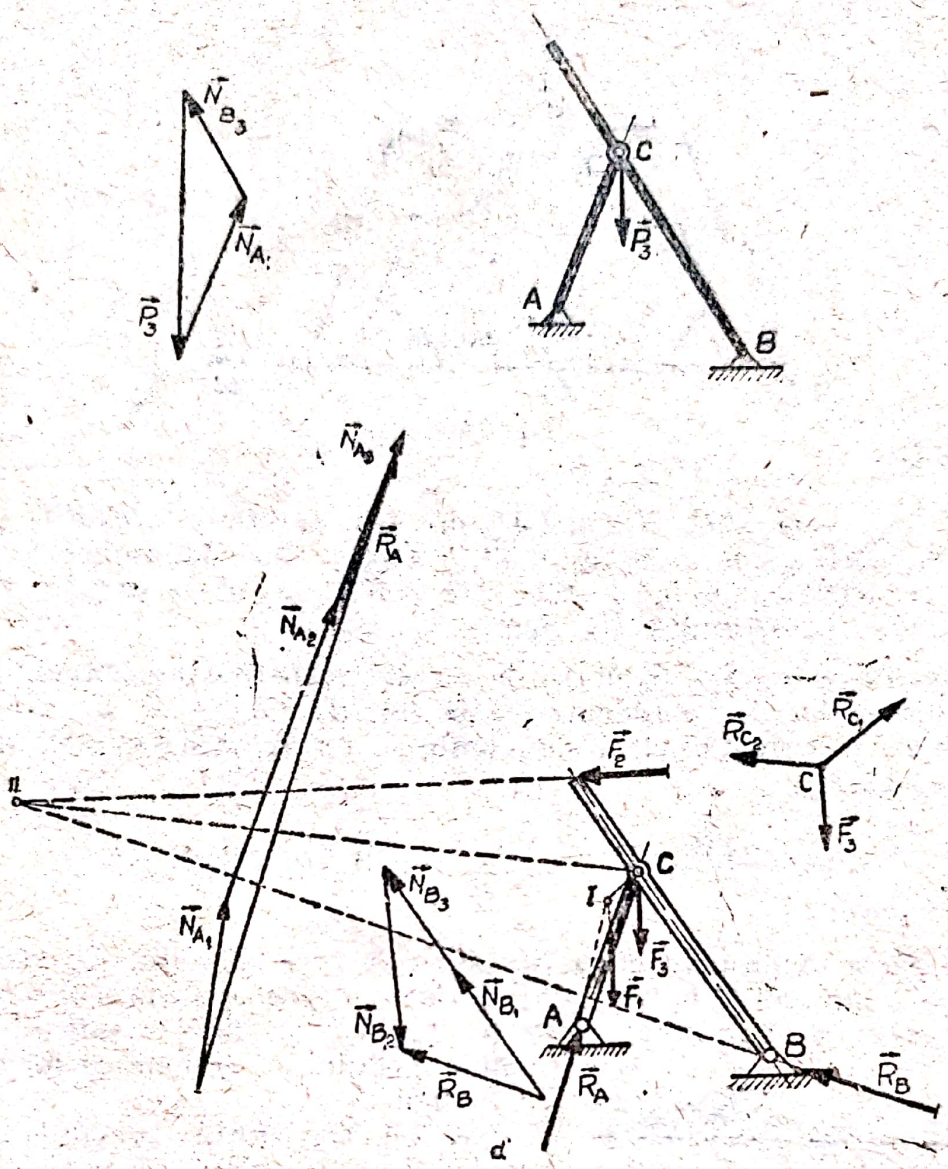


Fig. 8.31. c', d'

Se observă că (fig. d) în ultimul caz, sistemul celor două bare este solicitat de cele trei forțe care, solicită separat structura. Pentru determinarea, în acest caz, a reacțiunilor din articulațiile A și B, se poate aplica principiul suprapunerii efectelor. Intersecția direcției reacțiunilor $\mathbf{R}_A$ cu direcția forței $\mathbf{F}_1$, determină punctul I, iar intersecția direcției reacțiunii $\mathbf{R}_B$ cu direcția forței $\mathbf{F}_2$, determină punctul II. În partea din dreapta a fig. d', s-au reprezentat forțele care asigură echilibrul articulației C.

B. PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

8.32. Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru placa din fig. 8.32.

R. $x_G = 0$; $y_G = \dfrac{6R^3 - 8Rr^2\pi + 8r^3}{9\sqrt{3}R^2 - 12r^2\pi}$.

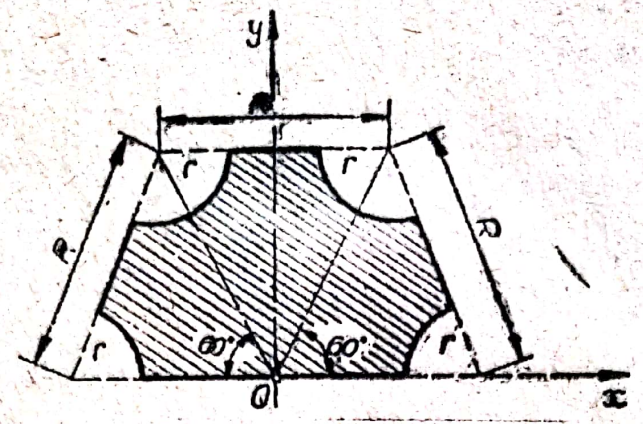


Fig. 8.32

8.33. Trei bare: AD, BD și CD, sînt concurente în nodul D și formează o structură plană, ca în fig. 8.33, a. Se cere să se determine eforturile din cele trei bare, cunoscînd forțele care solicită nodul D, precum și lungimile barelor, care rezultă din figură.

R. Notînd cu S_1, S_2 și S_3 eforturile din cele trei bare și descompunîndu-le pe direcțiile axelor de coordonate, ca în figurile 7.33, b și c, calculînd unghiurile α și β, scriind ecuațiile de echilibru și rezolvînd sistemul de ecuații obținut, se găsește

$$S_1 = -\frac{\sqrt{10}}{3}F \text{ și } S_2 = S_3 = \sqrt{13}\cdot F = 3{,}61F.$$

8.34. Să se determine eforturile din cele trei bare din fig. 8.34, a, concurente în punctul D, în trei cazuri distincte, exprimate prin coordonatele punctelor $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ și $C(x_3, y_3, z_3)$, date în tabelul 8.34. Asupra nodului D acționează forța $2F$, ca în figură.

Tabelul 8.34

i	x_i	y_i	z_i	l_i
1	a	0	3a	$a\sqrt{10}$
2	−a	0	3a	$a\sqrt{10}$
3	0	2a	3a	$a\sqrt{13}$

R. Cu trei forțe concurente ca muchii, se poate forma un paralelepiped. Notînd prin $\mathbf{R}$ diagonala unui paralelipiped dreptunghic și prin α, β și γ unghiurile pe care forța $\mathbf{R}$ le face cu axele de coordonate (fig. 8.34, a), componentele forței rezultante $\mathbf{R}$, au expresiile: $X = R\cdot\cos\alpha$; $Y = R\cdot\cos\beta$; $Z = R\cdot\cos\gamma$. Secționînd barele, notînd cu S_1, S_2, S_3 eforturile în bare, scriind ecuațiile de proiecții pe axele de coordonate și rezolvînd sistemul de ecuații obținut, rezultă:

$$S_1 = -\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)F = -1{,}05F;\ S_2 = S_1 = -\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)F = -1{,}05F$$

$$\text{și } S_3 = \sqrt{13}F = 3{,}61F.$$

8.35. Asupra unei plăci omogene, în formă de triunghi echilateral, acționează o forță P (fig. 8.35, a). Se cere să se determine eforturile în

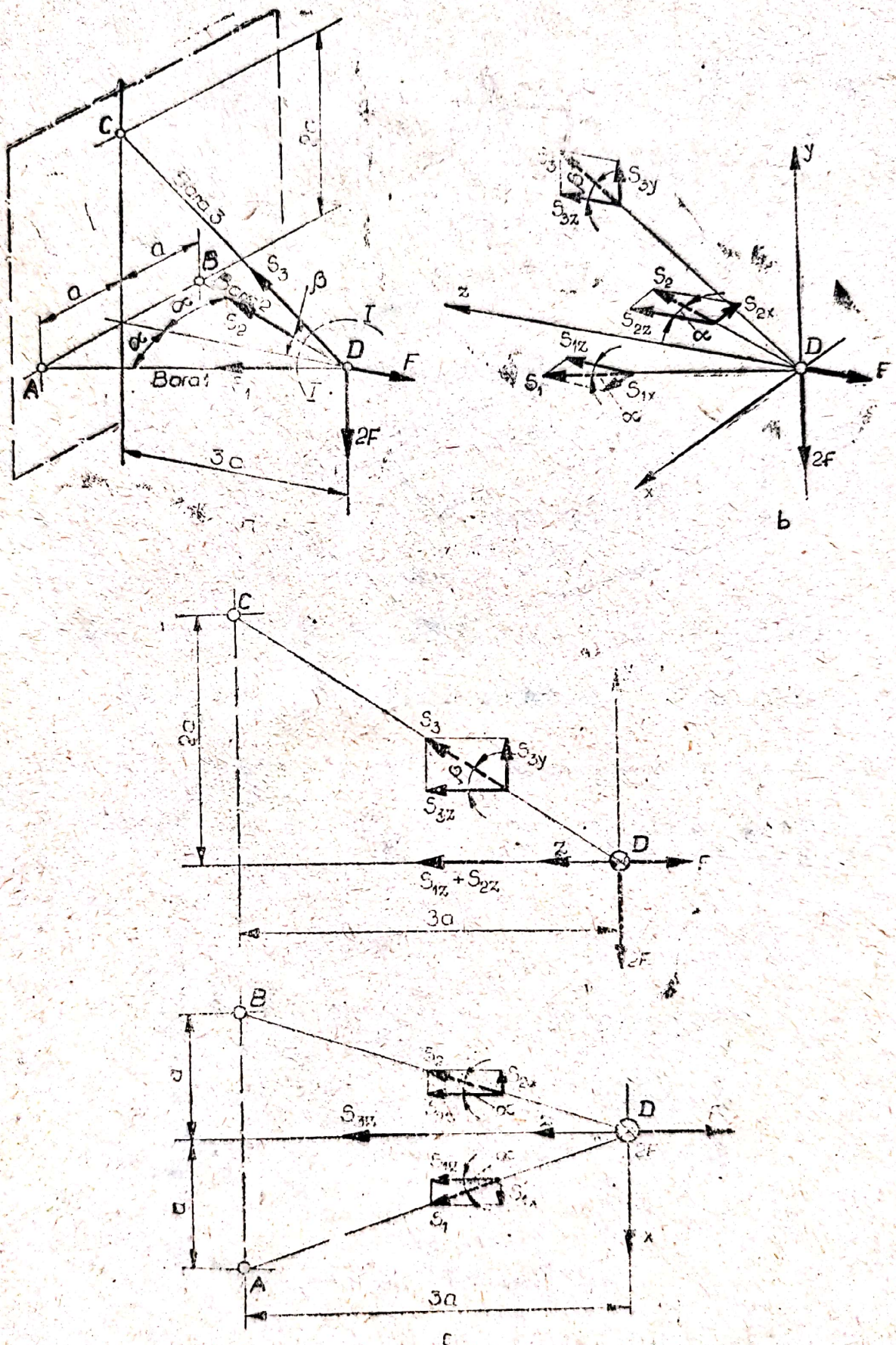


Fig. 8.38

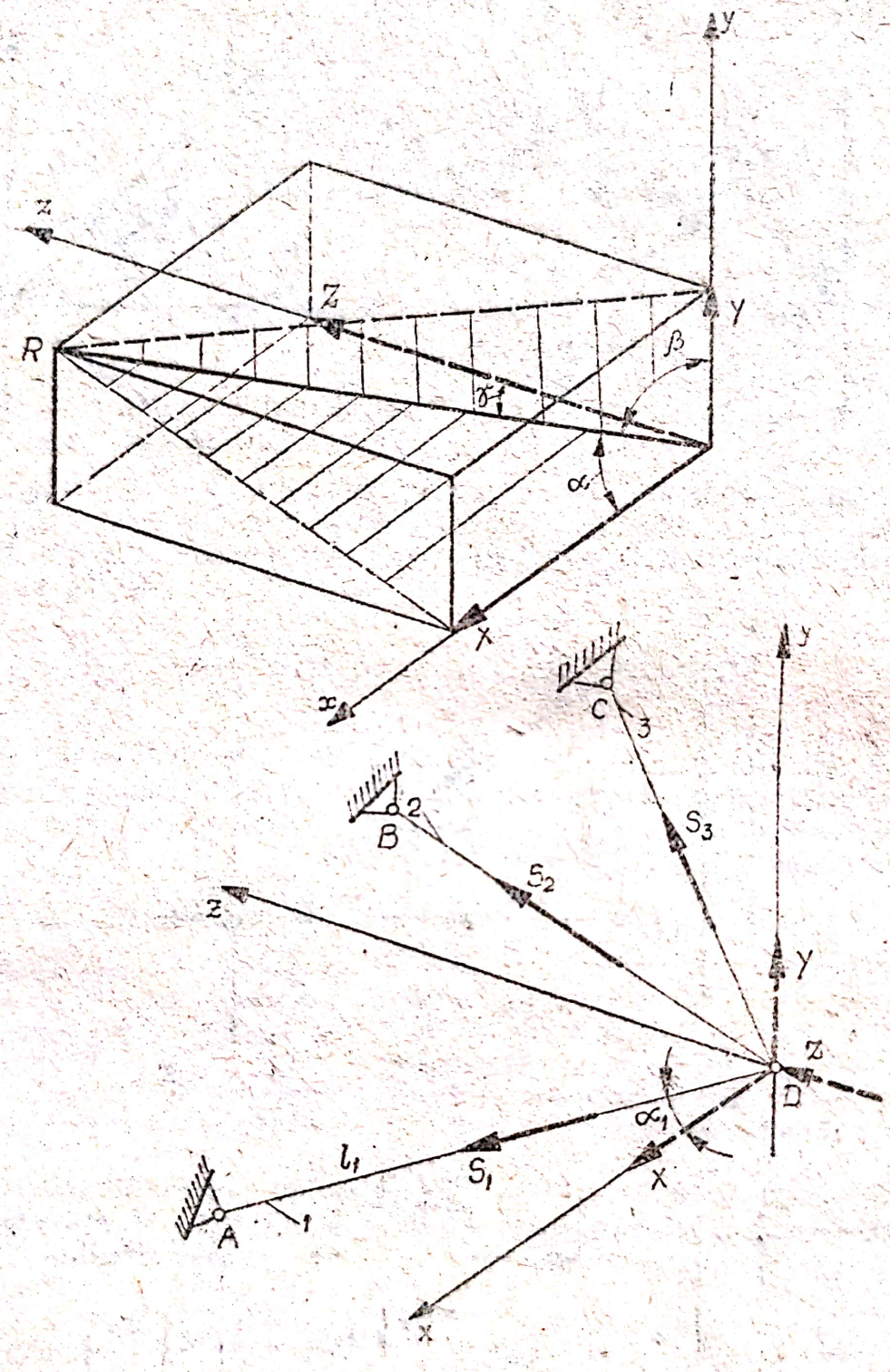


Fig. 8.34

Scanned with OKEN Scanner

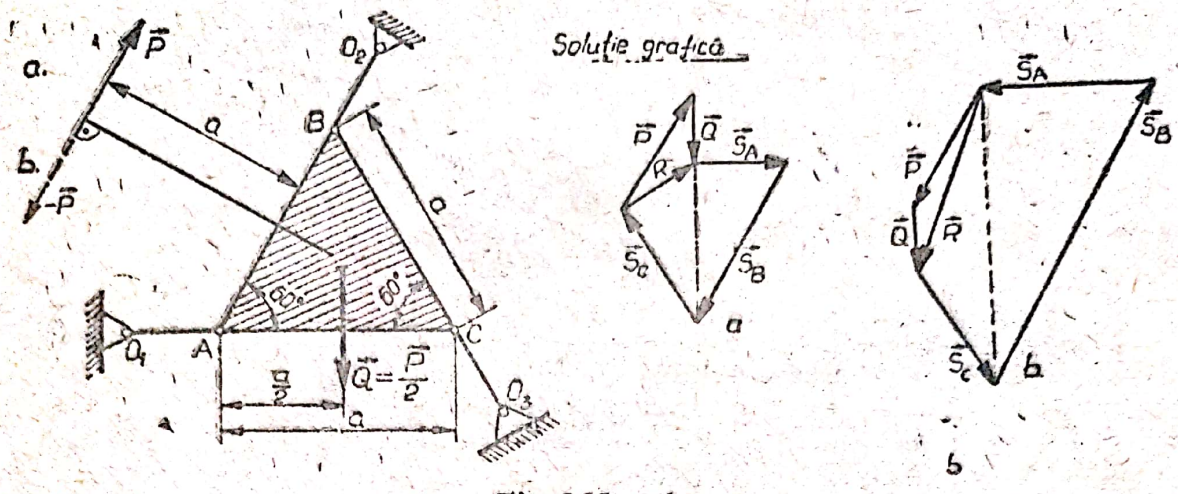


Fig. 8.35 a, b

barele: AO_1, BO_2 și CO_3, pentru cazurile a) și b). Să se dea și o soluție grafică a problemei.

R. a) $S_A = -\frac{2}{3}\sqrt{3}P = -1{,}156P$; $S_B = -\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)P = -1{,}866P$;

$S_C = -\frac{5}{6}\sqrt{3}P = -1{,}444P$.

b) $S_A = \frac{2}{3}\sqrt{3}P = 1{,}156 \cdot P$; $S_B = \left(1+\frac{5}{6}\sqrt{3}\right) \cdot P = 2{,}444P$;

$S_C = \frac{\sqrt{3}}{2}P = 0{,}866P$. Soluția grafică se dă în fig. 8.35, b.

8.36. Să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele din fig. 8.36, a, cu ajutorul planului Cremona.

R. Construcția grafică a planului Cremona se arată în fig. 8.36, b. La scara forțelor prezentată în figură, rezultă eforturile din barele grinzii cu zăbrele, date în tabelul solicitărilor.

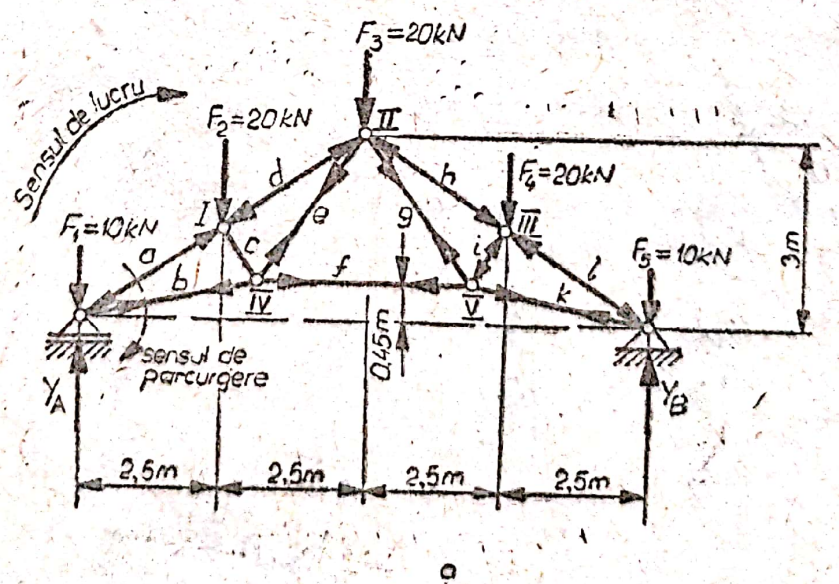
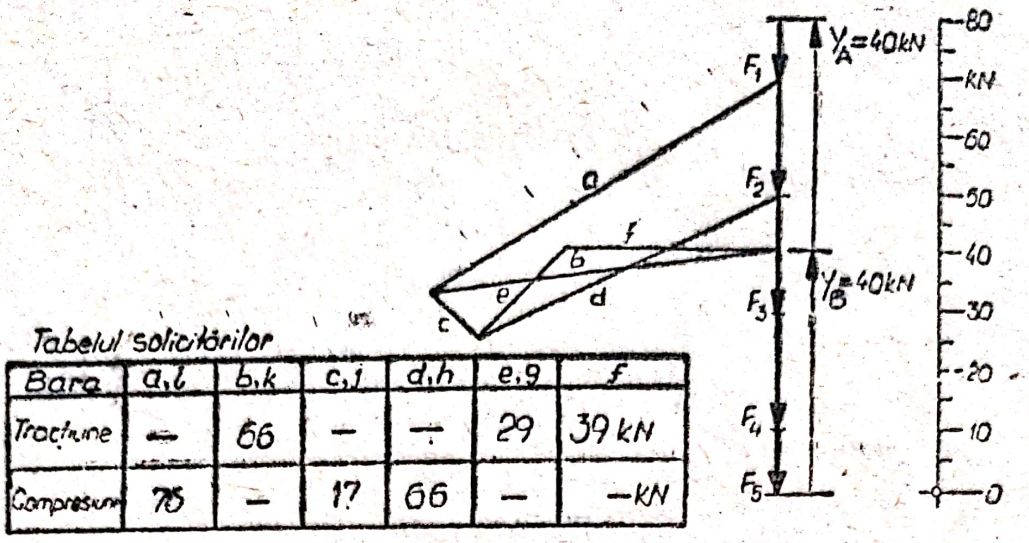


Fig. 8.36 a



Tabelul solicitărilor

Bara	a,l	b,k	c,j	d,h	e,g	f
Tracțiune	—	66	—	—	29	39 kN
Compresiune	78	—	17	66	—	—kN

Fig. 8.36 b

8.37. Şaibă O_1, de rază R, este articulată în O_1; de şaibă este prinsă o bară de greutate neglijabilă, care are la cealaltă extremitate o roată (şaibă) de rază r. Cele două şaibe se găsesc în echilibru, peste ele fiind trecut un fir, care are la extremităţi două sarcini egale cu Q. Dîndu-se: $Q = 10^2$N, $G = 40$ N, $r = 3$ cm, $R = 4$ cm şi $l = 10$ cm, se cere:

1) unghiul α în poziţia de echilibru a sistemului;
2) efortul din bara rigidă O_1O_2.

R. Rezultatele sînt înscrise alăturat desenului 8.37, b.

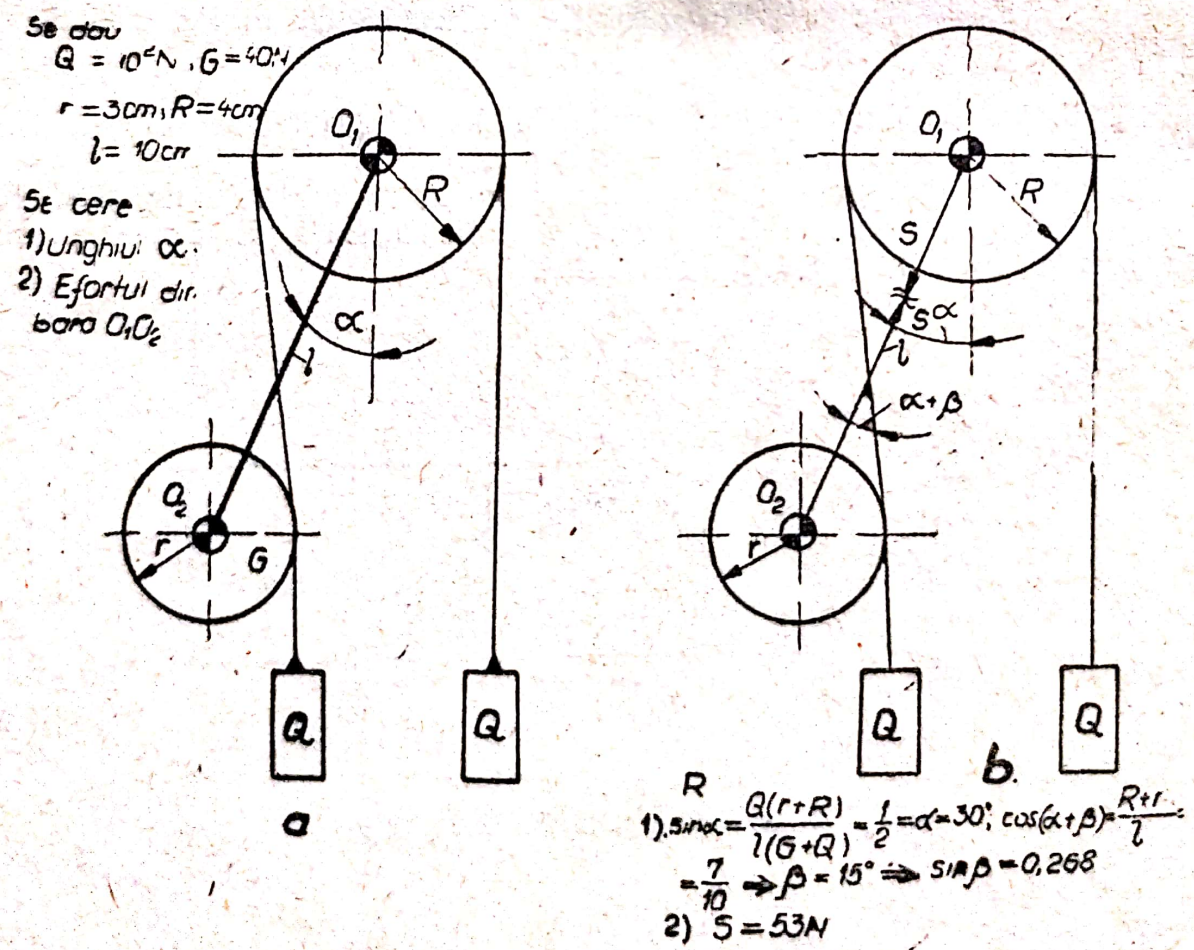


Fig. 8.37 a, b

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Appel, P., *Traité de mecanique rationelle*, Paris, Gauthier—Villars, 1955.
2. Artobolevki, I, I., *Teoria mecanismelor şi maşinilor* (traducere din limba rusă), Editura Tehnică, Bucureşti, 1955.
3. Atanasiu, M., *Mecanica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.
4. Atanasiu, M., Mişicu, I., Tălpăşanu, I., *Teorie şi probleme de mecanică*, Institutul Politehnic, Bucureşti, 1985.
5. Bălan, Şt., *Lecţii complementare de mecanică*, Editura didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.
6. Bălan, Şt., Beiu-Paladi, E., *Curs de mecanică teoretică*, Vol. I, II, Tipografia Învăţământului, Bucureşti, 1957—1960.
7. Béda Gyula, Bezák Antal, *Mechanika I*, Budapest, 1981.
8. Brîndeu, L., *Mecanica*, Institutul Politehnic, Timişoara, 1986.
9. Buccholz, N, N., Voronkov, I, M., Minahov, I, A., *Culegere de probleme de mecanică raţională* (traducere din limba rusă), Editura Tehnică, Bucureşti, 1952.
10. Ceauşu, V., Enescu, N., Ceauşu, F., *Culegere de probleme de mecanică*, Institutul Politehnic, Bucureşti, 1987.
11. Culea, D., *Mecanica*, Universitatea din Galaţi, 1985.
12. Constantinescu, I, N., Kecs, W, A., Darabont, A, V., *Culegere de probleme de mecanică*, Vol. I, Institutul de Mine, Petroşani, 1969.
13. Darabont, A., Văiteanu, D., Munteanu, M., *Mecanică tehnică, Culegere de probleme*, „Scrisul Românesc", Craiova, 1983.
14. Göldner, H., *Übungsaufgaben aus der Technischen Mechanik*, Leipzig.
15. Göldner — Holzweissig, Leitfaden, der Technischen Mechanik, Leipzig.
16. Groşanu, Is., *Mecanica*, Institutul Politehnic, Timişoara, 1985.
17. Hanganu, S., Slătineanu, I., *Mecanica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
18. Iablonski, A, A., ş.a., *Sbornik zadaci dlia kursovih rabot po teoreticeskoi mehanike*, Izd. „Vişşaia Skola", Moskva, 1972.
19. Iacob, C., *Mecanică teoretică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977.
20. Irimiciuc, N., ş.a., *Curs de Culegere de probleme de mecanică*, Institutul Politehnic, Iaşi, 1983.
21. Lazăr, D., *Principiile mecanicii analitice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.
22. Mangeron, D., Irimiciuc, N., *Mecanica rigidelor cu aplicaţii în inginerie*, Editura tehnică, Bucureşti.
23. Mangeron, D., Poterașu, V. Fl., Vulpe, A., *Teoria optimizării structurilor cu aplicaţii*, Editura Junimea, Iaşi, 1980.
24. Manolescu, N., Kovacs, Fr., Orănescu, A., *Teoria mecanismelor şi a maşinilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.
25. Manolescu, N., Maroş, D., *Cinetostatica şi dinamica mecanismelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.
26. Meriam, J, L., *Engineering Machanics*, Vol. I, II, John Wiley & Sons, Inc., 1980.
27. Méchtcherski, I., *Recueil de problèmes de mécanique rationnelle*, Editions „Mir", Moscou, 1973.

Scanned with OKEN Scanner

28. Marinescu, C., Lupu, M., *Curs de Mecanică teoretică*, Braşov, 1978.
29. Olariu, V., *Mecanică teoretică*, Vol. I, II, III, Universitatea din Braşov, 1969.
30. Olariu, V., Sima, P., Achiriloaie, P., *Mecanica tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti.
31. Onicescu, O., *Mecanica*, Editura tehnică, Bucureşti, 1962.
32. Radu, A., *Probleme de mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978.
33. Rădoi, M., Deciu., *Mecanica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977.
34. Redlov, T., *Fire elastice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.
35. Redlov, T., *Mecanică teoretică*, Universitatea din Braşov, 1977.
36. Ripianu, A., Popescu, P., Bălan, B., *Mecanică tehnică*, Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1979.
37. Ripianu, A., Papescu, P., Bălan, B., ş.a. *Culegere de probleme de mecanică*. Cluj 1978.
38. Sarian, M., ş.a., *Probleme de mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
39. Silaş, Gh., Groşanu, I., *Mecanica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
40. Sima, P., *Culegere de probleme de mecanică tehnică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.
41. Sima, P., Olariu, V., *Culegere de probleme de mecanică*, Vol. I, Universitatea din Braşov, 1978.
42. Sima, P., Curtu, I., ş.a. *Probleme de mecanică aplicată în economia forestieră*, Editura CERES, Bucureşti, 1981.
43. Sima, P., *Probleme de mecanică aplicată în economia forestieră*, Editura CERES, Bucureşti, 1985.
44. Stoenescu, Al., Ripianu, A., Atanasiu, M., *Culegere de probleme de Mecanică, teoretică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.
45. Sima, P. Curs de mecanică teoretică.
Universitatea Braşov 1972
46. Talpoşi A., Nicolae, N., Boţoman, I., *Culegere de probleme, Mecanica construcţiilor*, Partea I, Universitatea din Braşov, 1979.
47. Targ, S., *Eléments de méchanique rationnelle*, Edition Mir, Moscou, 1975.
48. Vîlcovici, V., *Mecanică teoretică*. Universitatea Bucureşti, 1958.
49. Vîlcovici, V., Bălan, St., Voinea, R., *Mecanica teoretică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.
50. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceauşu, V., *Mecanica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
51. Voinea, R., Voiculescu, D., Simion, Fl. P., *Introducere în mecanica solidului cu aplicaţii în inginerie*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1989.
52. Wittenbauer, F., *Aufgaben aus der technischen Mechanik*, erster Band, Berlin, Verlag Iulius Springer, 1929.

Scanned with OKEN Scanner